SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2009-2010
Môn Toán
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể giao đề

Câu 1 (4đ)

a) Chứng minh rằng $A=(2^n-1)(2^n+1)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n
b) Tìm số các số nguyên n sao cho $B=n^2-n+13$ là số chính phương

Câu 2. (5đ)

a) Giải phương trình
$$x^2-2x+3=2\sqrt{2x^2-4x+3}$$
b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2-y^2=1-xy \\ x^2+y^2=3xy+11 \end{cases}$$

Câu 3 (3đ)

Cho ba số x, y, z thỏa mãn
$$\begin{cases} x+y+z=2010 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2010} \end{cases}$$
Tính giá trị của biểu thức $P=(x^{2007}+y^{2007})(y^{2009}+z^{2009})(z^{2011}+x^{2011})$

Câu 4. (6đ)

Cho đường tròn (O;R) và dây cung AB cố định, $AB=R\sqrt{2}$. Điểm P di động trên dây AB (P khác A và B). Gọi $(C;R_1)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn (O;R) tại A , $(D;R_2)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn (O;R) tại B. hai đường tròn $(C;R_1)$ và $(D;R_2)$ cắt nhau tại điểm thứ hai là M.

a) Trong trường hợp P không trùng với trung điểm dây AB, chứng minh OM//CD và 4 điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn
b) Chứng minh khi P di động trên dây AB thì điểm M di động trên đường tròn cố định và đưởng thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định N
c) Tìm vị trí của P để tích PM.PN lớn nhất ? diện tích tam giác AMB lớn nhất ?

Câu 5. Cho các số dương x, y,z thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=670.$ Chứng minh rằng:
$$\frac{x}{x^2-yz+2010}+\frac{y}{y^2-zx+2010}+\frac{z}{z^2-xy+2010}\geq\frac{1}{x+y+z}$$

ĐÁP ÁN ĐỀ PHÚ THỌ 2009-2010

Câu 1

a) Theo giả thiết n là số tự nhiên nên $2^n-1; 2^n; 2^n+1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp

Vì tích của 3 số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3 nên $(2^n-1).2^n.(2^n+1)$ chia hết cho 3

Mặt khác $(2^n;3)=1$ nên $(2^n-1)(2^n+1)$ chia hết cho 3

Vậy A chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n

b) Ta thấy B là số chính phương $\Leftrightarrow$ $4B$ là số chính phương

Đặt 4B= k^2 $(k\in \mathbb{N})$ thì $4B=4n^2-4n+52=k^2 \Leftrightarrow (2n-1-k).(2n-1+k)=-51$

Vì $2n-1+k\geq 2n+1+k$ nên ta có các hệ

$\begin{cases}2n-1+k=1\\2n-1-k=-51\end{cases}(1)$ $\begin{cases}2n-1+k=3\\2n-1-k=-17\end{cases}(2)$ $\begin{cases}2n-1+k=51\\2n-1-k=-1\end{cases}(3)$ $\begin{cases}2n-1+k=17\\2n-1-k=-3\end{cases}(4)$

Giải hệ (1) (2) (3) (4) ta tìm được $n=-12; n=-3; n=13; n=4$

Vậy các số nguyên cần tìm là $n\in\{-12;-3;4;13\}$

Câu 2

a) Ta có $2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1\geq 1$ nên tập xác định của phương trình là R

Phương trình đã cho tương đương với

$2x^2-4x+3-4\sqrt{2x^2-4x+3}+3=0$

Đặt $y=\sqrt{2x^2-4x+3}\geq 1$ thì phương trình đã cho trở thành

$y^2-4y+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\y=3\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $y=1$ ta có $\sqrt{2x^2-4x+3}=1\Leftrightarrow 2x^2-4x+3=1\Leftrightarrow x=1$

Với $y=3$ ta có $\sqrt{2x^2-4x+3}=3\Leftrightarrow 2x^2-4x+3=9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x=1, x=-1, x=3$

b) hệ đã cho tương đương với

$\begin{cases}11(x^2+xy-y^2)=11\\x^2-3xy+y^2=11\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+xy-y^2=1\\11(x^2+xy-y^2)=x^2-3xy+y^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+xy-y^2=1\\(x+2y)(5x-3y)=0\end{cases}(*)$

Từ hệ (*) ta suy ra

$\begin{cases}x^2+xy-y^2=1\\x+2y=0\end{cases}(I)$ hoặc $\begin{cases}x^2+xy-y^2=1\\(x+2y).(5x-3y)=0\end{cases}(II)$

Giải hệ (I) ta tìm được $(x;y)=(2;-1);(-2;1)$

Hệ II vô nghiệm

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(2;-1);(-2;1)$

Câu 3

Từ giả thuyết suy ra x, y, z khác 0 và

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x+y+z}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{xy}+\frac{x+y}{z(x+y+z)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz+yz+z^2}\right)=0$$

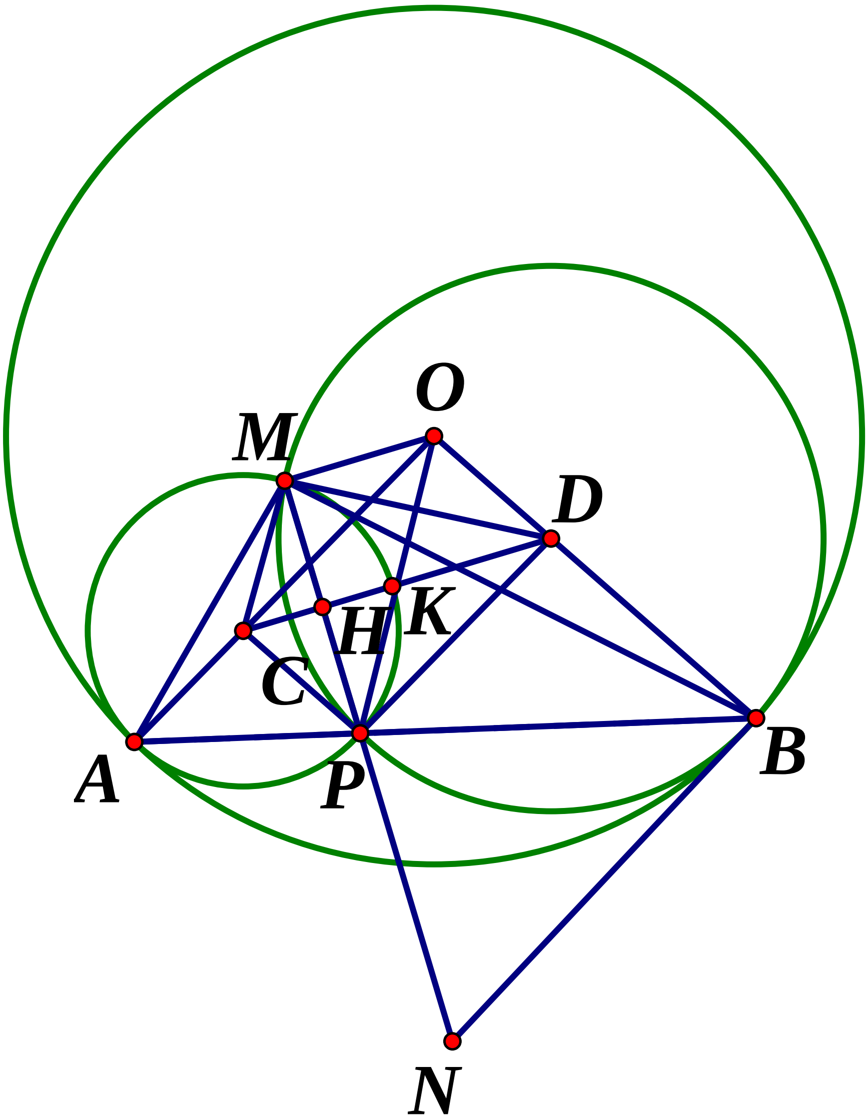
$$\Leftrightarrow (x+y)(xz+yz+z^2+xy)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left[z(z+x)+y(z+x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ z+y=0 \\ x+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ y=-z \\ z=-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{2007}=-y^{2007} \\ y^{2009}=-z^{2009} \\ z^{2011}=-x^{2011} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{2007}+y^{2007}=0 \\ y^{2009}+z^{2009}=0 \\ z^{2011}+x^{2011}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow P=0$$

Câu 4



a) Nối CP, PD ta có $\Delta ACP, \Delta OAB$ lần lượt cân tại C, O nên $\widehat{CPA} = \widehat{CAP} = \widehat{OBP}$ do đó CP // OD (1)
Tương tự $\Delta DPB, \Delta OAB$ lần lượt cân tại D, O nên $\widehat{DPB} = \widehat{DBP} = \widehat{OAB}$ nên OD//CP (2) . Từ (1) và (2) suy ra ODPC là hình bình hành
Gọi CD cắt MP tại H cắt OP tại K thì K là trung điểm của OP
Theo tính chất 2 của đường tròn cắt nhau ta có CD $\perp$ MP $\Rightarrow$ H là trung điểm MP
Vậy HK // OM do đó CD // OM
Ta phải xét 2 trường hợp AP < BP và AP > BP, đáp án chỉ yêu cầu xét 1 trường hợp giả sử AP < BP
Vì tứ giác CDOM là hình bình hành nên OC = DP, DP=DM=R_2 nên tứ giác CDOM là hình thang cân do đó 4 điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn

b) Xét tam giác AOB có $OA^2 + OB^2 = 2R^2 = AB^2$ nên tam giác OAB vuông cân tại O. Vì 4 điểm C, D, O, M cùn thuộc một đường tròn (kể cả $M \equiv O$) nên $\widehat{COB} = \widehat{CMD}$ (1)
Xét ΔMAB và ΔMCD có: $\widehat{MAB} = \widehat{MCD}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MP}$ của (C))
$\widehat{MBD} = \widehat{MDC}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{MP}$ của (D))
Nên ΔMAB đồng dạng ΔMCD (g.g)
Vì ΔMAB đồng dạng với ΔMCD suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{COD}$ hay $\widehat{AMB} = \widehat{AOB} = 90^0$
Do AB cố định nên điểm M thuộc đường tròn tâm I đường kính AB
Ta có $\widehat{ACP} = \widehat{BDP} = \widehat{AOB} = 90^0$ nên
$\widehat{AMP} = \frac{1}{2}\widehat{ACP} = 45^0$ (Góc nội tiếp và góc ở tâm của (C))
$\widehat{BMP} = \frac{1}{2}\widehat{BDP} = 45^0$ (góc nội tiếp và góc ở tâm của (D))
Do đó MP là phân giác $\widehat{AMB}$
Mà $\widehat{AMB} = \widehat{AOB} = 90^0$ nên M thuộc đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác AOB
Giả sử MP cắt đường tròn (I) tại N thì N là trung điểm cung AB không chứa điểm O nên N cố định

c) ΔMAP và ΔBNP có $\widehat{MPA} = \widehat{BPN}$ (đối đỉnh); $\widehat{AMP} = \widehat{PBN}$ (góc nôi tiếp cùng chắn 1 cung) nên ΔMAP đồng dạng ΔBNP (g.g)
Do đó $\frac{PA}{PN} = \frac{PM}{PB} \Leftrightarrow PM.PN = PA.PB \le \left(\frac{PA+PB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{R^2}{2}$ (không đổi)
Vậy PM.PN lớn nhất bằng $\frac{R^2}{2}$ khi PA=PB hay P là trung điểm dây AB
Vì tam giác AMB vuông tại M nên
$S_{AMB} = \frac{1}{2}AM.BM \le \frac{1}{4}\left(AM^2 + BM^2\right) = \frac{AB^2}{4} = \frac{R^2}{2}$

Diện tích tam giác AMB lớn nhất bằng $\frac{R^2}{2}$ khi PA=PB hay P là trung điểm dây AB

Câu 5.

Trước tiên ta chứng minh bất đẳng thức : Với mọi $a,b,c\in\mathbb{R}$ và $x,y,z>0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\qquad (*)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Thật vậy, với $a,b\in\mathbb{R}$ và $x,y>0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}\qquad (**)$$

$\Leftrightarrow \left(a^2y+b^2x\right)(x+y)\ge xy(a+b)^2$

$\Leftrightarrow (bx-ay)^2\ge 0$ (luôn đúng). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$VT=\frac{x}{x^2-yz+2010}+\frac{y}{y^2-zx+2010}+\frac{z}{z^2-xy+2010}$$

$$=\frac{x^2}{x(x^2-yz+2010)}+\frac{y^2}{y(y^2-zx+2010)}+\frac{z^2}{z(z^2-xy+2010)}\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^3+y^3+z^3-3xyz+2010(x+y+z)}\ (1)$$

Chú ý: $x(x^2-yz+2010)=x(x^2+xy+zx+1340)>0; y(y^2-zx+2010)>0$ và $z\left(z^2-xy+2010\right)>0$

Chứng minh
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz\right)$$
$$=(x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right]\quad (2)$$

Do đó:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz+2010(x+y+z)=(x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)+2010\right]=(x+y+z)^3\ (3)$$

Từ (1) và (3) ta suy ra

$$VT\ge\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^3}=\frac{1}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{\sqrt{2010}}{3}$