

LỜI NÓI ĐẦU

Bất thức đẳng là một vấn đề khá cổ điển của toán học sơ cấp và đang ngày càng phát triển, nó là một trong những phần đẹp và thú vị nhất của toán học sơ cấp. Trong các BĐT thì BĐT cô si khá quen thuộc và được sử dụng nhiều trong các chứng minh BĐT. Nhằm nâng cao kỹ năng giải toán BĐT, đặc biệt là các bài toán quy về BĐT CÔSI chúng tôi thực hiện đề tài “KỸ THUẬT TÁCH VÀ GHÉP BỘ SỐ TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI” mong rằng giúp các bạn giải quyết một cách nhanh chóng các bài toán BĐT và có được cái nhìn sâu sắc hơn về BĐT. Qua đó giúp cho người học tự tin hơn khi gặp BĐT.

Nội dung đề tài gồm 3 chương:

Chương 1: Kiến thức cơ sở.

Chương 2: Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của một biểu thức.

Chương 3: Tách và ghép bộ số trong chứng minh bất đẳng thức.

Và phần cuối là một số bài tập tham khảo, tài liệu tham khảo.

Sau mỗi bài toán chúng tôi khái quát bài toán và có ví dụ tương tự.

Mục đích của chúng tôi là làm thế nào để người đọc dễ hiểu nhất và rút được kinh nghiệm cho bản thân khi gặp các bài toán tương tự. Qua đó chúng tôi còn chỉ ra những sai lầm mà rất nhiều bạn hay mắc phải, nguyên nhân chính ở đây là còn chưa nắm được bản chất để áp dụng được BĐT côsi. Xong thời gian có hạn không tránh khỏi sai sót, chúng tôi rất mong được ý kiến đóng góp của bạn đọc để đề tài hoàn thiện hơn. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn sự hướng dẫn giúp đỡ của thầy Dương Thanh Vĩ đã giúp chúng tôi thực hiện đề tài này.

Quy nhơn, tháng 11 năm 2009.

Nhóm tác giả

Mục lục

	Trang
Lời nói đầu	1
Mục lục	2
Chương 1: Kiến thức cơ sở.	
A) Giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất.	3
B) Bất thức đẳng cô si.	4
Chương 2: Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của một biểu thức.	7
Chương 3: Tách và ghép bộ số trong chứng minh bất đẳng thức	16
Tài liệu tham khảo	28

Chương 1: Kiến Thức Cơ Sở

A) Giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất.

1. Định nghĩa

Giả sử hàm f xác định trên tập D ($D \subset \mathbb{R}$)

a) Nếu $\exists x_0 \in D : f(x) \leq f(x_0), \forall x \in D$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên D .

Ký hiệu là : $\max_{x \in D} f(x) = M$.

b) Nếu $\exists x_0 \in D : f(x) \geq f(x_0), \forall x \in D$ thì số $m = f(x_0)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên D .

Ký hiệu: $\min_{x \in D} f(x) = m$.

Như vậy muốn chứng tỏ M (hoặc m) là giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm f trên tập D cần phải chỉ rõ:

+) $f(x) \leq M$ (hoặc $f(x) \geq m$) $\forall x \in D$

+) $\exists x_0 \in D$ để $f(x_0) = M$ (hoặc $f(x_0) = m$).

2) Tính chất

a) Nếu $P = A + B$ thì $\max P = \max A + \max B$

Trong đó A và B là các biểu thức chứa các biến độc lập với nhau hoặc nếu A, B cùng chứa chung biến và cùng đạt GTLN (GTNN) tại một giá trị xác định $x = x_0$.

Bạn đọc thử kiểm chứng nhận xét trên ☺.

b) Nếu $A \geq 0$ thì $\max A^2 = (\max A)^2$

$$\min A^2 = (\min A)^2$$

c) Hàm số $f(x)$ xác định trên tập D , hai tập $A, B \subset D$. Khi đó nếu $A \subset B$ thì:

$$\max_A f \leq \max_B f$$

$$\min_A f \geq \min_B f$$

d) Các hàm số $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ xác định trên tập D. Khi đó

$$\max_D (f_1(x) + \dots + f_n(x)) \leq \sum_{i=1}^n \max_D f_i.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f_i(x)$ đạt max tại x_0 với mọi $i=(1, \dots, n)$.

B) Bất đẳng thức cô si.

1) Bất đẳng thức cô si cho 2 số dương a và b.

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

2) Bất đẳng thức cô si cho n ($n \geq 2$) số dương a_i , $i=(1..n)$.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$;

Chú ý: khi sử dụng BĐT cô si điều quan trọng nhất là thấy được dấu đẳng thức xảy ra tại đâu. Thông thường đối với các BĐT dạng đối xứng thì dấu đẳng thức thường xảy ra tại các giá trị mà sao cho $x=y=z$ chẳng hạn.

Ví dụ 1: Cho $x, y > 0$ và $x+y=1$ (1). Tìm GTNN của $A = xy + \frac{1}{xy}$

Sau đây là lời giải một số bạn

Nếu không chú ý đến dấu "=" xảy ra thì sẽ dẫn đến sai lầm. Chẳng hạn:

Áp dụng BĐT Cô si cho xy và $\frac{1}{xy}$ ta được: $A \geq 2$.

Do đó $\min A = 2$.

Ở đây là một sai lầm mà các bạn thường gặp.

Như vậy $\min A = 2$ đạt được tại đâu? Như trên thì nó đạt tại $xy = \frac{1}{xy} \Leftrightarrow xy = 1$

Điều này sai vì: $1 = x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{4}$;

Từ đó ta có sự phân tích và đi đến lời giải như sau:

Phân tích:

Nếu ta cho $x=y$ và thay vào (1) ta được: $x=y=\frac{1}{2}$ khi đó thì $xy=\frac{1}{4}$;

Từ đó ta đi cân bằng các đại lượng cần áp dụng: $kxy=\frac{1}{xy}$.

Với $xy=\frac{1}{4}$ ta suy ra $k=16$.

Từ đó ta mới đi đến lời giải:

Viết lại $A=16xy+\frac{1}{xy}-15xy$

Ta có $16xy+\frac{1}{xy} \geq 8$; vì $0 \leq xy \leq \frac{1}{4}$ nên $-15xy \geq -\frac{15}{4}$

Vậy $\text{Min}A=\frac{17}{4}$ khi $xy=\frac{1}{4}$ hay $x=y=\frac{1}{2}$;

* Chú ý: Có rất nhiều BĐT đòi hỏi phải vận dụng kỹ thuật tách các đại lượng cho hợp lý. Những sai lầm hay gặp phải khi giải BĐT là dấu đẳng thức không thể xảy ra hoặc xảy ra tại các giá trị mà không thuộc miền đang xét hay còn gọi là xác định.

3) Một số trường hợp đặc biệt từ BĐT côsi

Với a, b là 2 số không âm ta có

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \text{ và } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ vì vậy } (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \text{ hay } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Tương tự ta cũng chứng minh được cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \quad (1.0) \text{ dấu “=” xảy ra tại}$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Chương 2

Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của một biểu thức.

1) Cho $x, y, z > 0$. Tìm GTNN của biểu thức sau:

$$P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}$$

Ta có cách giải sau:

Áp dụng BĐT côsi cho 6 số sau

$$\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}, \frac{y+z}{x}, \frac{z+x}{y}, \frac{x+y}{z} \text{ ta được } P \geq 6$$

Vậy $\text{Min}P=6$.

Cách giải này là sai vì người giải đã bỏ qua một phần quan trọng trong định nghĩa là phải chỉ ra được dấu “=” xảy ra khi nào.

Như trên thì dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z}$$

$$\text{Hay } \begin{cases} x = y + z \\ y = z + x \text{ (vô lí vì } x, y, z > 0) \\ z = x + y \end{cases}$$

Sau đây ta sẽ xem một cách giải đúng như sau:

Ta viết lại biểu thức P

$$P = (x+y+z) \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right) - 3 + \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y}$$

Áp dụng BĐT côsi lần lượt cho 3 số $(x+y), (y+z), (z+x)$ và 3 số

$$\frac{1}{x+y}, \frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x} \text{ rồi nhân lại theo vế, ta có kết quả sau:}$$

$$\frac{1}{2}((x+y) + (y+z) + (z+x)) \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right) \geq \frac{9}{2}$$

(1)

Mặt khác thì $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y}$

Mà theo BĐT côsi ta có:

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} \geq 6 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $P \geq \frac{9}{2} - 3 + 6 = \frac{15}{2}$

Vậy $\text{Min}P = \frac{15}{2}$ tại $x=y=z$;

Bài toán này là một trường hợp đặc biệt của bài toán sau:

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} + \frac{a_2 + a_3}{a_1} + \dots + \frac{a_1 + a_2}{a_n} \geq \frac{n^2}{2} + n$$

Chứng minh này dành cho bạn đọc.

Hướng dẫn: làm hoàn toàn giống như bài trên ☺

2) Cho $x, y > 0$ và $x+y \geq 4$. Tìm GTNN của $A = 2x + 3y + \frac{6}{x} + \frac{10}{y}$; [3]

Một bạn giải như sau:

Áp dụng BĐT côsi ta được

$$2x + \frac{6}{x} \geq 4\sqrt{3}; 3y + \frac{10}{y} \geq 2\sqrt{30}$$

Từ đó suy ra là GTNN của A là $4\sqrt{3} + 2\sqrt{30}$

Dấu '=' xảy ra tại $x = \sqrt{3}; y = \sqrt{\frac{10}{3}}$;

Lời giải trên là sai vì $\sqrt{3} + \sqrt{\frac{10}{3}} < 4$;

*Chú ý :như vậy cần phải hết sức chú ý GTNN hay GTLN của biểu thức đạt được tại các giá trị biến có thuộc miền đang xét hay không.

Lời giải đúng như sau:

$$\text{Ta viết lại } A = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{3x}{2} + \frac{6}{x} + \frac{5y}{2} + \frac{10}{y}$$

Khi đó ta được

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq 2; \frac{3x}{2} + \frac{6}{x} \geq 6; \frac{5y}{2} + \frac{10}{y} \geq 10;$$

Từ đó suy ra GTNN của A là 18 tại x=2, y=2;

Ở đây vì sao mà ta biết mà phân tích A như vậy

Thì câu trả lời là:

$$\text{Ta có } A = k(x+y) + (2-k)x + (3-k)y + \frac{6}{x} + \frac{10}{y}$$

Khi đó ta được $A \geq 4k + 2\sqrt{6(2-k)} + 2\sqrt{10(3-k)}$; $\forall x, y$ thuộc miền xác định;

$$\text{Dấu '=' xảy ra tại } x+y=4, x=\sqrt{\frac{6}{2-k}}, y=\sqrt{\frac{10}{3-k}}$$

$$\text{Giải ra ta được } k=\frac{1}{2};$$

Sau đây là một bài toán cũng cần phải có kỹ thuật tách như trên

$$3) \text{ Cho biểu thức } A = (1+x) \left(1 + \frac{1}{y} \right) + (1+y) \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

Với $x, y > 0$ và $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTNN của biểu thức A.

Bài này dành cho bạn đọc. Hd làm tương tự ☺

$$4) \text{ Cho } x, y, z \geq 0 \text{ và } x+y+z=1; (1)$$

$$\text{Tìm GTLN của } f(x, y, z) = \sqrt{2-x} + \sqrt{2-y} + \sqrt{2-z};$$

Lời giải:

Ta nhận thấy đây là BĐT dạng đối xứng do đó ta thấy nếu cho x=y=z thay

vào (1) ta được $x=y=z=\frac{1}{3}$ và $2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$; vì vậy ta áp dụng BĐT côsi cho 2 số 2-x

và $\frac{5}{3}$ ta có

$$2\sqrt{\frac{5}{3}(2-x)} \leq \frac{5}{3} + 2-x$$

Tương tự với y,z

$$2\sqrt{\frac{5}{3}(2-y)} \leq \frac{5}{3} + 2-y$$

$$2\sqrt{\frac{5}{3}(2-z)} \leq \frac{5}{3} + 2-z$$

Cộng theo vế 3 BĐT trên ta được $\text{Maxf}(x,y,z)=\sqrt{15}$ tại $x=y=z=\frac{1}{3}$;

Còn bài toán tổng quát này thì sao?

Cho

$$x_1, x_2, \dots, x_n > 0, x_1 + \dots + x_n = 1$$

$$CMR \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} + \dots + \sqrt{1-z} \leq \sqrt{n(n-1)} \quad \text{☺}$$

5) Cho $x, y, z \geq 0$ và $x^{2009} + y^{2009} + z^{2009} = 3$. Tìm GTLN của $A = x^9 + y^9 + z^9$;

Sau đây là sự phân tích còn lời giải cụ thể xin dành cho bạn đọc:

Đây là BĐT đối xứng cho nên ta nhận thấy nếu cho $x=y=z$ thay vào điều kiện ta được $x=y=z=1$

Áp dụng BĐT côsi cho m số x^9 và n số 1 ta được

$$m x^9 + n 1 \geq (m+n)^{\frac{m}{m+n}} \sqrt[m+n]{x^{2009m}} = (m+n) x^9 \quad (1); \text{ (trong đó m,n là số tự nhiên)}$$

Như vậy ta có $2009m = 9(m+n) \Leftrightarrow 2000m = 9n$.

Vì thế ta chọn được $m=9$ và $n=2000$;

$$\text{Từ (1) ta có } 9x^{2009} + 3 \times 2000 \geq 2009x^9$$

Tương tự ta có

$$9y^{2009} + 2000 \times 1 \geq 2009y^9$$

$$9z^{2009} + 2000 \times 1 \geq 2009z^9$$

$$\text{Mặt khác } 2009A = 2009x^9 + 2009y^9 + 2009z^9$$

$$\leq 9(x^{2009} + y^{2009} + z^{2009}) + 3 \times 2000$$

$$= 3 \times 2009$$

Suy ra $\text{Max}A=3$ khi $x=y=z=1$.

Nhận xét trong chứng minh trên sự phân tích x không phụ thuộc vào y,z (tương tự với y,z) nên có thể khái quát bài toán.

Bạn đọc thử tìm bài toán tổng quát xem có gì thú vị không. ☺

6) Cho $x, y > 0$ và $x^3 + y^3 = 1$

Tìm GTLN của $P = \sqrt{x} + 3\sqrt{y}$

Ta phân tích như sau

Áp dụng BĐT côsi cho x^3 và m số k ta có

$$x^3 + mk \geq (m+1)k^{\frac{m}{m+1}} \sqrt[m+1]{x^3} = (m+1)k^{\frac{m}{m+1}} \sqrt{x}$$

Vì thế ta có $m+1=6$ hay $m=5$;

Như vậy ta có

$$x^3 + 5k \geq 6k^{\frac{5}{6}} \sqrt{x} \quad (1)$$

Tương tự cho y^3 và 5 số l ta được

$$y^3 + 5l \geq 6l^{\frac{5}{6}} \sqrt{y} \quad (2)$$

Trong đó $l^{\frac{5}{6}} : k^{\frac{5}{6}} = 3 : 1 \Leftrightarrow l^{\frac{5}{6}} = 3k^{\frac{5}{6}} \quad (3)$;

Và để dấu đẳng thức (1) và (2) xảy ra thì

$k = x^3; l = y^3$; khi đó $k+l=1$;

$$\text{nếu vậy } k = \frac{1}{1+3\sqrt[5]{3}}; l = \frac{3\sqrt[5]{3}}{1+3\sqrt[5]{3}};$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được

$$x^3 + y^3 + 5k + 5l \geq 6k^{\frac{5}{6}} \sqrt{x} + 6l^{\frac{5}{6}} \sqrt{y} = 6k^{\frac{5}{6}} (\sqrt{x} + 3\sqrt{y}); (l^{\frac{5}{6}} = 3k^{\frac{5}{6}})$$

$$\text{Như vậy ta có } A \leq \frac{1+5(k+l)}{6k^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{k^{\frac{5}{6}}} = (1+3\sqrt[5]{3})^{\frac{5}{6}}$$

Vậy $\text{Max} A = (1+3\sqrt[5]{3})^{\frac{5}{6}}$ khi $x = \sqrt[3]{k}; y = \sqrt[3]{l}$;

Đây thuộc loại bài tập không đối xứng nên việc tìm dấu đẳng thức bao giờ cũng khó hơn rất nhiều vì vậy phải phân tích như trên để tìm dấu đẳng thức.

7) Với $a, b, c > 0$ và $a+b+c=3$;

Tìm GTLN của biểu thức $A = 6ab + 7bc + 11ca$

Lời giải:

Đối với các dạng này ta nên có sự phân tích như sau

$$A = pa(b+c) + qb(c+a) + rc(a+b) = (p+q)ab + (q+r)bc + (r+p)ca$$

Vì vậy ta chọn p, q, r sao cho

$$p+q=6; q+r=7; r+p=11;$$

giải ra ta được $p=5; q=1; r=6$

Vì $a+b+c=3$ nên ta có $A=5a(3-a)+b(3-b)+6c(3-c)$

$$=27-\left[5\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+6\left(c-\frac{3}{2}\right)^2\right]$$

$$\text{Xét } B=5x^2+y^2+6z^2; \text{ với } x=\left|a-\frac{3}{2}\right|; y=\left|b-\frac{3}{2}\right|; z=\left|c-\frac{3}{2}\right|$$

$$\text{Khi đó ta có } x+y+z \geq \left|a+b+c-\frac{9}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

Ta có :

$$x^2+\alpha^2 \geq 2x\alpha; y^2+\beta^2 \geq 2y\beta; z^2+\gamma^2 \geq 2z\gamma,$$

$$\text{Nhu vậy ta có: } B+5\alpha^2+\beta^2+6\gamma^2 \geq 2(5x\alpha+y\beta+6z\gamma)$$

$$\text{Ta chọn } \alpha = \frac{1}{5}\beta = \frac{6}{5}\gamma,$$

$$\text{Khi đó } B+5\alpha^2+\beta^2+6\gamma^2 \geq 10\alpha(x+y+z) \geq 15\alpha$$

$$\text{Vậy thì } A \leq 27-(15\alpha-5\alpha^2-\beta^2-6\gamma^2)$$

$$\text{Dấu '=' xảy ra khi } x+y+z=\alpha+\beta+\gamma=\alpha+5\alpha+\frac{5}{6}\alpha=\frac{3}{2}$$

$$\text{Hay } x=\alpha=\frac{9}{41}; y=\beta=\frac{45}{41}; z=\gamma=\frac{15}{82}$$

$$\text{Vậy } \text{Max} A = \frac{2079}{82};$$

Chú ý: khi gặp dạng toán : $x+y+z=a$ và $x,y,z>0$

Tìm GTLN của $A=mxy+nyz+pzx$ với $m,n,p>0$;

Thì các bạn hãy nghĩ tới việc phân tích như của chúng tôi ở trên.

* **Sau đây là một bài toán tương tự dành cho bạn đọc

Cho các số $x,y,z,t \geq 0$ và $x+y+z+t=1$. Tìm GTLN của biểu thức

$$A=17xy+18xz+19xt+19yz+20yt+21zt;$$

$$9) \text{ Cho } x,y,z>0 \text{ và } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1. \text{ Tìm GTLN của biểu thức sau:}$$

$$P = \frac{1}{3x+2y+z} + \frac{1}{3y+2z+x} + \frac{1}{3z+2x+y};$$

Lời giải:

Ta sẽ tìm cách đưa biểu thức $P \leq M \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = M$

Muốn vậy ta tìm cách đưa tổng ở dưới mẫu trở thành mẫu chỉ còn lại là x hoặc y hoặc z. Từ đó ta có thể áp dụng BĐT (1.0) ở trên. Vì vậy ta phải có sự phân tích như sau:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+2y+z} &= \frac{1}{x+x+x+y+y+z} \\ &\leq \frac{1}{36} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{36} \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3y+2z+x} &\leq \frac{1}{36} \left(\frac{3}{y} + \frac{2}{z} + \frac{1}{x} \right) \\ \frac{1}{3z+2x+y} &\leq \frac{1}{36} \left(\frac{3}{z} + \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \right) \end{aligned}$$

Cộng các BĐT lại ta được: $P \leq \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{6}$

Vậy $\text{Max} P = \frac{1}{6}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$;

Từ kết quả trên ta có thể đưa ra được kết quả sau:

10) Cho $x, y, z > 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{mx+ny+pz} + \frac{1}{my+nz+px} + \frac{1}{mz+nx+py} \leq \frac{1}{m+n+p}$$

11) (Đề thi đại học khối A năm 2007)

Cho $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Tìm GTNN của P

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Lời giải :

Theo BĐT côsi ta được

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{2x^2\sqrt{yz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y^2\sqrt{zx}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z^2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \\ &= \frac{2x\sqrt{x}\sqrt{xyz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}\sqrt{yzx}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}\sqrt{zxy}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \\ &= \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \quad (\text{do } xyz=1) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z} \\ b = z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x} \\ c = x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{x} = \frac{1}{9}(-2a + 4b + c) \\ y\sqrt{y} = \frac{1}{9}(-2b + 4c + a) \\ z\sqrt{z} = \frac{1}{9}(-2c + 4a + b) \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{2}{9} \left(\frac{-2a + 4b + c}{a} + \frac{-2b + 4c + a}{b} + \frac{-2c + 4a + b}{c} \right) \\ &= \frac{2}{9} \left[\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \right) + 4 \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right) - 6 \right] \end{aligned}$$

Mặt khác theo BĐT côsi ta có:

$$\frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq 3 \quad \text{và} \quad \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

Do đó $P \geq 2$

$\Rightarrow \min P = 2$ khi $x=y=z=1$. Chứng minh này dành cho bạn đọc.

Nhận xét: Thông thường khi chúng ta gặp các BĐT có chứa căn bậc hoặc phép toán cộng, hoặc biểu thức ở dưới mẫu số phức tạp thường gây nhiều khó khăn. Khi đó ta có thể nghĩ đến các hướng sau đây:

- + Đặt ẩn phụ để biểu thức dưới mẫu trở nên đơn giản hơn.
 - + Sử dụng các BĐT để đưa mẫu số trở nên đơn giản.
 - + Tìm cách đưa tử số có thừa số giống như ở mẫu để rút gọn.
- Bài giải trên kết hợp rất tốt các phương pháp trên.

Chương 3 Tách ghép bộ số trong chứng minh bất thức đẳng.

12) Với $a, b, c > 0$: chứng minh rằng:

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq ab^2 + bc^2 + ca^2$$

Nhận xét: Thật là khó để biết được cần bao nhiêu số $\frac{a^5}{b^2}, \frac{b^5}{c^2}, \frac{c^5}{a^2}$ ☺

Áp dụng BĐT Côsi cho m số $\frac{a^5}{b^2}$, n số $\frac{b^5}{c^2}$, p số $\frac{c^5}{a^2}$ (trong đó m, n, p là các số tự nhiên) ta được:

$$m \frac{a^5}{b^2} + n \frac{b^5}{c^2} + p \frac{c^5}{a^2} \geq (m+n+p)^{\frac{m+n+p}{5m-2p}} \sqrt[5m-2p]{a^{5m-2p} b^{5n-2m} c^{5p-2n}} = (m+n+p) ab^2$$

Vì vậy

$$5m-2p=m+n+p; 5n-2m=2(m+n+p); 5p-2n=0;$$

Ta chọn p=8, n=20 và m=11 do đó (*) trở thành

$$11 \frac{a^5}{b^2} + 20 \frac{b^5}{c^2} + 8 \frac{c^5}{a^2} \geq 39ab^2; (1) \text{ Tương tự ta có:}$$

$$8 \frac{a^5}{b^2} + 11 \frac{b^5}{c^2} + 20 \frac{c^5}{a^2} \geq 39bc^2 \quad (2)$$

$$20 \frac{a^5}{b^2} + 8 \frac{b^5}{c^2} + 11 \frac{c^5}{a^2} \geq 39ca^2 \quad (3);$$

Cộng (1) (2) và (3) ta được đpcm dấu '=' xảy ra tại $a=b=c$;

Đối với các BĐT không đối xứng thì phức tạp hơn rất nhiều vì dấu đẳng thức không còn xảy ra tại $x=y=z$ chẳng hạn.

Chú ý là BĐT đối xứng là vai trò của x,y,z là như nhau trong BĐT trên cả miền đang xét.

Bạn đọc thử cho bài toán tương tự và giải thử ☺

13) Cho $x, y, z \geq 0$ và $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z. \quad [1]$$

Nhận xét:

Đây là dạng BĐT đối xứng do đó nếu ta cho $x=y=z$ thay vào điều kiện ban đầu thì ta được $x=y=z=1$.

Và xuất phát từ $\sqrt[3]{x^3}=x$ do đó ta phải áp dụng BĐT côsi cho 3 số là x^3 và

a, a. Nhưng vì để dấu “=” xảy ra được thì $a=x^3=1$.

Lời giải:

Như vậy ta áp dụng BĐT côsi cho 3 số là $x^3, 1, 1$ ta được

$$x^3 + 1 + 1 \geq 3x$$

Tương tự ta cũng có được :

$$y^3 + 1 + 1 \geq 3y$$

$$z^3 + 1 + 1 \geq 3z$$

Cộng các BĐT theo vế ta được: $x^3 + y^3 + z^3 + 6 \geq 3(x + y + z)$

Mặt khác thì $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ hay $2(x+y+z) \geq 6$

Do đó: $x^3 + y^3 + z^3 + 2(x + y + z) \geq x^3 + y^3 + z^3 + 6 \geq 3(x + y + z)$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z \text{ (đpcm)}$$

Từ bài toán trên ta có thể đưa ra một kết quả tổng quát sau:

14) Cho bộ số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_k$ có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$a_1^m + a_2^m + \dots + a_k^m \geq a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n \text{ với } \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n.$$

15) Cho $a, b \geq 0$ và $a^2 + b^2 = 5$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^6 \geq 9 \quad (*) \quad [1]$$

Hướng dẫn chi tiết:

Dễ dàng nhận thấy dấu “=” xảy ra tại $a=2, b=1$

Ta cần làm như thế nào để VT(*) $\geq k(a^2 + b^2) + h = 5k + h = 9$

Dấu “=” xảy ra tại $a=2$ suy ra $a^3 = 8$.

Như vậy ta cần áp dụng BĐT côsi cho m số a^3 và n số 8 ta được:

$$ma^3 + n8 \geq (m+n)\sqrt[m+n]{a^{3m}8^n} = ka^2 \quad (1)$$

Tương tự ta áp dụng cho p số b^6 và q số 1 ta được:

$$pb^6 + q1 \geq (p+q)^{(p+q)} \sqrt[p]{b^{6p}} = kb^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} 3m = 2(m+n) \\ 6p = 2(p+q) \\ (m+n)8^{\frac{n}{m+n}} = p+q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2n \\ q = 2p \\ 3n8^{\frac{1}{3}} = 3p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2n \\ q = 2p \\ p = 2n \end{cases}$$

Khi đó ta chọn $n=1$ thì $m=2, p=2, q=4$

$$\text{Khi đó (1) trở thành } 2a^3 + 8 \geq 6\sqrt[3]{a^6 8} = 6a^2 \quad (3)$$

$$(2) \text{ trở thành } 2b^6 + 4 \geq 6\sqrt[6]{b^{12}} = 6b^2 \quad (4)$$

Cộng (3) và (4) theo vế ta được:

$$2(a^3 + b^6) + 12 \geq 6(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^3 + b^6 \geq 9$$

Dấu “=” xảy ra tại $a=2$ và $b=1$.

Chú ý: cách giải của chúng tôi là giúp cho các bạn hiểu rõ tại sao mà trong sách viết tác giả lại đưa ra những sự tách ghép mà chúng ta không biết ở đâu mà ra. Chúng tôi mong rằng các bạn sẽ nhuần nhuyễn về cách làm này thì các bạn sẽ giải quyết được rất nhiều bài tập.

Các bạn xem thêm cách giải trong tài liệu [1].

Sau đây là một bài tập dành cho bạn đọc :

17) Cho $x, y \geq 0$ và $x^2 + 3y^3 = 7$. Chứng minh rằng:

$$x^5 + 5y^{11} \geq 37.$$

18) Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=1$

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{3}{4};$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có VT} &= \frac{a+1-1}{a+1} + \frac{b+1-1}{b+1} + \frac{c+1-1}{c+1} = 3 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) \\ &\leq 3 - \frac{9}{a+b+c+3} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$;

Nhận xét: bài toán trên chỉ là một trường hợp đặc biệt của bài toán sau

19) Cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ và có $\sum_{i=1}^n a_i = 1$;

Chứng minh rằng $\frac{a_1}{a_1 + 1} + \frac{a_2}{a_2 + 1} + \dots + \frac{a_n}{a_n + 1} \leq \frac{n}{n + 1}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$;

Chứng minh dành cho bạn đọc.

20) Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{y}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{z}\right)^4 \geq 768.$$

Nhận xét: đây là BĐT dạng đối xứng do đó nếu cho $x = y = z$ thay vào điều kiện ban đầu ta được $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Từ BĐT ban đầu ta có thể viết lại như sau:

$$\text{Mà ta có } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$$

Như vậy ta cần phải đưa BĐT cần chứng minh có

VT lớn hơn hoặc bằng một biểu thức có xuất hiện các đại lượng như

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Ta có $x = \frac{1}{3}$ nên $\frac{1}{x} = 3$ vì vậy ta mới có sự phân tích như sau nhằm áp dụng

được BĐT côsi

$$\left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x}\right)^4 \geq 4^4 \frac{1}{3^3 x^3}$$

$$\text{Ta có : } 4^4 \frac{1}{3^3 x^3} = 256$$

Vì vậy ta phải áp dụng được BĐT côsi cho $256 \frac{1}{3^3 x^3}, 256, 256$ ta được

$$256 \frac{1}{3^3 x^3} + 256 + 256 \geq \frac{256}{x}$$

Khi đó ta được $256+256+\left(1+\frac{1}{x}\right)^4 \geq \frac{256}{x}$

Tương tự ta cũng có :

$$256+256+\left(1+\frac{1}{y}\right)^4 \geq \frac{256}{y}$$

$$256+256+\left(1+\frac{1}{z}\right)^4 \geq \frac{256}{z}$$

Cộng các BĐT lại theo vế ta được:

$$256 \times 6 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^4 + \left(1+\frac{1}{y}\right)^4 + \left(1+\frac{1}{z}\right)^4 \geq 256 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 256 \times 9$$

$$\text{Nhu vậy ta có } \left(1+\frac{1}{x}\right)^4 + \left(1+\frac{1}{y}\right)^4 + \left(1+\frac{1}{z}\right)^4 \geq 768$$

Dấu “=” xảy ra tại $x=y=z=\frac{1}{3}$;

Chú ý rằng đây chỉ là sự hướng dẫn cho các bạn còn trong lời giải thì các bạn không phải phân tích như thế này.

Bài này còn có một cách giải khá hay và được trình bày như sau:

$$\text{Đặt } a = \left(1+\frac{1}{x}\right), b = \left(1+\frac{1}{y}\right), c = \left(1+\frac{1}{z}\right)$$

$$\text{Khi đó } a+b+c \geq 12 \text{ do } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} = 9$$

Vì vậy BĐT cần chứng minh tương đương với

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 768$$

Ta có :

$$a^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 \geq 4^4 a$$

$$b^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 \geq 4^4 b$$

$$c^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 \geq 4^4 c$$

Cộng các BĐT lại theo vế ta được:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 4^4 (a + b + c) - 4^4 \times 9 \geq 4^4 \times 12 - 4^4 \times 9 = 768$$

Ta thấy làm cách này thì thấy gọn hơn nhưng 2 cách làm thì bản chất như nhau.

Chú ý: vì sao ở lời giải này ta phải áp dụng BĐT côsi cho a^4 và 3 số 4^4 mà không phải là các số khác và cũng không phải là 2 số, 4 số mà lại là 3 số 4^4 ? Thì câu trả lời dành cho bạn đọc vì chúng tôi đã hướng dẫn rất nhiều về vấn đề này.

Đây chỉ là một trường hợp đặc biệt của bài toán sau:

21) Cho $a, b, x_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ và có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\left(a + \frac{b}{x_1}\right)^m + \left(a + \frac{b}{x_2}\right)^m + \dots + \left(a + \frac{b}{x_n}\right)^m \geq a(a + nb)^m \text{ với } m > 0$$

Chúng tôi hy vọng sau mỗi bài các bạn có thể tổng quát lên được dạng của nó từ đó bạn đọc mới có thể nắm vững được cách giải khi gặp dạng bài tương tự ví dụ:

22) Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{5c}{a+b} \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}) - 11$$

23) Cho $a, b \geq 0$ và $a+b=1$

$$\text{Chứng minh rằng: } a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} \quad ; \quad a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$$

Lời giải:

Nhận thấy đây là BĐT dạng đối xứng vì vậy nếu ta cho $a=b$ thay vào điều kiện ta

$$\text{được } a=b=\frac{1}{2}, \text{ như vậy thì ta có } a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq a \text{ và } b^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq b$$

$$\text{Vì vậy } a^2 + b^2 \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ dấu "}" xảy ra tại } a=b=\frac{1}{2};$$

$$\text{Đối với } a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8} \text{ thì cũng tương tự như trên.}$$

Ta có nhận xét sau: bài toán trên là một trường hợp đặc biệt của bài toán sau:

$$24) \text{ Chứng minh rằng } a^{2^n} + b^{2^n} \geq \frac{1}{2^{2^n-1}} \text{ với } a, b \geq 0 \text{ và } a+b=1;$$

Chứng minh dành cho bạn đọc.

Nhận thấy 2 bài toán trên chỉ nói đến số mũ chẵn và có tổng bằng 1. Nếu áp dụng cho mũ lẻ thì sao và có tổng là một số dương bất kì thì BĐT có còn đúng không? Sau đây ta sẽ giải quyết vấn đề trên

$$\text{Cho } a+b=k \geq 0 \text{ và } a, b \geq 0. \text{ Chứng minh rằng } a^n + b^n \geq \frac{k^n}{2^{n-1}}$$

Lời giải:

Ta nhận thấy rằng đây là BĐT dạng đối xứng nên nếu ta cho $a=b$ và thay vào

$$\text{điều kiện ban đầu thì ta được } a=b=\frac{k}{2} \Rightarrow a^n = b^n = \left(\frac{k}{2}\right)^n$$

Như vậy ta cần áp dụng BĐT côsi cho a^n và p số $\left(\frac{k}{2}\right)^n$ sao cho

$$a^n + p \left(\frac{k}{2}\right)^n \geq (p+1) \sqrt[p+1]{a^n \left(\frac{k}{2}\right)^{pn}} = (p+1) a^{(p+1)} \sqrt[p+1]{\left(\frac{k}{2}\right)^{pn}}$$

Như vậy $p=n-1$ khi đó

$$a^n + (n-1) \left(\frac{k}{2}\right)^n \geq na \left(\frac{k}{2}\right)^{n-1}$$

$$b^n + (n-1) \left(\frac{k}{2}\right)^n \geq nb \left(\frac{k}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{Cộng 2 BĐT theo vế ta được } a^n + b^n + 2(n-1) \left(\frac{k}{2}\right)^n \geq 2n \left(\frac{k}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a^n + b^n \geq \frac{k^n}{2^{n-1}} \text{ dấu bằng xảy ra tại } a=b=\frac{k}{2};$$

Trong trường hợp nếu có $a_1, a_2, \dots, a_m \geq 0, a_1 + a_2 + \dots + a_m = k$

Thì BĐT $a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n \geq \frac{k^n}{2^{n-1}}$ còn đúng không ?

Câu trả lời dành cho bạn đọc ☺.

25) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} \quad [2]$$

Lời giải:

Nhận thấy đây là BĐT dạng đối xứng vì thế nếu cho $a=b=c$ thì

$$\frac{a^2}{b+c} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2} \text{ để triệt tiêu được dưới mẫu số thì phải có } b+c$$

Nhưng $b+c=2a$, vì vậy mà ta phải chia $b+c$ cho 4 để $\frac{b+c}{4} = \frac{a}{2} = \frac{a^2}{b+c}$

Khi đó áp dụng BĐT côsi cho 2 số $\frac{a^2}{b+c}$ và $\frac{b+c}{4}$ ta được

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq a$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq b$$

$$\frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq c$$

Cộng các BĐT lại ta được điều cần chứng minh ,dấu “=” xảy ra tại $a=b=c$.

Chú ý: cũng như sự phân tích của ta ở trên vì sao mà ta phải cần

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \text{? Mà không sử dụng các số khác chẳng hạn như } b+c \text{ hay } \frac{b+c}{2}$$

....? Vì dấu đẳng thức khi áp dụng BĐT côsi không thể xảy ra. (Bài này chúng tôi lấy từ tài liệu [2] bài 233, trong sách tác giả có cách chứng minh khá hay).

Từ đó mà ta phải hết sức chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra tại đại lượng bao nhiêu rồi mới đi áp dụng BĐT côsi. Thông thường thì các BĐT dạng đối xứng thì dấu “=” xảy ra dễ dàng xác định tại $a=b=c$ chẳng hạn.

******Sau đây là một số bài tập về kỹ thuật tách ghép mong các bạn làm tốt.

27) cho $a, b, c > 0$ và $abc=1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{a^5}{(b+2)(c+2)} + \frac{b^5}{(c+2)(a+2)} + \frac{c^5}{(a+2)(b+2)}$$

Sau đó bạn đọc có suy nghĩ gì về GTNN của biểu thức sau

$$Q = \frac{a^n}{(b+m)(c+m)} + \frac{b^n}{(c+m)(a+m)} + \frac{c^m}{(a+m)(b+m)};$$

28) Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng $(1+x)(1+\frac{y}{x})(1+\frac{9}{\sqrt{y}}) \geq 256$.

29) Cho $x, y, z, t \geq 0$ và $x+y+z+t=1$. Chứng minh rằng:

$$(x+y)(y+z)(z+t)(t+x)xyzt \leq \frac{1}{4^6}$$

Chúng minh:

Ta có :

$$1=x+y+z+t \geq 4\sqrt[4]{xyzt} \Rightarrow xyzt \leq \frac{1}{4^4} \quad (1)$$

Tương tự:

$$2=(x+y)+(y+z)+(z+t)+(t+x) \geq 4\sqrt{(x+y)(y+z)(z+t)(t+x)}$$

$$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+t)(t+x) \leq \frac{1}{4^2} \quad (2)$$

Nhân vế theo vế của (1) và (2) ta được:

$$(x+y)(y+z)(z+t)(t+x)xyzt \leq \frac{1}{4^6}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=t=\frac{1}{4}$;

Đây chỉ là một trường hợp riêng của bài toán tổng quát sau:

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Chứng minh rằng:

$$(a_1 + a_2) \dots (a_n + a_1) a_1 a_2 \dots a_n \leq \frac{2^n}{n^{2^n}}.$$

Bài toán này dành cho bạn đọc. ☺

30) Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa $x(x+y+z)=3yz$ ta có

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) \leq 5(y+z)^3 \quad (*);$$

Lời giải:

$$\text{Từ giả thiết ta có } 3yz=x(x+y+z) \geq 3x\sqrt[3]{xyz}$$

$$\text{Suy ra } x \leq \sqrt{yz} \text{ hay } x^2 \leq yz \leq \frac{1}{4}(y+z)^2 \text{ vậy thì } 2x \leq (y+z).$$

Vậy (*) sẽ tương đương với

$$x^3 + 3x^2(y+z) + 3x(y^2 + z^2 + yz) \leq 2(y+z)^3 \quad (**)$$

$$\text{VT(**)} \leq \frac{1}{8}(y+z)^3 + \frac{3}{2}yz(y+z) + \frac{3}{2}(y+z)[(y+z)^2 - yz]$$

$$= \frac{13}{8}(y+z)^3 + \frac{3}{2}yz(y+z) \leq 2(y+z)^3 \quad (\text{do } yz \leq \frac{1}{4}(y+z)^2)$$

Dấu “=” xảy ra tại $x=y=z$;

31) Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30. [2]$$

Ta có những suy luận như sau:

Ở dưới mẫu số của VT là biểu thức có bậc là 2, còn ở VP có bậc là 0 thì chúng ta phải nghĩ đến việc làm thế nào để đưa mẫu số VT về bậc 0.

Muốn vậy thì ta cần biến đổi đưa mẫu ở VT có chứa tích $k(a+b+c)^n$ (trong đó k là hằng số).

Đối với bài này ta nghĩ đến $n=2$, vì ta thấy có các thành phần ở trong khai triển sau:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

Theo các kết quả trên ta có:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}$$

Khi đó:

$$VT \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$\Leftrightarrow VT \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{7}{ab+bc+ca}$$

Vì sao mà ta lại phân tích như thế này?

Vì trong hằng đẳng thức $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

cần phải có 2 lần tích

$(ab+bc+ca)$, mặt khác để dấu “=” xảy ra khi $a=b=c$.

Ta có :

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)}$$

$$\frac{9}{(a+b+c)^2} = 9 \quad (1)$$

Mặt khác: $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 1$

Do đó:

$$\frac{7}{ab+bc+ca} = \frac{21}{3(ab+bc+ca)} \geq 21 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $VT \geq 30$ (đpcm)

Sau khi giải xong bài này thì ta có suy nghĩ nếu không phải là 3 số a,b,c mà là n số thì kết quả sẽ ra sao?

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} + \frac{1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{1}{a_n a_1} \geq 3n^2 + 3$$

Chứng minh này tương tự bạn đọc tự nghiên cứu.

Trong phần cuối này chúng tôi xin giới thiệu với các bạn một số bài toán BĐT mà chúng tôi biên soạn được cảm nhận là khá hay. Các bạn hãy thử giải và khái quát bài toán ☺

1) Chứng minh bất đẳng thức sau

$$^{2000}\sqrt{2000} + ^{1999}\sqrt{1999} + ^{1998}\sqrt{1998} < ^{1997}\sqrt{1994 + \frac{6}{\sqrt{2000}}} + ^{1997}\sqrt{1995 + \frac{4}{\sqrt{1999}}} + ^{1997}\sqrt{1996 + \frac{2}{\sqrt{1998}}}$$

Hd trước hết bạn hãy giải bài tổng quát sau

cho $0 \leq k \leq n$ với n nguyên dương, k nguyên. CMR

$$n + k\sqrt{n+k} \leq n\sqrt{n-k} + \frac{2k}{\sqrt{n+k}} \quad [2]$$

2) Tìm phần nguyên của số

$$S_n = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$$

$$\text{Đs } [S_n] = n. \quad [2]$$

3) Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $a_1 + \dots + a_n = 1$. CMR

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n \quad [2]$$

4) Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương có tích bằng 1. Tìm hằng số thực $k=k(n)$ nhỏ nhất sao cho BĐT sau luôn đúng.

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \frac{n}{2^k} \quad . ! \odot [1]$$

Tài liệu tham khảo:

1) SÁNG TẠO BẤT ĐẲNG THỨC - PHẠM KIM HÙNG - NHÀ XUẤT BẢN
HÀ NỘI [1]

2) 10000 BÀI TOÁN SỐ CẤP – PHAN HUY KHẢI - HÀ NỘI 1998 [2]

3) Trần Phương, Nguyễn Đức Tấn – Sai lầm thường gặp và các sáng tạo khi giải
toán. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2008. [3]

— | —