|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI**    ***(Đề thi gồm 01 trang)*** | **ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT**  **TRƯỜNG SƯ PHẠM**  **NĂM HỌC 2021 – 2022.**  **MÔN THI: TOÁN (Toán chung)**  ***Ngày thi: 17/06/2021.***  *(Thời gian 150 phút, không kể thời gian giao đề)* |

ĐỀ BÀI

1. (2,5 điểm)

Cho 

a) Tìm một đa thức bậc hai  với hệ số nguyên sao cho  là nghiệm của 

b) Cho đa thức: . Tính giá trị của 

1. (3,0 điểm)

Cho là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm , bán kính . Giả sử  là điểm cố định trên tia đối của tia . Một cát tuyến thay đổi qua cắt đường tròn  tại  và  ( nằm giữa ). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  và cắt nhau tại giao điểm thứ hai . Biết rằng bốn điểm  tạo thành tứ giác .

Chứng minh rằng:

a) Tứ giác  nội tiếp.

b) .

c) luôn di chuyển trên một đường tròn cố định.

1. (2,0 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương  sao cho có thể biểu diễn một cách duy nhất ở dạng  với  là hai số nguyên dương.

1. (2,5 điểm)

Cho , ,  là ba số nguyên dương sao cho mỗi số trong ba số đó đều biểu diễn được dưới dạng lũy thừa của  với số mũ tự nhiên. Biết rằng phương trình bậc hai  (1) có cả hai nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm của phương trình (1) bằng nhau.

ĐÁP ÁN TOÁN CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI

1. (2,5 điểm)

Cho 

a) Tìm một đa thức bậc hai  với hệ số nguyên sao cho  là nghiệm của 

b) Cho đa thức: . Tính giá trị của 

Lời giải

a).Tìm một đa thức bậc hai  với hệ số nguyên sao cho  là nghiệm của 

***Cách 1:***

Có .

Phương trình  có hệ số nguyên và có 2 nghiệm , .

Vậy  thỏa yêu cầu bài.

***Cách 2:***

Có , đặt 

Ta có 

Phương trình có hệ số nguyên nhận ,  làm nghiệm là 

Vậy  thỏa yêu cầu bài.

b)





.

 (Do  là nghiệm của phương trình: ).

Mà  nên

.

Vậy .

1. (3,0 điểm)

Cho là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm , bán kính . Giả sử  là điểm cố định trên tia đối của tia . Một cát tuyến thay đổi qua cắt đường tròn  tại  và  ( nằm giữa ). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  và cắt nhau tại giao điểm thứ hai . Biết rằng bốn điểm  tạo thành tứ giác .

Chứng minh rằng:

a) Tứ giác  nội tiếp.

b) .

c) luôn di chuyển trên một đường tròn cố định.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp.







suy ra  hay tứ giác  nội tiếp.

b) Chứng minh .

**Cách 1.**

Kẻ là tiếp tuyến của , suy ra  (1)

Mặt khác: (g.g)

 (2)

Từ (1) và (2) ta có .

**Cách 2.**

Gọi  là trung điểm .

Có 



c) Chứng minh luôn di chuyển trên một đường tròn cố định.

 hay luôn di chuyển trên đường tròn đường kính  cố định.

1. (2,0 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương  sao cho có thể biểu diễn một cách duy nhất ở dạng  với  là hai số nguyên dương.

Lời giải



Với  dễ thấy có vô số cách biểu diễn  theo 

là các bộ số dạng 

Với 

Nếu 

Nếu  thì 

suy ra trong hai số  có ít nhất một số lớn hơn 



Từ  ( loại)

Vậy với  thì ta có một biểu diễn duy nhất ở dạng 

Cách khác.

+)  có vô số bộ  có dạng thỏa mãn .

Suy ra  loại

+) 





+) 

 vô lý.

+) 







Với mọi  thì cặp  là duy nhất

1. (2,5 điểm)

Cho , ,  là ba số nguyên dương sao cho mỗi số trong ba số đó đều biểu diễn được dưới dạng lũy thừa của  với số mũ tự nhiên. Biết rằng phương trình bậc hai  (1) có cả hai nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm của phương trình (1) bằng nhau.

Lời giải

*Cách 1:*

Đặt 

Gọi  là nghiệm nguyên của phương trình 

Ta có  tương tự 

Theo hệ thức Vi-et: 

Từ  là các lũy thừa với số mũ tự nhiên của 2.

Đặt  không mất tính tổng quát giả sử .

Khi đó 

Vì  là số chẵn  là số chẵn

 (đpcm).

*Cách 2:*

Đặt .

Xét phương trình  có .

Để phương trình  có nghiệm nguyên thì  là số chính phương.



.

Nếu  thì  là số lẻ và khác  (vô lý).

Suy ra .

Do đó, phương trình  có hai nghiệm bằng nhau.