**TUYỂN TẬP CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG TOÁN 9**

**MỨC ĐỘ CƠ BẢN**

# CHUYÊN ĐỀ 4. ĐƯỜNG TRÒN

MỤC LỤC

[Chủ đề 4. Đường tròn 1](#_Toc46933424)

[Vấn đề 1. Sự xác định đường tròn 1](#_Toc46933425)

[Vấn đề 2. Sự xác định đường tròn tính chất đối xứng của đường tròn (phần ii) 4](#_Toc46933426)

[Vấn đề 3. Đường kính và dây của đường tròn 7](#_Toc46933427)

[Vấn đề 4. Đường kính và dây của đường tròn 10](#_Toc46933428)

[Vấn đề 5. Vị trí tương đối của đường thẳng 13](#_Toc46933429)

[Vấn đề 6. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn 17](#_Toc46933430)

[Vấn đề 7. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn 20](#_Toc46933431)

[Vấn đề 8. Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau (phần i) 22](#_Toc46933432)

[Vấn đề 9. Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau (phần i) 25](#_Toc46933433)

[Vấn đề 10. Luyện tập tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau 28](#_Toc46933434)

[Vấn đề 11. Vị trí tương đối của hai đường tròn 31](#_Toc46933435)

[Ôn tập chủ đề iv (phần i) 35](#_Toc46933436)

[Ôn tập chủ đề 4 (phần ii) 42](#_Toc46933437)

[Đáp án 44](#_Toc46933438)

**VẤN ĐỀ 1. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN**

**TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN I)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Đường tròn**

Tập hợp các điểm cách điểm  cố định một khoảng bằng  không đổi  là đường tròn tâm  có bán kính . Kí hiệu:  hoặc .

**2. Vị trí tương đối của điểm và đường tròn **

|  |  |
| --- | --- |
| Vị trí tương đối | Hệ thức |
| nằm trên đường tròn |  |
| nằm trong đường tròn |  |
| nằm ngoài đường tròn |  |

**3. Định lý (về sự xác định một đường tròn)**

**-** Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

- Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác đó.

**4. Tính chất đối xứng của đường tròn**

Đường tròn là hình có tâm đối xứng và trục đối xứng. Tâm đối xứng là tâm đường tròn, trục đối xứng là bất kì đường kính nào.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1. Chứng minh các điểm cho trước cùng nằm trên môt đường tròn.**

*Phương pháp giải:* Ta có các cách sau:

*Cách 1.* Chứng minh các điểm cho trước cùng cách đều một điểm nào đó.

*Cách 2.* Dùng định lí: “Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông”.

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 1.** Chứng minh các đinh lý sau:

1. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền của tam giác đó.
2. Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.

**Bài 2.** Cho tam giác  có các đường cao , . Chứng minh bốn điểm ,, , cùng nằm trên một đường tròn. Chỉ rõ tâm và bán kính của đường tròn đó.

**Bài 3.** Cho tam giác  có đường cao  và trực tâm . Gọi ,  lần lượt là trung điểm của , . Chứng minh:

1. Bốn điểm ,,, cùng thuộc một đường tròn.
2. Điểm  cũng thuộc đường tròn đi qua bốn điểm ,,,.

* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 4.** Cho tứ giác  có . Gọi ,,, lần lượt là trung điểm của ,,,. Chứng minh bốn điểm ,,, cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 5.** Cho bốn điểm ,,, cùng thuộc đường tròn  và điểm  là điểm nằm trong . Chứng minh các trung điểm của các đoạn thẳng ,,, cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 6.** Cho hình thoi. Đường trung trực của cạnh  cắt  tại  và cắt  tại . Chứng minh , lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác  và  .

**C. CÁC BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 7.** Cho tam giác  cân tại , đường cao ,. Đường vuông góc với  tại  cắt đường thẳng  ở .

1. Chứng minh các điểm , cùng thuộc đường tròn đường kính .
2. Tính độ dài đoạn thẳng .

**Bài 8.** Cho tam giác nhọn . Vẽ đường tròn  có đường kính , cắt các cạnh , theo thứ tự ,.

1. Chứng minh  và .
2. Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh .

**Bài 9.** Cho đường tròn  đường kính . Điểm  di động trên đường tròn,  là hính chiếu của  trên . Trên  lấy điểm  sao cho .

1. Hỏi điểm  chạy trên đường nào
2. Kéo dài  một đoạn . Hỏi điểm  chạy trên đường nào

**Bài 10.** Cho hình thoi  có cạnh  cố định. Gọi  là trung điểm của ,  là giao điểm của  và . Chứng minh  chạy trên một đường tròn khi , thay đổi.

**VẤN ĐỀ 2. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN II)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Đường tròn**

Tập hợp các điểm cách điểm  cố định một khoảng bằng  không đổi  là đường tròn tâm  có bán kính . Kí hiệu:  hoặc .

**2. Vị trí tương đối của điểm và đường tròn **

|  |  |
| --- | --- |
| Vị trí tương đối | Hệ thức |
| nằm trên đường tròn |  |
| nằm trong đường tròn |  |
| nằm ngoài đường tròn |  |

**3. Định lý (về sự xác định một đường tròn)**

**-** Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

- Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác đó.

**4. Tính chất đối xứng của đường tròn**

Đường tròn là hình có tâm đối xứng và trục đối xứng. Tâm đối xứng là tâm đường tròn, trục đối xứng là bất kì đường kính nào.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 2. Xác định vị trí tương đối của một điểm với một đường tròn.**

*Phương pháp giải*: Muốn xác định vị trí tương đối của điểm  đối với đường tròn  ta so sánh khoảng cách  với bán kính  theo bảng sau:

|  |  |
| --- | --- |
| Vị trí tương đối | Hệ thức |
| nằm trên đường tròn |  |
| nằm trong đường tròn |  |
| nằm ngoài đường tròn |  |

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 1.** Trên mặt phẳng tọa độ , hãy xác định vị trí tương đối của các điểm , , đối với đường tròn tâm  bán kính 2.

* *Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

**Bài 2.** Cho tam giác đều  cạnh bằng , các đường cao là ,. Gọi  là trung điểm cạnh .

1. Chứng minh bốn điểm ,,, cùng thuộc đường tròn tâm .
2. Gọi  là giao điểm của , . Chứng minh điểm  nằm trong còn điểm nằm ngoài đối với đường tròn đường kính .

**Dạng 3. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác và số đo các góc liên quan.**

*Phương pháp giải*:

* Sử dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông.
* Dùng định lý Pitago.
* Dùng hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông…
* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 3.** Cho tam giác  vuông ở  có ,. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**Bài 4.** Cho hình chữ nhật  có ,. Chứng minh bốn điểm ,,, cùng nằm trên một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

* *Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

**Bài 5.** Cho tam giác đều  cạnh bằng . Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**Bài 6.** Cho góc  và điểm  nằm trên tia sao cho .

1. Dựng đường tròn  đi qua  và  sao cho tâm  nằm trên tia .
2. Tính bán kính đường tròn .

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ.**

**Bài 7.** Cho đường tròn , đường kính . Vẽ cung tâm  bán kính , cung này cắt đường tròn ở  và .

1. Tứ giác  là hình gì Vì sao
2. Tính số đo các góc ,,.
3. Chứng minh tam giác  là tam giác đều.

**Bài 8.** Cho hình vuông . Gọi , lần lượt là trung điểm của ,. Gọi  là giao điểm  và .

1. Tính số đo góc .
2. Chứng minh ,,, cùng thuộc một đường tròn.
3. Xác định tâm của đường tròn đi qua ba điểm ,,.

**VẤN ĐỀ 3. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN**

**(PHẦN I)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. So sánh độ dài của đường kính và dây:** Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

**2.** **Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây**

**-** Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

**-** Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

**3.** **Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây**

**-** Trong một đường tròn:

**+** Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

**+** Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

* Trong hai dây của một đường tròn:

+ Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

+ Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1. Tính độ dài đoạn thẳng**

*Phương pháp giải*: Sử dụng các kiến thức sau đây:

1. Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
2. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.
3. Dùng định lý Pitago, hệ thức lượng trong tam giác vuông.

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 1.** Cho đường tròn tâm , hai dây  và  vuông góc với nhau ở . Biết ,, . Hãy tính:

1. Khoảng cách từ tâm  đến mỗi dây  và .
2. Bán kính của đường tròn .

**Bài 2.** Cho đường tròn  có hai dây , bằng nhau và vuông góc với nhau tại . Giả sử , . Tính khoảng cách từ tâm  đến mỗi dây.

* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 3.** Cho đường tròn tâm  bán kính  và hai dây  và . Biết ,. Tính khoảng cách từ  đến mỗi dây.

**Bài 4.** Cho đường tròn tâm  và dây . Từ  kẻ tia vuông góc với  tại , cắt  tại . Tính bán kính  của biết  và .

**Bài 5.** Cho đường tròn tâm , đường kính ; dây  cắt  tại . Biết ,  và . Hãy tính:

1. Khoảng cách từ  đến .
2. Bán kính đường tròn .

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ.**

**Bài 6.** Cho đường tròn . Dây  và  song song, có độ dài lần lượt là  và . Tính khoảng cách giữa hai dây.

**Bài 7.** Cho đường tròn  bán kính . Điểm  thuộc bán kính  và cách một khoảng là . Qua  kẻ dây  có độ dài . Tính độ dài các đoạn thẳng ,.

**Bài 8.** Cho đường tròn  đường kính , dây  có độ dài là  vuông góc với  tại .

1. Tính , .
2. Gọi , theo thứ tự là hình chiếu của  trên ,. Tính diện tích tứ giác .

**Bài 9.** Cho đường tròn , dây , dây,  và  nằm trong góc . Gọi là trung điểm của . Khoảng cách từ đến  bằng .

1. Chứng minh tam giác  cân.
2. Tính bán kính của đường tròn.

**VẤN ĐỀ 4. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN**

**(PHẦN II)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. So sánh độ dài của đường kính và dây:** Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

**2.** **Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây**

**-** Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

**-** Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

**3.** **Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây**

**-** Trong một đường tròn:

**+** Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

**+** Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

* Trong hai dây của một đường tròn:

+ Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

+ Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 2. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau**

*Phương pháp giải:* Sử dụng các kiến thức sau:

**-** Trong một đường tròn:

**+** Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

**+** Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

* Trong hai dây của một đường tròn:

+ Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

+ Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

* Dùng phương pháp chứng minh hai tam giác bằng nhau
* Dùng quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác, quan hệ cạnh huyền và cạnh góc vuông…
* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 1.** Cho nửa đường tròn , đường kính và một dây cung . Kẻ và vuông góc với  lần lượt tại và . Chứng minh .

**Bài 2.** Cho đường tròn , đường kính . Kẻ hai dây và  song song. Chứng minh .

* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 3.** Cho đường tròn , dây cung  và . Giao điểm  của các đường thẳng  và  nằm ngoài đường tròn. Vẽ đường tròn , đường tròn này cắt , lần lượt tại và . Chứng minh .

**Bài 4.** Cho tam giác  nhọn và các đường cao ,. Chứng minh:

1. ,,, cùng thuộc một đường tròn.
2. 

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 5.** Cho tam giác , trực tâm , nội tiếp đường tròn  đường kính .

1. Chứng minh  là hình bình hành.
2. Kẻ đường kính  vuông góc với  tại . Chứng minh ba điểm ,, thẳng hang.
3. Chứng minh .

**Bài 6.**  Cho đường tròn có  là đường kính. Vẽ hai dây  và  song song với nhau. Chứng minh:

1. 
2.  là đường kính của .

**Bài 7.** Cho nửa đường tròn tâm  đường kính  và dây . Gọi , theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ  và  đến . Chứng minh .

**Bài 8.** Cho tam giác  ( có hai đường cao  và  cắt nhau tai trực tâm .

1. Chứng minh bốn điểm ,,, cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm  của đường tròn này.
2. Chứng minh .
3. Gọi  là điểm đối xứng với  qua . Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.
4. Xác định tâm  của đường tròn đi qua các điểm ,,,.
5. Chứng minh  và  song song.

**Bài 9.** Cho tam giác  nhọn, nội tiếp đường tròn . Điểm thuộc cung  không chứa . Gọi , lần lượt đối xứng với qua ,. Tìm vị trí của để độ dài đoạn thẳng  lớn nhất.

**Bài 10.** Cho điểm  nằm trên đường tròn  có  là đường kính, . Vẽ dây  vuông góc với  tại . Chứng minh:

1. Tam giác  vuông tại .
2.  là trung điểm của ,  và  là tia phân giác của góc .
3. .

**VẤN ĐỀ 5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG**

**VÀ ĐƯỜNG TRÒN**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn**

Cho đường tròn  và một đường thẳng bất kì. Gọi  là khoảng cách từ tâm  của đường tròn đến đường thẳng đó. Ta có bảng vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn* | *Số điểm chung* | *Hệ thức giữa  và* |
| Đường thẳng và đường tròn cắt nhau | 2 |  |
| Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau | 1 |  |
| Đường thẳng và đường tròn không giao nhau | 0 |  |

**2. Định lý**

Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1. Cho biết ,  xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn hoặc ngược lại**

*Phương pháp giải:* So sánh  và  dựa vào bảng vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn đã nêu trong phần Tóm tắt lý thuyết.

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 1.** Điền vào các chỗ trống (…) trong bảng sau (là bán kính của đường tròn,  là khoảng cách từ tâm đến đường thẳng):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | *Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn* |
|  |  | …………………. |
|  | …………… | Tiếp xúc nhau |
|  |  |  |

**Bài 2.** Trên mặt phẳng tọa độ , cho điểm . Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn  và các trục tọa độ.

**Bài 3.** Cho ,  là hai đường thẳng song song và cách nhau một khoảng . Lấy  trên  và vẽ đường tròn . Chứng minh đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng b.

* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 4.** Trên mặt phẳng tọa độ , cho điểm . Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn  và các trục tọa độ.

**Bài 5.** Cho ,  là hai đường thẳng song song và cách nhau một khoảng . Lấy điểm  trên  và vẽ đường tròn . Chứng minh đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng b.

**Dạng 2. Xác định vị trí tâm đường tròn có bán kính cho trước và tiếp xúc với một đường thẳng cho trước**

*Phương pháp giải:* Xác định xem tâm đường tròn cách đường thẳng cho trước một khoảng là bao nhiêu rồi sử dụng tính chất điểm cách đều một đường thẳng cho trước một khoảng cho trước.

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 6.** Cho đường thẳng . Tâm của các đường tròn có bán kính bằng  và tiếp xúc với đường thẳng  nằm trên đường nào

* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 7.** Cho hai đường thẳng  và  song song với nhau, cách nhau một khoảng là . Một đường tròn  tiếp xúc với  và . Hỏi tâm  di động trên đường nào?

**Dạng 3. Bài liên quan đến tính độ dài**

*Phương pháp giải:* Nối tâm với tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp tuyến và định lý Pitago.

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 8.** Cho đường tròn tâm  bán kính  và một điểm  cách  là . Kẻ tiếp tuyến  với đường tròn ( là tiếp điểm). tính độ dài .

**Bài 9.** Cho đường tròn  và dây . Vẽ một tiếp tuyến song song với , cắt các tia , lần lượt tại và. Tính diện tích tam giác 

* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 10.** Cho đường tròn  và một điểm  chạy trên đường tròn đó. Từ  vẽ tiếp tuyến . Trên  lấy một điểm  sao cho . Hỏi điểm  di động trên đường nào?

**Bài 11.** Cho đường tròn . Cát tuyến qua  ở ngoài  cắt  tại  và . Cho biết  và kẻ đường kính . Tính độ dài đoạn thẳng .

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 12.** Cho đường thẳng  đi qua điểm  nằm trong đường tròn . Chứng minh đường thẳng  và đường tròn  cắt nhau.

**Bài 13.** Cho đường tròn  và điểm  sao cho . Đường thẳng  đi qua điểm . Chứng minh đường thẳng  và đường tròn  cắt nhau.

**Bài 14.** Trên cùng mặt phẳng  cho điểm . Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn  và các trục tọa độ.

**Bài 15.** Cho đường thẳng , tâm  của các đường tròn có bán kính  và tiếp xúc với đường thẳng  nằm trên đường nào?

**Bài 16.** Điểm  cách đường thẳng  là .

1. Chứng minh  cắt đường thẳng  tại hai điểm phân biệt.
2. Gọi hai giao điểm của  với  là ,. Tính .

**Bài 17.** Cho nửa đường tròn  đường kính . Lấy  là điểm thuộc , tiếp tuyến qua  là . Kẻ , vuông góc với ,  vuông góc với . Chứng minh  và .

**VẤN ĐỀ 6. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN**

**(PHẦN I)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

*Dấu hiệu 1.* Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

*Dấu hiệu 2.* Theo định nghĩa tiếp tuyến.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1. Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn**

*Phương pháp giải:* Để chứng minh đường thẳng  là tiếp tuyến của  tiếp điểm là  ta có thể làm theo các cách sau:

*Cách 1:*  tại  và .

*Cách 2:* Vẽ . Chứng minh .

*Cách 3:* Vẽ tiếp tuyến  của . Ta chứng minh .

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 1.** Cho tam giác  có , , . Vẽ đường tròn . Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn.

**Bài 2.** Cho tam giác  cân tại , đường cao  và  cắt nhau tại . Chứng minh:

1. Đường tròn đường kính  đi qua .
2.  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính .

* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 3.** Cho tam giác  có hai đường cao ,  cắt nhau tại .

1. Chứng minh bốn điểm ,,, cùng nằm trên đường tròn .
2. Gọi  là trung điểm của . Chứng minh  là tiếp tuyến của .

**Bài 4.** Cho đường thẳng , điểm  nằm trên đường thẳng , điểm  nằm ngoài đường thẳng . Hãy dựng đường tròn  đi qua điểm  và tiếp xúc với đường thẳng  tại .

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 5.** Cho tam giác  cân tại , nội tiếp đường tròn tâm . Vẽ hình bình hành . Tiếp tuyến tại  của đường tròn cắt đường thẳng  tại . Chứng minh:

1. Đường thẳng  là tiếp tuyến của 
2. Ba đường thẳng ,, đồng quy.

**Bài 6.** Từ một điểm  ở bên ngoài đường tròn , vẽ hai tiếp tuyến , với . Đường thẳng vuông góc với  tại  cắt tia  tại . Đường thẳng vuông góc với  tại  cắt tia  tại .

1. Chứng minh tứ giác  là hình thoi.
2. Điểm  phải cách  một khoảng là bao nhiêu để  là tiếp tuyến của .

**Bài 7.** Cho  và  không cắt . Dựng tiếp tuyến của sao cho tiếp tuyến đó song song với .

**Bài 8.** Cho nửa đường tròn tâm  đường kính . Lấy  trên  và tiếp tuyến tại  cắt tiếp tuyến tại  và  của  ở  và ;  cắt  tại ,  cắt  tại .

1. Chứng minh .
2. Tứ giác  là hình gì?
3. Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính .

**Bài 9.** Cho tam giác  vuông tại ,  là đường cao. Gọi , là các tiếp tuyến của đường tròn  với , là các tiếp điểm. chứng minh:

1. Ba điểm ,, thẳng hàng.
2.  tiếp xúc với đường tròn đường kính .

**Bài 10.** Cho điểm  nằm trên nửa đường tròn tâm  đường kính . Vẽ tiếp tuyến . Kẻ , cùng vuông góc với  (các điểm , nằm trên ). Xác định vị trí của điểm  trên nửa đường tròn  sao cho diện tích tứ giác  đạt giá trị lớn nhất.

**VẤN ĐỀ 7. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN**

**(PHẦN II)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

*Nhắc lại lý thuyết:*

*Dấu hiệu 1.* Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

*Dấu hiệu 2.* Theo định nghĩa tiếp tuyến.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 2. Tính độ dài**

*Phương pháp giải:* Nối tâm với tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp tuyến và hệ thức lượng trong tam giác vuông.

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 1.** Cho đường tròn  có dây  khác đường kính. Qua  kẻ đường vuông góc với , cắt tiếp tuyến tại  của  ở điểm .

1. Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn.
2. Cho bán kính của  bằng  và dây . Tính độ dài đoạn thẳng .

**Bài 2.** Cho đường tròn tâm  có bán kính , dây  vuông góc với  tại trung điểm  của .

1. Tứ giác  là hình gì? Vì sao?
2. Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại , cắt đường thẳng  tại . Tính độ dài  theo .

* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 3.** Cho đường tròn  đường kính . Vẽ dây  sao cho . Trên tia đối của tia  lấy điểm  sao cho . Chứng minh:

1.  là tiếp tuyến của đường tròn .
2. .

**Bài 4.** Cho tam giác  vuông ở ,  là đường cao, , . Gọi  là điểm đối xứng với  qua . Vẽ đường tròn đường kính  cắt  ở .

1. Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn.
2. Tính độ dài .

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 5.** Cho đường tròn  và điểm  trên đường tròn. Qua  kẻ tiếp tuyến  sao cho .

1. Tính độ dài đoạn thẳng .
2. Qua  kẻ đường thẳng vuông góc với , cắt đường tròn  tại . Chứng minh  là tiếp tuyến của .

**Bài 6.** Cho đường tròn , đường kính , tiếp tuyến  với đường tròn. Gọi  là một điểm trên đường tròn sao cho , tia  cắt tia  tại .

1. Chứng minh .
2. Tính độ dài đoạn .

**Bài 7.** Cho đường tròn  và dây . Vẽ một tiếp tuyến song song với , nó cắt  và  theo thứ tự tại  và . Tính diện tích tam giác 

## VẤN ĐỀ 8. TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU (PHẦN I)

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau**

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

* Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
* Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
* Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm

1. **Đường tròn nội tiếp tam giác**

* Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp* tam giác, còn tam giác gọi là *ngoại tiếp* đường tròn.
* Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

**3. Đường tròn bàng tiếp tam giác**

* Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại goi là *đường tròn bàng tiếp* tam giác.
* Với một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.
* Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C, hoặc là giao điểm của phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc**

*Phương pháp giải*: Dùng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.

*\** *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 1.** Hai tiếp tuyến tại  và  của đường tròn  cắt nhau tại .

1. Chứng minh 
2. Chứng minh  là đường trung trực của 
3. Vẽ đường kính  của . Chứng minh  và  song song.

**Bài 2.** Cho nửa đường tròn tâm , đường kính . Vẽ các tiếp tuyến  với nửa đường tròn cùng phía đối với . Từ  trên nửa đường tròn ( khác ) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt  và  lần lượt tại  và .

1. Chứng minh  là tam giác vuông
2. Chứng minh 
3. Cho biết . Tính  và  theo 

\* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp*

**Bài 3.** Từ điểm  ở ngoài đường tròn  kẻ hai tiếp tuyến  (với  và  là các tiếp điểm). Kẻ  và  ,  và  cắt nhau tại .

1. Chứng minh tứ giác  là hình thoi
2. Chứng minh ba điểm  thẳng hàng
3. Xác định vị trí điểm  để  nằm trên đường tròn .

**Bài 4.** Hai tiếp tuyến tại  và  của đường tròn  cắt nhau tại . Đường thẳng vuông góc với  cắt  tại . Chứng minh .

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 5.** Hai tiếp tuyến tại  và  của đường tròn  cắt nhau tại . Đường thẳng qua  và vuông góc với  cắt  tại . Chứng minh:

1. 
2. Tam giác  cân.

**Bài 6.** Từ một điểm  nằm ngoài đường tròn , kẻ các tiếp tuyến  với đường tròn ( là các tiếp điểm). Qua  thuộc cung nhỏ , kẻ tiếp tuyến với đường tròn , nó cắt các tiếp tuyến  và  theo thứ tự ở  và . Chứng minh chu vi tam giác  bằng .

## VẤN ĐỀ 9. TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU (PHẦN I)

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau**

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

* Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
* Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
* Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm

1. **Đường tròn nội tiếp tam giác**

* Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp* tam giác, còn tam giác gọi là *ngoại tiếp* đường tròn.
* Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

**3. Đường tròn bàng tiếp tam giác**

* Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại goi là *đường tròn bàng tiếp* tam giác.
* Với một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.
* Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác của góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoai tại B và C, hoặc là giao điểm của phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).

1. **BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG BÀI TOÁN**

**Dạng 2. Chứng minh tiếp tuyến, tính độ dài, tính số đo góc**

*Phương pháp giải:* Sử dụng các kiến thức sau:

1. Dùng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.
2. Dùng khái niệm đường tròn nội tiếp, bàng tiếp.
3. Dùng hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông.

*\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 1.** Cho đường tròn . Từ một điểm  ở ngoài , vẽ hai tiếp tuyến và sao cho góc . Biết chu vi tam giác  là 18 cm, tính độ dài dây .

**Bài 2.** Cho đường tròn  và một điểm  ở ngoài đường tròn. Vẽ các tiêp tuyến . Chứng minh khi và chỉ khi .

**Bài 3.** Cho tam giác  vuông tại  có . Gọi  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ,  là trọng tâm của tam giác . Tính độ dài .

\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 4.** Cho đường tròn . Từ một điểm  ở ngoài đường tròn , vẽ hai tiếp tuyến  và  sao cho . Biế chu vi tam giác  là 30 cm, tính độ dài dây .

**Bài 5.** Cho đường tròn và một điểm  ở ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến . Chứng minh rằng khi và chỉ khi .

**Bài 6.** Cho tam giá  vuông tại  có . Gọi là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ,  là trọng tâm của tam giác . Tính độ dài .

1. **BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 7.** Cho đường tròn  và điểm  nằm bên ngoài . Kẻ các tiếp tuyến *AB, AC* với đường tròn (*B, C* là các tiếp điểm).

1. Chứng minh rằng *OA* vuông góc với *BC*;
2. Vẽ đường kính . Chứng minh  và  song song.
3. Tính độ dài các cạnh của tam giác  biết 

**Bài 8.** Cho tam giác cân tại .  là tâm đường tròn nội tiếp,  là tâm đường trong bàng tiếp trong góc . Gọi  là trung điểm của .

1. Chứng minh bốn điểm cùng thuộc một đường tròn .
2. Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn .
3. Tính bán kính đường tròn  biết .

-------------------------------------------------------

## VẤN ĐỀ 10. LUYỆN TẬP TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

1. **TÓM TẮT LÝ THUYẾT**
2. **Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau**

Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

* Điểm đó cách đều hai tiếp điểm
* Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
* Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

1. **Đường trong nội tiếp tam giác**

* Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp tam giác* còn tam giác gọi là *ngoại tiếp* đường tròn.
* Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

1. **Đường tròn bàng tiếp tam giác**

* Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác.
* Với một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.
* Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác góc *A* là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại *B* và *C*, hoặc là giao điểm của đường phân giác góc *A* và đường phân giác ngoài tại *B* (hoặc *C*).

1. **BÀI TẬP TẠI LỚP**

*\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 1.** Cho nửa đường tròn đường kính . Kẻ hai tiếp tuyến  và  (,  nằm cùng phía đối với nửa đường tròn). Gọi  là một điểm thuộc nửa đường tròn ( khác  và ). Tiếp tuyến tại với nửa đường tròn cắt ,  theo thứ tự ở  và .

1. Chứng minh
2. Chứng minh 4 điểm nằm trên một đường tròn. Chỉ ra bán kính của đường tròn đó.
3. Chứng minh .
4. Chứng minh tích  không đổi khi  thay đổi trên .
5. Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính .
6. Gọi giao điểm của  và  là . Chứng minh  và  song song.
7. Gọi  là tia phân giác của ( thuộc ). Chứng minh:

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 2.** Cho đường tròn . Từ điểm  nằm ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến với đường tròn ( là các tiếp điểm). Gọi  là trung điểm của .

1. Chứng minh ba điểm  thẳng hàng và các điểm  cùng thuộc một đường tròn.
2. Kẻ đường kính  của . Vẽ . Chứng minh: 
3. Tia  cắt đường tròn  tại ( nằm giữa  và ). Chứng minh  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác .
4. Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh  là trung điểm của .

Bài 3. Cho đường tròn , đường kính AB. Điểm M bất kì thuộc . Tiếp tuyến tại  và  cắt nhau tại . Qua  kẻ đường thẳng song song với  cắt tiếp tuyến qua  tại , cắt tiếp tuyến qua  tại .

1. Chứng minh rằng tam giác  cân;
2. Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn ;
3. Chứng minh không phụ thuộc vào ;
4. Gọi  là hình chiếu của  trên . Tia phân giác cắt  tại  (K khác M). Xác định vị trí điểm  sao cho.
5. **BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 4.** Cho đường tròn  và điểm  có . Kẻ các tiếp tuyến  và  của đường tròn (là các tiếp điểm). Gọi  là giao điểm của  và .

1. Tính độ dài đoạn thẳng ;
2. Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ , kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt  và  theo thứ tự tại  và . Tính chu vi tam giác ;
3. Tính số đo góc .

**Bài 5.** Cho tam giác cân tại.  là tâm đường tròn nội tiếp,  là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc .  là trung điểm của .

1. Chứng minh bốn điểm cùng thuộc một đường tròn ;
2. Chứng minh là tiếp tuyến của đường tròn ;
3. Tính bán kính của đường tròn biết

## VẤN ĐỀ 11. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

1. **TÓM TẮT LÝ THUYẾT**
2. **Tính chất của đường nối tâm**

Đường nối tâm là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đường tròn. Từ đó suy ra:

- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm;

- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

1. **Sự liên hệ giữa vị trí của hai đường tròn với đoạn nối tâm d và các bán kính R và r**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Vị trí tương đối của hai đường tròn  và với | Số điểm chung | Hệ thức giữa và |
| Hai đường tròn cắt nhau | 2 |  |
| Hai đường tròn tiếp xúc nhau | 1 |  |
| - Tiếp xúc ngoài |  |
| - Tiếp xúc trong |  |
| Hai đường tròn không giao nhau | 0 |  |
| - Ở ngoài nhau |  |
| - đựng |  |
| - vàđồng tâm | d = 0 |

1. **BÀI TẬP CÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1. Các bài toán có cho hai đường tròn tiếp xúc nhau**

*\* Phương pháp giải:*

- Vẽ đường nối tâm và chú ý rằng tiếp điểm nằm trên đường nối tâm, dùng hệ thức d = R + r.

- Nếu cần, có thể vẽ tiếp tuyến chung tại tiếp điểm.

*\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 1.** Cho đường tròn và tiếp xúc ngoài tại . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài . Tiếp tuyến chung trong tại cắt tiếp tuyến chung ngoài ở .

1. Chứng minh ;
2. Tính số đo ;
3. Tính độ dài  biết 

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 2.** Cho hai đường tròn  và tiếp xúc ngoài với nhau tại . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài ,.

1. Chứng minh  là tam giác vuông;
2. Tính số đo ;
3. Tính diện tích tứ giác  theo  và ;
4. Gọi I là trung điểm của . Chứng minh rằng  là tiếp tuyến của đường tròn .

**Dạng 2. Các bài toán cho hai đường tròn cắt nhau**

*\* Phương pháp giải:* Vẽ dây chung của hai đường tròn rồi dùng tính chất đường nối tâm là đường trung trục của dây chung.

*\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 3.** Cho hai đường tròn và  cắt nhau tại  và , trong đó  là tiếp tuyến của đường tròn (O’). Tính độ dài dây cungbiết .

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 4.** Cho hai đường tròn và cắt nhau tại  và . Từ  vẽ đường kính  và . Chứng minh ba điểm  thẳng hàng và vuông góc với .

**Bài 5.** Cho hai đường tròn và cắt nhau tại  và . Gọi là trung điểm của . Qua  kẻ đường thẳng vuông góc với , cắt các đường tròn và ở  và . Chứng minh 

1. **BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 6.** Cho hai đường tròn  và tiếp xúc với nhau tại . Vẽ một cát tuyến qua  cắt hai đường tròn tại  và . Chứng minh các tiếp tuyến tại  và  song song với nhau.

**Bài 7.** Cho góc vuông . Lấy các điểm  và  thứ tự trên các tia  và . Vẽ đường tròn cắt tia  tại  (nằm giữa  và ). Vẽ đường tròn cắt tia  tại  ( nằm giữa  và ).

1. Chứng minh hai đường tròn  và  luôn cắt nhau;
2. Tiếp tuyến tại M của đường tròn , tiếp tuyến tại N của của  cắt nhau tại . Chứng minh tứ giác  là hình vuông;
3. Gọi giao điểm của hai đường tròn là  và . Chứng minh ba điểm thẳng hàng;
4. Giả sử  và thứ tự di động trên các tia,sao cho không đổi. Chứng minh đường thẳng  luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 8.** Cho đường tròn và một điểm  nằm trên đường tròn đó. Trên đoạn OA lấy điểm B sao cho. Vẽ đường tròn đường kính .

1. Chứng minh đường tròn đường kính *AB* tiếp xúc với đường tròn cho trước.
2. Vẽ đường tròn đồng tâm với đường tròn cho trước, cắt đường tròn đường kính  tại . Tia *AC* cắt hai đường tròn đồng tâm tại *D* và *E* (*D* nằm giữa *C* và *E*).

Chứng minh *AC = CD = DE.*

**Bài 9.** Cho đường tròn đường kính , điểm  nằm giữa  và . Vẽ đường tròn có đường kính .

1. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn và ;
2. Kẻ đây  của đường tròn vuông góc với  tại trung điểm  của . Tứ giác  là hình gì? Vì sao?
3. Gọi  là giao điểm của  và đường tròn . Chứng minh ba điểm  thẳng hàng.
4. Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn .

-----------------------------------------

## ÔN TẬP CHỦ ĐỀ IV (PHẦN I)

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Sự xác đinh đường tròn, tính chất đối xứng của đường tròn**

a) Đường tròn tâm O bán kính R (R>0) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoẳng bằng R.

|  |  |
| --- | --- |
| b) Vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn  Cho đường tròn (O;R) và một điểm M   * M nằm trên đường tròn *(O; R) OM = R* * M nằm trong đường tròn *(O; R) OM < R* * M nằm ngoài đường tròn *(O; R) OM > R*   c) Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.  d) Tính chất đối xứng của đường tròn   * Đường tròn là hình có *tâm đối xứng*. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của hình tròn đó. * Đường tròn là hình có *trục đối xứng.* Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn. |  |

**2. Quan hệ đường kính và dây cung**

a) So sánh độ dài của đường kính và dây: Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

b) Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

* Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
* Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

c) Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

* Trong một đường tròn:

- Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

- Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

* Trong hai dây của một đường tròn:

- Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

- Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

**3. Vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn**

a) Cho đường tròn *(O; R)* và đường thẳng *a.* Đặt *d = d(O; a).* Ta có:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn* | *Số điểm chung* | *Hệ thức giữa  và* |
| Đường thẳng và đường tròn cắt nhau | 2 |  |
| Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau | 1 |  |
| Đường thẳng và đường tròn không giao nhau | 0 |  |

b) Khi đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng gọi là tiếp tuyến của đường tròn. Điểm chung của đường thẳng và đường tròn gọi là tiếp điểm.

**4. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến**

* Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
* Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

**5. Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau**

a) Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

* Điểm đó cách đều hai tiếp điểm
* Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
* Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

b) Đường tròn nội tiếp tam giác

* Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp tam giác* còn tam giác gọi là *ngoại tiếp* đường tròn.
* Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

c) Đường tròn bàng tiếp tam giác.

* Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác.
* Với một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.
* Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác góc *A* là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại *B* và *C*, hoặc là giao điểm của đường phân giác góc *A* và đường phân giác ngoài tại *B* (hoặc *C*).

**6. Vị trí tương đối của hai đường tròn**

a) Tính chất đường nối tâm

* Đường nối tâm của hai đường tròn là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn đó.
* Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.
* Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

b) Vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho hai đường tròn  và . Đặt . Ta có:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Vị trí tương đối của hai đường tròn  và với | Số điểm chung | Hệ thức giữa và |
| Hai đường tròn cắt nhau | 2 |  |
| Hai đường tròn tiếp xúc nhau | 1 |  |
| - Tiếp xúc ngoài |  |
| - Tiếp xúc trong |  |
| Hai đường tròn không giao nhau | 0 |  |
| - Ở ngoài nhau |  |
| - đựng |  |
| - vàđồng tâm | d = 0 |

c) Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

- *Tiếp tuyến chung* của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

- *Tiếp tuyến chung ngoài* là tiếp tuyến chung không cắt đoạn nối tâm.

- *Tiếp tuyến chung trong* là tiếp tuyến chung cắt đoạn nối tâm.

**B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1.** Cho đường tròn , đường kính  và dây không đi qua tâm . Gọi  là trung điểm của .

1. Tính  và chứng minh *OH // BC*;
2. Tiếp tuyến tại  của cắt  ở . Chứng minh đường thẳng là tiếp tuyến của tại ;
3. Vẽ vuông góc với tại  . Gọi  là trung điểm của và đặt . Chứng minh ;
4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

**Bài 2.** Cho đường tròn tâm . Từ điểm  ở ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến  và  ( và  là các tiếp điểm).  cắt  tại .

1. Chứng minh  vuông góc với ;
2. Vẽ đường kính . Chứng minh là hình thang;
3. Cho  và . Tính độ dài các cạnh và diện tích tam giác .

**Bài 3.** Cho đoạn thẳng *AB*, điểm *C* nằm giữa *A* và *B*. Vẽ về một phía của *AB* các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là *AB, AC, CB*. Đường thẳng vuông góc với *AB* tại *C* cắt nửa đường tròn lớn tại *D*. *DA, DB* cắt các đường tròn có đường kính *AC, CB* theo thứ tự ở *M* và *N*.

1. Tứ giác  là hình gì? Vì sao?
2. Chứng minh hệ thức: ;
3. Chứng minh *MN* là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn có đường kính *AC* và *CB*;
4. Điểm *C* ở vị trí nào trên *AB* thì *MN* có độ dài lớn nhất.

**Bài 4.** Cho đường tròn tâm , đường kính . Gọi I là trung điểm của BO, qua I kẻ dây CD vuông góc với *OB*. Tiếp tuyến của tại *C* cắt *AB* tại *E*.

1. Tính độ dài *OE* theo *R*;
2. Tứ giác  là hình gì? Tại sao?
3. Chứng minh *ED* là tiếp tuyến của đường tròn;
4. Chứng minh *D* là trực tâm của tam giác .

**Bài 5.** Cho *AB* và *CD* là hai đường kính vuông góc với đường tròn . Trên tia đối của tia *CO* lấy điểm *S*. *SA* cắt đường tròn  tại *M*. Tiếp tuyến tại *M* với đường tròn cắt *CD* tại *E*, *BM* cắt *CD* tại *F*.

1. Chứng minh *EM. AM = MF.OA*;
2. Chứng minh *ES = EM = EF*;
3. Cho *SB* cắt đường tròntại *I*. Chứng minh *A, I, F* thẳng hàng;
4. Cho *EM = R,* tính *FA. SM* theo *R*;
5. Kẻ *MH* vuông góc với *AB*. Xác định vị trí điểm *S* sao cho diện tích tam giác *MHD* đạt giá trị lớn nhất.

--------------------------------------------------------

## ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4 (PHẦN II)

1. **TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

Xem lại lý thuyết ở Ôn tập chủ đề 4 (Phần I)

1. **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1.** Cho hai đường tròn *(O; R)* và *(O’; R’)* tiếp xúc ngoài tại *A*. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài *DE*, , . Tiếp tuyến chung trong tại *A* cắt *ED* tại *I.* Gọi *M* là giao điểm của *OI* với *AD*, *N* là giao điểm của *AE* với *O’I*.

1. Tứ giác *AMIN* là hình gì? Tại sao?
2. Chứng minh hệ thức *IM. IO= IN. IO’*;
3. Chứng minh *OO’* là tiếp tuyến của đường tròn đường kính *DE*;
4. Tính độ dài *DE* theo *R* và *R’*.

**Bài 2.** Cho đường tròn *(O; R)*, đường kính *AB*. Qua *A* và *B* vẽ lần lượt hai tiếp tuyến *(d)* và *(d’)* với đường tròn *(O).* Một đường thẳng qua *O* cắt đường thẳng *(d)* ở *M* và cắt đường thẳng *(d’)* ở *P*. Từ *O* vẽ một tia vuông góc với *MP* và cắt đường thẳng *(d’)* ở *N*.

1. Chứng minh *OM= OP* và *NMP* cân;
2. Hạ *OI MN*. Chứng minh *OI = R* và *MN* là tiếp tuyến của đường tròn *(O)*;
3. Chứng minh *AM . BN = R2*;
4. Tìm vị trí của *M* để diện tích tứ giác *AMNB* là nhỏ nhất.

**Bài 3.** Cho nửa đường tròn *(O)*, đường kính *AB = 2R*, điểm *C* thuộc nửa đường tròn. Kẻ phân giác *BI* của góc *ABC* (*I* thuộc đường tròn *(O)*), gọi *E* là giao điểm của *AI* và *BC*.

1. Tam giác *ABE* là tam giác gì? Vì sao?
2. Gọi *K* là giao điểm của *AC* và *BI*. Chứng minh *EK AB* ;
3. Gọi *F* là điểm đối xứng với *K* qua *I*. Chứng minh rằng *AF* là tiếp tuyến của đường tròn *(O)*;
4. Khi điểm *C* di chuyển trên đường tròn thì điểm *E* di chuyển trên đường nào?

**Bài 4.** Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB*, điểm *C* nằm giữa *A* và *B*. Vẽ đường tròn *(I)* có đường kính *CB*.

1. Xét vị trí tương đối của đường tròn *(O)* và *(I)*;
2. Kẻ dây DE của đường tròn *(O)* vuông góc với *AC* tại trung điểm *H* của *AC*. Tứ giác *ADCE* là hình gì? Vì sao?
3. Gọi *K* là giao điểm của *DB* với *(I)*. Chứng minh rằng ba điểm *E, C, K* thẳng hàng;
4. Chứng minh rằng *HK* là tiếp tuyến của đường tròn *(I).*

**Bài 5.** Cho đường tròn *(O; R)*. Từ điểm *A* nằm ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến *AB, AC* với đường tròn (*B, C* là các tiếp điểm). Gọi *H* là trung điểm của *BC*.

1. Chứng minh ba điểm *A, H, O* thẳng hàng và các điểm *A, B, C, O* cùng thuộc một đường tròn;
2. Kẻ đường kính *BD* của đường tròn *(O)*. Vẽ *CK BD*. Chứng minh *AC. CD = CK.AO*;
3. Tia *AO* cắt đường tròn *(O)* tại *M* (*M* nằm giữa *A* và *O*). Chứng minh *M* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*;
4. Gọi *I* là giao điểm của *AD* và *CK*. Chứng minh rằng *I* là trung điểm của *CK*.

**Bài 6.** Cho tam giác *ABC* vuông góc tại đỉnh *A*, đường cao *AH*. Đường tròn đường kính *BH* cắt *AB* tại điểm *D* và đường tròn đường kính *CH* cắt cạnh *AC* tại điểm *E*. Gọi *I, J* theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng *BH, CH*.

1. Chứng minh bốn điểm *A, D, H, E* nằm trên một đường tròn. Xác định hình dạng của tứ giác *ADHE*;
2. Chứng minh hai đường tròn đường kính *BH* và *CH* tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm *H* và *AH* là tiếp tuyến chung của hai đường tròn;
3. Chứng minh *DE* là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn;
4. Cho biết *AB = 6 cm, AC = 8 cm*. Tính độ dài đoạn thẳng *DE*?

# ĐÁP ÁN

**VẤN ĐỀ 1.**

**Bài 1.** Gọi  là trung điểm của  là tâm đường tròn đi qua ba điểm 

b)  vuông tại 

**bài 2**. Gọi  là trung điểm của  . Chứng minh  nằm trên 

**bài 3**. a)  là hình bình hành tâm  có:  là hình chữ nhật cùng thuộc 

b) Chứng minh  vuông

**Bài 4**.  là hình chữ nhật tâm  cùng thuộc 

**Bài 5.** Gọi  lần lượt là trung điểm của  chứng minh tứ giác  có hai góc đối có tổng bằng  cùng thuộc một đường tròn

**Bài 6.** Trong hình thoi đường chéo này là trung trực của đường chéo kia. Do đó điểm  là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh  và  . Nên  là tâm đường tròn ngoại tiếp của  . Tương tự  là tâm đường tròn ngoại tiếp của 

**Bài 7.** a) Ta có:  thuộc đường tròn đường kính  . Chứng minh  thuộc đường tròn đường kính  cùng thuộc đường tròn đường kính 



**Bài 8.** a) Gọi O là trung điểm của  mà  vuông tại  . Tương tự 

b) Xét  có  là trực tâm 

**Bài 9.** a) Gọi  là đường kính của  sao cho  . Xét trường hợp  chạy trên nửa đường tròn  . Chứng minh  vậy  chạy trên đường tròn đường kính 

b) Vì  hay  mà  có  vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên  cân tại  nên  chạy trên 

**Bài 10. Gọi**  là tâm hình thoi. Chứng minh  là trọng tâm của  . Kẻ  cố định  thuộc đường tròn đường kính 

**VẤN ĐỀ 2.**

**Bài 1.**  nằm trong đường tròn  nằm ngoài đường tròn  nằm trên đường tròn 

**Bài 2.** 

cùng thuộc đường tròn tâm 

 đều có  là trực tâm đồng thời là trọn tâm  vuông tại  có  nằm ngoài 

 nằm trong 

**Bài 3.** Áp dụng định lý pitago cho tam giác vuông  ta có 

**Bài 4**. Gọi  là giao điểm của  và  ta có  cùng thuộc 

**Bài 5.** Gọi  là giao của ba đường trung trực của  . KHi đó  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  gọi  là giao điểm của  và  ta có 

**Bài 6**. a) Dựng đường thẳng  là đường trung trực của cắt tia  tại  . Dựng  là đường tròn cần dựng

Chứng minh: Vì  nên  do đó  đi qua hai điểm  mà  nên đường tròn  thỏa mãn đề bài



**Bài 7.**  là hình thoi



 có  vừa là đường cao vừa là đường trung trực nên  cân tại 

**Bài 8**. a) Chứng minh  mà 

 cùng thuộc đường tròn đường kính 

c) Gọi  là trung điểm của  chứng minh  cân tại  cùng thuộc 

**VẤN ĐỀ 3.**

**Bài 1**. a) Gọi  và  là hình chiếu vuông góc của  trên  và 



**Bài 2.** a) Gọi  là khoảng cách từ  đến mỗi dây ta có



**Bài 3.** Gọi  lầ lượt là khoảng cách từ  đến  ta có 

**Bài 4**. Gọi 

**Bài 5**. a) Gọi  là khoảng cách từ  đến 



**Bài 6.** Gọi  là đường thẳng qua  và vuông góc với  ta có 

**Bài 7.** Kẻ  ta có

**Bài 8.** 



**Bài 9**. 

 cắt  tại 

**VẤN ĐỀ 4**

**Bài 1**. Gọi  là trung điểm của . Xét hình thang  là trung điểm của  từ đó 

**Bài 2.**  cùng thuộc đường tròn đường kính 

 là đường kính,  dây không qua tâm

**Bài 5.**  (cùng  );  (cùng  )

 là trung điểm của  là trung điểm của 

 là đường trung bình 

**Bài 6**. Chứng minh tương tự Bài 2

**Bài 7**. Chứng minh tương tự Bài 1

**Bài 8**.  nằm trên đường tròn đường kính 



 có  là trung điểm của hai đường chéo

 vuông tại  và  nên  nằm trên đường tròn đường kính 

 là đương trung bình của 

**Bài 9**. Kẻ  tại ; 

 ( là đường kính  )

 đạt giá trị lớn nhất khi  là đường kính của 

**Bài 10.**  vuông tại 

 là trung điểm của  ( là trung trực của  );  là tia phân giác góc  cân tại  có  là đường cao)



**VẤN ĐỀ 5**

**Bài 1.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn |
|  |  | Cắt nhau |
|  |  | Tiếp xúc nhau |
|  |  | Không giao nhau |

**Bài 2.**  không giao với  và tiếp xúc với 

**Bài 3**.  thuộc  và  nên  cách  một khoảng bằng  tiếp xúc 

**Bài 4.**  không giao nhau với  và tiếp xúc với 

**Bài 5**.  nên  cách  một khoảng bằng  tiếp xúc với 

**Bài 6.** Tâm đường tròn nằm trên hai đường thẳng song song  song song với đường thẳng  và cách  một khoảng 

**Bài 7**.  nằm trên đường thẳng song song với  và cách đều  một khoảng bằng 

**Bài 8**. 

**Bài 9.** 

**Bài 10**.  di chuyển trên 

**Bài 11.** 

**Bài 12**. Kẻ  vuông góc với  suy ra  . Mặt khác  nằm trên đường tròn  nên 

**Bài 13.** Kẻ  vuông góc với  suy ra  . Mặt khác  nằm trên đường tròn  nên 

**Bài 14**.  không cắt hai trục 

**Bài 15**. Tâm  thuộc hai đường thẳng song song với  và cách  một khoảng bằng 

**Bài 16.** a) Kẻ  vuông góc với  thì  do đó  cắt  tại hai điểm 



**Bài 17.**  là đường trung bình của hình thang  nên  là trung điểm của

 chú ý rằng  nên suy ra 

**VẤN ĐỀ 6**

**Bài 1.** Ta có 

**Bài 2.** 

b) Gọi  là trung điểm của  ta có



***Nhận xét***: Không sử dụng tính chất tam giác cân trong lời giải nên cách làm sẽ không thay đổi nếu giả thiết chỉ chi tam giác thường

**Bài 3.** a) Gọi  là trung điểm của  thì 

b) Chứng minh tương tự bài 2b

**bài 4.** Trung trực  cắt đường thẳng vuông góc với  ở  tại  . đường tròn  là đường tròn cần dựng

**Bài 5**. a)Tam giác  cân tại  nội tiếp 

 là hình bình hành  cắt  tại trung điểm  của và  là tiếp tuyến của cắt  tại trung điểm  của 

**Bài 6.** a) Dễ có  là hình bình hành. Ta chứng minh  . Xét tam giác  và tam giác  có  và  là hình thoi

 là hình thoi  và  lần khoảng cách từ  đến  do đó  là tiếp tuyến của khoảng cách từ  đến 

**Bài 7.** Từ  hạ  vuông góc với  cắt  tại  và  . Qua  và kẻ các đường thẳng vuông góc với  ta được hai ( hoặc 1 nếu  là tiếp tuyến của  ) tiếp tuyến song song với 

**Bài 8.**  thuộc đường trìn đường kính  tiếp tuyến  . Tiếp tuyến  là hình chữ nhật 

 là hình chữ nhật

c) Gọi  là trung điểm của  thì  là tâm đường tròn đường kính  có  là hình thang vuong tại  nên  do đó  là tiếp tuyến của đường trìn đường kính 

**Bài 9.**  là tiếp tuyến của  là tiếp tuyến của thẳng hang

b) Tương tự bài 13 c

**Bài 10.** Có  là hình thang vuông tại  mà  là trung điểm của  vuông góc với  tiếp tuyến của  . Chú ý rằng  ( Hình chiếu đường xiên) . Do đó  lớn nhất khi  hay  nằm chính giữa nửa đường tròn đường kính 

**VẤN ĐỀ 7**

**Bài 1.**  ĐPCM



**Bài 2.**  vuông góc với  tại là trung điểm của  là hình thoi



**Bài 3**.  là tam giác đều nên  là tiếp tuyến của 



**Bài 4.** a) Gọi là trung điểm của  từ giả thiết suy ra tam giác  và tam giác đều  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính 



**Bài 5**. 

 là tiếp tuyến của đường tròn 

**Bài 6**.  vuông tại  đường cao 



**Bài 7.** 

**VẤN ĐỀ 8**

**Bài 1**.  là trung trực của 

 vì cùng vuông góc với 

**Bài 2.** 





**Vài 3**.  là hình thoi

 thẳng hang

c) Để  thì 

**Bài 4.** 

**Bài 5.**  vì cùng vuông góc với 



**Bài 6.** Chu vi tam giác 

**VẤN ĐỀ 9**

**Bài 1**. 

**Bài 2.**



Suy ra tam giác  đều

**Bài 3.** Gọi  là giao điểm của  và  . TÍnh được  là tiếp điểm của  với  nên 

**Bài 4.**  đều 

**Bài 5.**  vuông tại xét  có 

**Bài 7.**  là phân giác  cân tại 

 ( cùng phụ với góc  )

 đều 

**Bài 8.**  lần lượt là phân giác trong và ngoài góc  nên  , tương tự 

 mà 

 cắt  tại  ta có  là trung trực của  ;  ( tam giác vuông có chung góc nhọn tại  )

**VẤN ĐỀ 10**

**Bài 1.** 

 đường tròn bán kính 





e) Gọi  là trung điểm của  là tâm đường tròn đường kính  là đường trung bình của hình thang vuông  nên 



 ta có 



**Bài 2.**  là trung trực của  thẳng hang

 nằm trên đường tròn đường kính 



 là phân giác góc  của tam giác  . Chứng minh  là phân giác góc  của là tâm đường tròn nội tiếp tam giác 

d) Theo câu b):  là trung điểm của 

**Bài 3.** a) Chứng minh  vừa là phân giác vừa là đường cao của tam giác  cân tại 



**Bài 4.** 

**Bài 5**.  có  lầ lượt là phân giác trong phân giác ngoài tại  ta có  mặt khác  là tiếp tuyến của 

 Gọi  là giao điểm của 



**VẤN ĐỀ 11**

**Bài 1.** a ) Có  nên tam giác  vuông tại 



**Bài 2**. a) Từ  vuông tại 



 là thang hình vuông tại  có  là đường trung bình

**Bài 3,** 

**Bài 4.** Ta có 

**Bài 5.** Gọi  lần lượt là trung điểm của  là đường trung bình của hình thang 

**Bài 6.** Ta có  đpcm

**Bài 7.** a) Ta có  luôn cắt nhau

 mặt khác  là hình chữ nhật  là hình vuông

c) Gọi  là hình chữ nhật và  là hình vuông

 mà 

d) Có  là hình vuông cạnh  cố định  cố định và  luôn đi qua 

**Bài 8.** a) Gọi  là trung điểm của  ta có 

b) Ta chứng minh được  mà 

**Bài 9**.  tiếp xúc trong với nhau

 là hình thoi

 Có  mà  thẳng hang



**ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4 ( PHẦN I)**

**Bài 1.**  là đường trung bình của tam giác 

 là tiếp tuyến của 



 Giả sử  cắt  tại  vì 

**Bài 2.** a) Dựa vào tính chất tiếp tuyến chứng minh  là đườn trung bình của 

b) Chứng minh  là hình thang



**Bài 3**. a) Chứng minh  là hình chữ nhật

b) CHứng minh 

c) Gọi  lầ lượt là tâm của các nửa đường tròn đường kính  . GỌi  là tâm của hình chữ nhật  chứng minh  tương tự chứng minh được  là tiếp tuyến chung của các nửa dường tròn đường kính 

d) Vì  là hình chữ nhật  lớn nhất khi  lớn nhất mà  lớn nhất khi  là trung điểm của 

**Bài 4.** 

b) CHứng minh  là trung điểm của  từ đó chứng minh  là hình thoi ( tính chất hai đường chéo vuông góc vói nhau tại trung điểm mỗi đường)

c) Chứng minh được  là tiếp tuyến của 

d) Từ câu c, có  là phân giác của  chứng minh là phân giác của  là trực tâm tam giác 

**Bài 5.** a) CHứng minh

 mà  vuông tại  mà  từ đó chứng minh được  . CHứng minh  là trực tâm tam giác  mà  là đường cao, chứng minh được  thẳng hang



lớn nhất khi  là trung điểm của 

**ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4 ( PHẦN II)**

**Bài 1.** a) Chứng minh  là hình chữ nhất ( theo dấu hiện tứ giác có ba góc vuông)

b) Chứng minh: 

c) Chứng minh:  là tâm đường tròn đường kính  mà  nên  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính 



**Bài 2.**  cân vì đường cao  đồng thời là đường trung tuyến

 là tiếp tuyến của 



 nhỏ nhất khi  nhỏ nhất 

**Bài 3**.  cân vì  vừa là đường cao vừa là phân giác

b) Chứng minh  là tực tâm tam giác 

c) CHứng minh  là tiếp tuyến của 

d)  di chuyển trên  thì  di chuyển trên 

**Bài 4.**  tiếp xúc ngoài

 là hình thoi (theo dấu hiệu hai đường chéo vuông góc cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường)

c) Chứng minh  thẳng hang

d) Chứng minh  là tiếp tuyến của 

**Bài 5.** a) Chứng minh thẳng hang. Chứng minh  cùng nội tiếp đường tròn đường kính  nên  cùng thuộc một đường tròn

b) Chứng minh 

c)  và  là hai đường phân giác của tam giác là tâm đường tròn nội tiếp tam giác

d) Chứng minh  mà  là trung điểm của  nên  là trung trực của 

Bài 6. a) Chứng minh  và  nội tiếp đường tròn đường kính  nên  cùng thuộc một đường tròn. Tứ giác  là hình chữ nhật

b) Sử dụng định nghĩa để chứng minh đường tròn đường kính  và đường tròn đường kính  tiếp xúc ngoài với nhau tại  vì  và  nên  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn

c) Gọi là giao điểm của  và  . Chứng minh  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn

