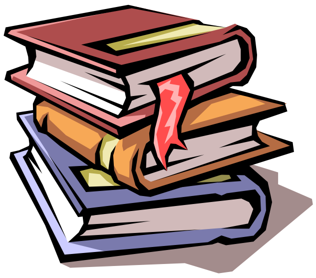
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



CÁC CHUYÊN ĐỀ
LUYỆN THI VÀO LỚP 10

Tài liệu sưu tầm, ngày 8 tháng 12 năm 2020

PHẦN I: ĐẠI SỐ

CHƯƠNG 1: RÚT GỌN BIỂU THỨC

Bình luận: Đây là dạng toán cơ bản nhất khi tham dự đề thi tuyển sinh vào lớp 10. Các em cần làm hết sức cẩn thận

I. RÚT GỌN BIỂU THỨC KHÔNG CHỨA CHỮ:

Bài 1 (Hưng Yên – 2010 -2011): Rút gọn biểu thức: $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$

Hướng dẫn:

Sử dụng: $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A}{B}}$

Lời giải:

$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{50}{2}}+\sqrt{\frac{48}{3}}=\sqrt{25}+\sqrt{16}=5+4=9$

Bài 2 (Khánh Hòa – 2010 – 2011): Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{5}\left(\sqrt{20}-3\right)+\sqrt{45}$

Hướng dẫn:

Sử dụng phép khai căn: $\sqrt{A^2B}=|A|\sqrt{B}$

Lời giải:

$A=\sqrt{5}\left(2\sqrt{5}-3\right)+3\sqrt{5}=2.5-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}=10$

Bài 3 (Quảng Ninh – 2010 – 2011):

a) So sánh hai số: $3\sqrt{5}$ và $\sqrt{29}$

b) Rút gọn biểu thức: $A=\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}+\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

Nhận xét:

Với ý 1, việc so sánh căn bậc hai của một số. Ta cần để ý: $\sqrt{A}>\sqrt{B}\leftrightarrow A>B$

Với ý 2, luôn luôn phải để ý: $A+\sqrt{B}$ và $A-\sqrt{B}$ là hai đại lượng liên hợp với nhau nên rất hay dùng để trục căn thức ở mẫu

Lời giải:

a) So sánh hai số: $3\sqrt{5}$ và $\sqrt{29}$

$45>29\Rightarrow 3\sqrt{5}>\sqrt{29}$

b) Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}+\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2+\left(3-\sqrt{5}\right)^2}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{9+6\sqrt{5}+5+9-6\sqrt{5}+5}{3^2-5}=\frac{14}{2}=7$$

Bài 4: (Bình Dương – 2014 – 2015): Rút gọn biểu thức:

$$A=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$$

Nhận xét: Ngoài nhân cả tử và mẫu với đại lượng liên hợp như bài 3 thì bài toán này còn lưu ý tới đẳng thức:

$$A+B\sqrt{C}=\left(X+Y\sqrt{C}\right)^2\leftrightarrow\begin{cases}A=X^2+CY^2\\B=2XY\end{cases}$$

Lời giải:

$$A=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{1}}=\left|\sqrt{2}+1\right|-\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2$$

Bài 5 (Đà Nẵng – 2010):

a) Rút gọn biểu thức $A=\left(\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{5}\right).\sqrt{5}$

b) Tính $B=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}-\sqrt{3}$

Lời giải:

a) Rút gọn biểu thức: $A=\left(\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{5}\right).\sqrt{5}=\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}\right)\sqrt{5}=10$

b) Tính $B=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}-\sqrt{3}=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}=-1$

Bài 6 (TP Hồ Chí Minh 2012 – 2013): Rút gọn biểu thức:

$$B=\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{26+15\sqrt{3}}-\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{26-15\sqrt{3}}$$

Bình luận: Đây là ý b trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10 TP Hồ Chí Minh năm 2012. Đây là một trong những minh họa cụ thể về cách đưa về ý tưởng: $\sqrt{m+n\sqrt{p}}=a+b\sqrt{c}$

Lời giải:

$$B=\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{26+15\sqrt{3}}-\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{26-15\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{52+30\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{52-30\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(3\sqrt{3}+5\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(3\sqrt{3}-5\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2-\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{3}+5\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2+\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{3}-5\right)=\sqrt{2}$$

Nhận xét: Cùng với ý tưởng của bài toán trên tuy nhiên ta có nhận xét một chút. Với bài toán trên ta có ngay: $m+n\sqrt{p}=\left(a+b\sqrt{c}\right)^2$ thì bài toán sau sẽ hơi khó hơn một "chút xíu"

Bài 7 (Đá Nẵng – 2012 – 2013): Rút gọn biểu thức $A=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)\sqrt{3+\sqrt{5}}$

Lời giải:

$$A=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)\sqrt{3+\sqrt{5}}=\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

$$=\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)=4$$

Bài 8 (TP Hồ Chí Minh – 2010 – 2011): Thu gọn các biểu thức sau:

$$A=\sqrt{12-6\sqrt{3}}+\sqrt{21-12\sqrt{3}}$$

$$B=5\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$$

Lời giải:

$$A=\sqrt{12-6\sqrt{3}}+\sqrt{21-12\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{3\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=3-\sqrt{3}+\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

$$B=5\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$$

$$2B=5\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}\right)^2$$

$$=5\left(\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}-\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}-\sqrt{3}\right)^2$$

$$=5\left(\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)-\sqrt{5}\right)^2+\left(\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{5}+1\right)-\sqrt{3}\right)^2$$

$$=5.3+5=20\Rightarrow B=10$$

Bài 9: Rút gọn $P=\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}+\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

Nhận xét: Bài toán là sự kết hợp của hai lí thuyết mà ta đã giới thiệu

Lời giải:

$$\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Do đó, ta có:

$$P=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right).\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right).\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}$$

$$P=\frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{3}=2$$

Vậy $P=2$

Bài 10: Thực hiện phép tính

a) $A=\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{17}}-\sqrt{5-\sqrt{17}}-\sqrt{10-4\sqrt{2}}+4}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}+2-\sqrt{2}}$

b) $B=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

c) Tính giá trị $B=\sqrt{1+2008^2+\dfrac{2008^2}{2009^2}}+\dfrac{2008}{2009}$

Phân tích và hướng dẫn giải

a) Tính: $\left[\sqrt{5+\sqrt{17}}-\sqrt{5-\sqrt{17}}-\sqrt{10-4\sqrt{2}}\right]\left[\sqrt{5+\sqrt{17}}-\sqrt{5-\sqrt{17}}+\sqrt{10-4\sqrt{2}}\right]$

$$=\left[\sqrt{5+\sqrt{17}}-\sqrt{5-\sqrt{17}}\right]^2-\left(10-4\sqrt{2}\right)=0$$

Mặt khác ta luôn có: $\sqrt{5+\sqrt{17}}-\sqrt{5-\sqrt{17}}+\sqrt{10-4\sqrt{2}}>0$

Vậy: $\sqrt{5+\sqrt{17}}-\sqrt{5-\sqrt{17}}-\sqrt{10-4\sqrt{2}}=0$

Tương tự chứng minh: $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{2}=0\Rightarrow A=\dfrac{4}{2}=2$

b) $B=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

- Biến đổi $2+\sqrt{3}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}$

- Tương tự $2-\sqrt{3}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}$

Vậy $B=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}=\sqrt{2}$

Vậy $B=\sqrt{2}$

c) Tính giá trị $B=\sqrt{1+2008^2+\dfrac{2008^2}{2009^2}}+\dfrac{2008}{2009}$

Ta có:

$$B=\sqrt{1+2008^2+\frac{2008^2}{2009^2}}+\frac{2008}{2009}=\sqrt{\left(1+2008\right)^2-2.1.2008+\frac{2008^2}{2009^2}}+\frac{2008}{2009}$$

$$=\sqrt{\left(2009\right)^2-2.2009.\frac{2008}{2009}+\frac{2008^2}{2009^2}}+\frac{2008}{2009}=\sqrt{\left(2009-\frac{2008}{2009}\right)^2}+\frac{2008}{2009}$$

$$=\left|2009-\frac{2008}{2009}\right|+\frac{2008}{2009}=2009-\frac{2008}{2009}+\frac{2008}{2009}=2009$$

Bài 11*: Rút gọn biểu thức:

$$P=\frac{1}{1+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}}+...+\frac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2005}}$$

Nhận xét: Bài toán này sử dụng phép trục căn thức bằng cách nhân đại lượng liên hợp với nó để đưa về cùng mẫu số và rút gọn tổng

Lời giải:

$$P=\frac{1}{\sqrt{5}+1}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{9}}+...+\frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2001}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{9}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{9}+\sqrt{5}\right)}+\frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{\left(\sqrt{13}-\sqrt{9}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{9}\right)}+...$$

$$...+\frac{\sqrt{2005}-\sqrt{2001}}{\left(\sqrt{2005}-\sqrt{2001}\right)\left(\sqrt{2005}+\sqrt{2001}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{4}+...+\frac{\sqrt{2005}-\sqrt{2001}}{4}=\frac{\sqrt{2005}-1}{4}$$

Vậy $P=\dfrac{\sqrt{2005}-1}{4}$

Bài 12*: Tính giá trị của tổng:

$$B=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}$$

Phân tích và hướng dẫn giải:

Xét $A=\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}\qquad a>0$

Ta có: $A^2=1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}=\frac{a^2(a+1)^2+(a+1)^2+a^2}{a^2(a+1)^2}$

$$=\frac{a^4+2a^2(a+1)+(a+1)^2}{a^2(a+1)^2}=\frac{\left(a^2+a+1\right)^2}{a^2(a+1)^2}$$

Vì $a>0, A>0$ nên $A=\frac{a^2+a+1}{a(a+1)}=1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$

Áp dụng ta có:

$$B=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(1+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=100-\frac{1}{100}=99,99$$

Nhận xét: Ta có thể sử dụng ý tưởng khai căn từ trong ra ngoài để chế tạo ra những bài toán có vẻ phức tạp nhưng lại rất dễ như sau:

Bài toán: Tính $A=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$

Lời giải:

Ta có $A=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}}}}$

$$=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\left(2+\sqrt{3}\right)}}}=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\left(5-\sqrt{3}\right)}}=\sqrt{9}=3$$

Vậy $A=3$

Nhận xét: Thông thường với bài toán rút gọn không chứa biến này khi xuất hiện trong đề thi thì thường nó sẽ xuất hiện thêm một ý phụ khác

Bài 13 (Quảng Trị - 2010 – 2011): Rút gọn biểu thức (Không dùng máy tính cầm tay):

1) $\sqrt{8}+\sqrt{18}-2\sqrt{2}$

2) $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}:\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ với $a>0, b>0, a\neq b$

Lời giải:

1) Ta có: $\sqrt{8}+\sqrt{18}-2\sqrt{2}=\sqrt{4.2}+\sqrt{9.2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

2) Với $a>0; b>0; a\neq b$ ta có:

$$\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}:\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b$$

Bài 14 (Hòa Bình – 2010 – 2011):

a) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy-2y^2}$

b) Rút gọn biểu thức: $B=\sqrt{20-10\sqrt{3}}+\sqrt{35-20\sqrt{3}}$

Lời giải:

a. Điều kiện: $x\neq 2y; x\neq -y$

$$A=\frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{(x+y)(x-2y)}=\frac{x^2-xy+y^2}{x-2y}$$

b. Ta có: $B=\sqrt{20-10\sqrt{3}}+\sqrt{35-20\sqrt{3}}=\sqrt{5}\left[\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}\right]$

$$=\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-1+2-\sqrt{3}\right)=\sqrt{5}$$

Bài 15 (Thái Bình – 2010 – 2011):

1. Rút gọn biểu thức: $A=\left(\dfrac{3}{x-3\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}\right).\dfrac{x-9}{\sqrt{x}}$ với $x>0, x\neq 9$

2. Chứng minh rằng: $\sqrt{5}.\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}\right)=10$

Lời giải:

1. Với điều kiện $x>0; x\neq 9$. Ta có:

$$A=\left(\frac{3}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)}+\frac{1}{\sqrt{x}+3}\right).\frac{x-9}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow A=\frac{3\left(\sqrt{x}+3\right)+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}(x-9)}.\frac{x-9}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{3\sqrt{x}+9+x-3\sqrt{x}}{x}\Leftrightarrow A=\frac{9+x}{x}$$

Kết luận: Vậy với $x>0; x\neq 9$ thì $A=\dfrac{9+x}{x}$

2. Ta có: $\sqrt{5}.\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}\right)=\sqrt{5}.\left(\dfrac{\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}\right)=\sqrt{5}.\dfrac{2\sqrt{5}}{5-4}=10$

Vậy: $\sqrt{5}.\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}\right)=10$

Bài 16 (Khánh Hòa – 2014 – 2015):

1) Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức:

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}}$$

2) Rút gọn biểu thức $B=\left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{a}-2}\right):\frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}$ với $a>0,a\neq 4$

Lời giải:

1. Ta có:

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}-\frac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{5}\right)}{2-\sqrt{5}}=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-1$$

2. Với $a>0,a\neq 4$ ta có:

$$B=\left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{a}-2}\right):\frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2}+\frac{a}{\sqrt{a}-2}\right).\frac{\left(\sqrt{a}-2\right)^2}{\sqrt{a}+1}=\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2}.\frac{\left(\sqrt{a}-2\right)^2}{\sqrt{a}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(1+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a}-2}.\frac{\left(\sqrt{a}-2\right)^2}{\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-2\right)$$

Bài 17 (TP Hồ Chí Minh – 2013 – 2014): Thu gọn các biểu thức sau:

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{3}{\sqrt{x}-3}\right).\frac{\sqrt{x}+3}{x+9}\text{ với } x\geq 0; x\neq 9$$

$$B=21\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2-6\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2-15\sqrt{15}$$

Lời giải:

Với $x\geq 0$ và $x\neq 9$ ta có: $A=\left(\frac{x-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}+9}{\left(\sqrt{x}+3\right).\left(\sqrt{x}-3\right)}\right).\frac{\sqrt{x}+3}{x+9}=\frac{1}{\sqrt{x}-3}$

$$B=\frac{21}{2}\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2-3\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2-15\sqrt{15}$$

$$=\frac{21}{2}\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{5}-1\right)^2-3\left(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}+1\right)^2-15\sqrt{15}$$

$$=\frac{15}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2-15\sqrt{15}=60$$

Bài 18 (Hưng Yên – 2012 – 2013):

a) Tìm x biết: $3x+\sqrt{2}=2\left(x+\sqrt{2}\right)$

b) Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{3}$

Lời giải:

a) Tìm x biết $3x+\sqrt{2}=2\left(x+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow 3x+\sqrt{2}=2x+2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$. Vậy $x=\sqrt{2}$

b) Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{3}=\left|1-\sqrt{3}\right|-\sqrt{3}=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}=-1$

Vậy $A=-1$

Bài 19 (Đồng Nai – 2012 – 2013):

1/ Tính: $P=\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)\dfrac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}$

2/ Chứng minh: $a^5+b^5\ge a^3b^2+a^2b^3$, biết rằng $a+b\ge 0$

Lời giải:

1/ Tính: $P=\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right).\dfrac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{4-3}.\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}=2$

2/ Ta có:

$a^5+b^5\ge a^3b^2+a^2b^3\Leftrightarrow a^5+b^5-a^3b^2-a^2b^3\ge 0$

$\Leftrightarrow a^3\left(a^2-b^2\right)-b^3\left(a^2-b^2\right)\ge 0\Leftrightarrow\left(a^3-b^3\right)\left(a^2-b^2\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2\left(a+b\right)\left(a^2+b^2+ab\right)\ge 0$

Vì: $\left(a-b\right)^2\ge 0$ (với mọi $a,b\in\mathbb{R}$)

$a+b\ge 0$ (theo giả thiết)

$a^2+b^2+ab\ge 0$ (với mọi $a,b\in\mathbb{R}$)

Nên bất đẳng thức cuối đúng. Vậy $a^5+b^5\ge a^3b^2+a^2b^3$ với $a+b\ge 0$ (đpcm)

Nhận xét: Với phần 2 này, chúng ta cần tinh ý để chuyển hết về một vế, sau đó tìm cách vận dụng các hằng đẳng thức. Thường thì với những bài toán chứng minh bất đẳng thức chúng ta cần vận dụng nhuần nhuyễn các hằng đẳng thức và các bất đẳng thức đã học

Bài 20: (HSG Bắc Giang 2013)

1) Tính giá trị của biểu thức $A=\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$

2) Rút gọn biểu thức

$$P=\left(\frac{\sqrt{a-2}+2}{3}\right).\left(\frac{\sqrt{a-2}}{3+\sqrt{a-2}}+\frac{a+7}{11-a}\right):\left(\frac{3\sqrt{a-2}+1}{a-3\sqrt{a-2}-2}-\frac{1}{\sqrt{a-2}}\right)$$

Lời giải:

1) Ta có:

$A=\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$

$=\sqrt[3]{8+3.2^2\sqrt{3}+3.2.\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^3}-\sqrt[3]{8-3.2^2\sqrt{3}+3.2.\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^3}$

$=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{3}\right)^3}-\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^3}=\left(2+\sqrt{3}\right)-\left(2-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$

Vậy $A=2\sqrt{3}$

2) Điều kiện: $2<a\neq 11$

Đặt $x=\sqrt{a-2}\left(0<x\neq 3\right)\Rightarrow a=x^2+2$

Tính được: $P=\dfrac{\left(x+2\right)}{3}.\left(\dfrac{x}{3+x}+\dfrac{x^2+9}{9-x^2}\right):\left(\dfrac{3x+1}{x^2-3x}-\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\frac{\left(x+2\right)}{3}.\left(\frac{3\left(x+3\right)}{9-x^2}\right):\left(\frac{2x+4}{x\left(x-3\right)}\right)=\frac{\left(x+2\right)}{3-x}.\frac{x\left(x-3\right)}{2x+4}=-\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{a-2}}{2}$$

Lưu ý: Với phần 2, vì biểu thức dưới mẫu có biến số nên nhất thiết phải đặt điều kiện để biểu thức có nghĩa

Bài 21: Trục căn thức ở mẫu số của biểu thức: $A=\dfrac{1}{1+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}}$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng hằng đẳng thức:

$a^3+b^3+c^3-3abc=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$

Ta coi mẫu số của A có dạng $a+b+c$.

Khi đó nhân tử số và mẫu số của A với $\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$, ta có:

$$A=\frac{1^2+\left(3\sqrt[3]{2}\right)^2+\left(-2\sqrt[3]{4}\right)^2-1.3\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}\left(-2\sqrt[3]{4}\right)-\left(-2\sqrt[3]{4}\right).1}{1^3+\left(3\sqrt[3]{2}\right)^3-\left(2\sqrt[3]{4}\right)^3-3.1.3\sqrt[3]{2}.\left(-2\sqrt[3]{4}\right)}$$

$$=\frac{13+11\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{2}}{59}$$

II. RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ CHỨA CHỮ:

A. Dạng tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa:

Nhận xét: Đối với dạng toán này nguyên tắc xác định điều kiện của biểu thức là:

+ Nếu có căn bậc hai (tổng quát là căn bậc chẵn) thì biểu thức trong căn thức phải không âm

+ Nếu có phân thức thì mẫu số phải khác 0

Bài 1 (Vĩnh Phúc – 2012 – 2013): Cho biểu thức: $P=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{6x-4}{x^2-1}$

1. Tìm điều kiện xác định của biểu thức P

2. Rút gọn P

Lời giải:

1. Biểu thức P xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\neq 0 \\ x+1\neq 0 \\ x^2-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -1 \end{cases}$

2. Với $x\neq \pm 1$ ta có:

$$P=\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{6x-4}{(x+1)(x-1)}=\frac{x(x+1)+3(x-1)-(6x-4)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x^2+x+3x-3-6x+4}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-2x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x+1};(x\neq \pm 1)$$

Bài 2 (Bắc Ninh – 2012 – 2013):

1) Tìm giá trị của x để các biểu thức có nghĩa: $\sqrt{3x-2};\frac{4}{\sqrt{2x-1}}$

2) Rút gọn biểu thức: $A=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

Lời giải:

1) $\sqrt{3x-2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 3x-2\geq 0\Leftrightarrow 3x\geq 2\Leftrightarrow x\geq \frac{2}{3}$

$\frac{4}{\sqrt{2x-1}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 2x-1>0\Leftrightarrow 2x>1\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

2) $A=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2^2-\sqrt{3^2}}}=\frac{2^2-\sqrt{3^2}}{1}=1$

Bài 3 (Lào Cai – 2012 – 2013):

1. Thực hiện phép tính:

a) $\sqrt[3]{2-10}-\sqrt{36+64}$

b) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-5\right)^3}$

2. Cho biểu thức: $P=\frac{2a^2+4}{1-a^3}-\frac{1}{1+\sqrt{a}}-\frac{1}{1-\sqrt{a}}$

a) Tìm điều kiện của a để P xác định

b) Rút gọn biểu thức P

Lời giải:

1. Thực hiện phép tính:

a) $\sqrt[3]{2-10}-\sqrt{36+64}=\sqrt[3]{-8}-\sqrt{100}=-2-10=-12$

b) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-5\right)^3}=\left|\sqrt{2}-3\right|+\sqrt{2}-5=3-\sqrt{2}+\sqrt{2}-5=-2$

2. Ta có:

a) P xác định khi $a\geq 0; a\neq 1$

b) Rút gọn biểu thức P:

$$P=\frac{2a^2+4}{1-a^3}-\frac{1}{1+\sqrt{a}}-\frac{1}{1-\sqrt{a}}=\frac{2a^2+4-\left(1-\sqrt{a}\right)\left(a^2+a+1\right)-\left(1+\sqrt{a}\right)\left(a^2+a+1\right)}{\left(1-a\right)\left(a^2+a+1\right)}$$

$$=\frac{2a^2+4-a^2-a-1+a^2\sqrt{a}+a\sqrt{a}+\sqrt{a}-a-1-a^2\sqrt{a}-a\sqrt{a}-\sqrt{a}}{\left(1-a\right)\left(a^2+a+1\right)}$$

$$=\frac{2-2a}{\left(1-a\right)\left(a^2+a+1\right)}=\frac{2}{a^2+a+1}$$

Vậy với $a\geq 0; a\neq 1$ thì $P=\dfrac{2}{a^2+a+1}$

Bài 4 (Phú Yên – 2010 – 2011):

a) Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy rút gọn biểu thức:

$A=\sqrt{12}-2\sqrt{48}+3\sqrt{75}$

b) Cho biểu thức $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-2\sqrt{x}+1}\right).\dfrac{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

Với những giá trị nào của x thì biểu thức trên xác định? Hãy rút gọn biểu thức B

Lời giải:

a) $A=\sqrt{12}-2\sqrt{48}+3\sqrt{75}=2\sqrt{3}-8\sqrt{3}+15\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

b) Điều kiện xác định: $x>0$ và $x\neq 1$

$$B=\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1}-\frac{\sqrt{x}+2}{x-2\sqrt{x}+1}\right).\frac{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x-1\right)}.\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x-1\right)}{\sqrt{x}}=6$$

Bài 5 (Hải Dương – 2010 – 2011): Rút gọn biểu thức

$N=\left(3+\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right).\left(3-\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$ với $a\geq 0$ và $a\neq 1$

Gợi ý giải:

$\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}=\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}$ $\qquad$ $\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}=\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}{\sqrt{a}-1}=\sqrt{a}$

$N = \left(3+\sqrt{a}\right).\left(3-\sqrt{a}\right) = 9-a$

Bài 6 (TP Hồ Chí Minh – 2012 – 2013): Thu gọn biểu thức sau:

$A = \dfrac{1}{x+\sqrt{x}} + \dfrac{2\sqrt{x}}{x-1} - \dfrac{1}{x-\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$

Gợi ý giải:

$$A = \frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} = \frac{x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}}{x^2-x} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$$

$$= \frac{-2\sqrt{x}}{x\left(x-1\right)} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1} = \frac{2\sqrt{x}}{x-1}\left[-\frac{1}{x}+1\right] = \frac{2\sqrt{x}\left(x-1\right)}{x\left(x-1\right)} = \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 1$$

Bài 7 (Đắk Lắk – 2012 – 2013): Rút gọn biểu thức: $A = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$; với $x \geq 0$

Gợi ý giải:

$$A = \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)\left(x+\sqrt{x}\right) = \left(\frac{\sqrt{x}+1-1}{\sqrt{x}+1}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) = x, \text{ với } x \geq 0$$

Bài 8 (Kiên Giang – 2012 – 2013):

1/ Rút gọn: $A = \left(3+\sqrt{2}+\sqrt{11}\right)\left(3+\sqrt{2}-\sqrt{11}\right)$

2/ Chứng minh rằng với a không âm, a khác 1, b tùy ý, ta có: $\dfrac{ab+\sqrt{a}-b\sqrt{a}-1}{a-1} = \dfrac{b\sqrt{a}+1}{1+\sqrt{a}}$

Gợi ý giải:

1. $A = \left(3+\sqrt{2}+\sqrt{11}\right)\left(3+\sqrt{2}-\sqrt{11}\right) = \left(3+\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{11}^2 = 9+6\sqrt{2}+2-\sqrt{11} = 6\sqrt{2}$

2. Với $a \geq 0; a \neq 1$ và b tùy ý ta có:

$$\frac{ab+\sqrt{a}-b\sqrt{a}-1}{a-1} = \frac{b\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)+\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(1+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-1\right)} = \frac{\left(b\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(1+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-1\right)} = \frac{b\sqrt{a}+1}{1+\sqrt{a}}$$

Bài 9 (Hồ Chí Minh 2014 – 2015): Thu gọn các biểu thức

$$A = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$B = \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3}\right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}}\right) \left(x > 0\right)$$

Lời giải:

Ta có: $A=\dfrac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}-\dfrac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

$$=\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}+\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}-\frac{3\sqrt{5}\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$$

$$=3\sqrt{5}-5+\frac{5+\sqrt{5}}{4}-\frac{9\sqrt{5}-15}{4}=3\sqrt{5}-5+\frac{5+\sqrt{5}-9\sqrt{5}+15}{4}=\sqrt{5}$$

Với $x>0$ ta có:

$$B=\left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x+3\sqrt{x}}\right)(x>0)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}:\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)+6}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}=\left(\sqrt{x}+1\right).\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=1$$

Bài 10: Cho $a>2$ chứng minh đẳng thức

$$\frac{a^2-3a-(a-1)\sqrt{a^2-4}+2}{a^2+3a-(a+1)\sqrt{a^2-4}+2}.\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}=\frac{1-a}{1+a}$$

Lời giải:

Biến đổi vế trái ta có:

$$\frac{a^2-3a-(a-1)\sqrt{a^2-4}+2}{a^2+3a-(a+1)\sqrt{a^2-4}+2}.\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}=\frac{a^2-3a-(a-1)\sqrt{a^2-4}+2}{a^2+3a-(a+1)\sqrt{a^2-4}+2}.\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}$$

$$=\frac{\left(a^2-3a+2\right)-(a-1)\sqrt{a^2-4}}{\left(a^2+3a+2\right)-(a+1)\sqrt{a^2-4}}.\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}$$

$$=\frac{(a-1)(a-2)-(a-1)\sqrt{(a-2)(a+2)}}{(a+1)(a+2)-(a+1)\sqrt{(a-2)(a+2)}}.\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}$$

$$=\frac{(a-1)\left(\sqrt{a-2}\right)\left(\sqrt{a-2}-\sqrt{a+2}\right)}{(a+1)\left(\sqrt{a+2}\right)\left(\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}\right)}.\frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{a-2}}=\frac{1-a}{1+a}$$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh

Bài 11: Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn: $b\neq c,\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{c},a+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$

Chứng minh đẳng thức: $\dfrac{a+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2}{b+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

Lời giải:

$a+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ \right)^2 \Leftrightarrow a+b=a+b+c+2\sqrt{ab}-2\sqrt{ac}-2\sqrt{bc}$

$\Leftrightarrow c=2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}-2\sqrt{ab}$

Ta có: $\dfrac{a+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2}{b+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}=\dfrac{a+a-2\sqrt{ac}+c}{b+b-2\sqrt{bc}+c}$ (*)

Thay $c=2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}-2\sqrt{ab}$ với (*)

Ta có:

$$\frac{a+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2}{b+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}=\frac{a+a-2\sqrt{ac}+c}{b+b-2\sqrt{bc}+c}=\frac{2a+2b-2b+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}-2\sqrt{ab}-2\sqrt{ac}}{2a+2b-2a+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}}$$

$$=\frac{(a+b)-b+\sqrt{bc}-\sqrt{ab}}{(a+b)-a+\sqrt{ac}-\sqrt{ab}}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2-\sqrt{b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}+\sqrt{b}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh

B. Dạng tính giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến:

Bài 1 (Bình Dương – 2010 – 2011): Rút gọn $M=\sqrt{16x^2+8x+1}$. Tính giá trị của M tại $x=2$

Phân tích và hướng dẫn giải:

$M=\sqrt{16x^2+8x+1}=\sqrt{(4x+1)^2}=|4x+1|$

Thay $x=2$ vào M ta có: $\Rightarrow M=|4.2+1|=|9|=9$

Bài 2 (Khánh Hòa – 2013 – 2014):

1) Chứng minh: $\left(\sqrt{22}-3\sqrt{2}\right)\sqrt{10+3\sqrt{11}}=2$

2) Cho biểu thức $P=\dfrac{a\left(\sqrt{a}-1\right)}{a-1}-\dfrac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}$ với $a>0$ và $a\neq 1$

Rút gọn rồi tính giá trị của P tại $a=2014^2$

Phân tích và hướng dẫn giải

1) Chứng minh: $\left(\sqrt{22}-3\sqrt{2}\right)\sqrt{10+3\sqrt{11}}=2$

Ta có: $\left(\sqrt{22}-3\sqrt{2}\right)\sqrt{10+3\sqrt{11}}=\sqrt{2}\left(\sqrt{11}-3\right)\sqrt{10+3\sqrt{11}}$

$$=\left(\sqrt{11}-3\right)\sqrt{20+6\sqrt{11}}=\left(\sqrt{11}-3\right)\sqrt{\left(\sqrt{11}+3\right)^2}$$

$$=\left(\sqrt{11}-3\right)\left(\sqrt{11}+3\right)=11-9=2$$

2) $P=\dfrac{a\left(\sqrt{a}-1\right)}{a-1}-\dfrac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}$ (ĐK: $a>0$ và $a\neq 1$)

Ta có: $P=\dfrac{a\left(\sqrt{a}-1\right)}{a-1}-\dfrac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}=\dfrac{a}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}=\dfrac{a-1}{\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}-1$

Với $a=2014^2$, ta có: $P=\sqrt{2014^2}-1=2014-1=2013$

Bài 3 (Hải Dương – 2012 – 2013) Cho biểu thức:

$A=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{a}{b-a}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{a}{a+b+2\sqrt{ab}}\right)$ với a và b là các số dương khác nhau

a) Rút gọn biểu thức $A-\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a}$

b) Tính giá trị của A khi $a=7-4\sqrt{3}$ và $b=7+4\sqrt{3}$

Phân tích và hướng dẫn giải:

Với điều kiện a,b là các số dương khác nhau ta có:

$$A=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{a}{b-a}\right):\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}}\right)$$

$$A=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{a}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}\right):\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{a}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}\right]$$

$$A=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)+a}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}:\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-a}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}$$

$$A=\frac{\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}.\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}}$$

$$A=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$$

a) Ta có:

$$A-\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{b-a}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{b-a}=0$$

Vậy $A-\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a}=0$

b) Ta có: $a=7-4\sqrt{3}=4-4\sqrt{3}+3=\left(2-\sqrt{3}\right)^2\to\sqrt{a}=2-\sqrt{3}$

$$b=7+4\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}+3=\left(2+\sqrt{3}\right)^2\to\sqrt{b}=2+\sqrt{3}$$

Thay $\sqrt{a}=2-\sqrt{3};\sqrt{b}=2+\sqrt{3}$ vào biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$ ta được:

$$A=\frac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy với $a=7-4\sqrt{3};b=7+4\sqrt{3}$ thì $A=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Bài 4 (Bắc Ninh – 2013 – 2014):

a) Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0, x\ne 1$

b) Cho $x=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right).\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$, tính giá trị của biểu thức $P=\left(x^2+4x-2\right)^{2013}$

Phân tích và hướng dẫn giải

a. $A=\dfrac{x+2+x+\sqrt{x}-2-x-\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

$$=\frac{x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=1$$

b. $x=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right).\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}}{\sqrt{\left(\sqrt{20}+1\right)^2}+3}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{20}+4}=\dfrac{2}{2\left(\sqrt{5}+2\right)}=\sqrt{5}-2$

$$\Rightarrow x^2+4x-1=0\Rightarrow P=-1$$

Bài 5 (Quảng Ngãi – 2014 – 2015):

Cho biểu thức $A:\left(4x^5+4x^4-5x^3+5x-2\right)^{2014}+2015$

Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$

Phân tích và hướng dẫn giải:

Ta có: $x=\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

$\Rightarrow x^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}; x^3=x.x^2=\frac{5\sqrt{2}-7}{8}; x^4=\left(x^2\right)^2=\frac{17-12\sqrt{2}}{16}; x^5=x.x^4=\frac{29\sqrt{2}-41}{32}$

Do đó: $4x^5+4x^4-5x^3+5x-2$

$=\frac{29\sqrt{2}-41+34-24\sqrt{2}-25\sqrt{2}+35+20\sqrt{2}-20-16}{8}=-1$

Vậy $A=\left(4x^5+4x^4-5x^3+5x-2\right)^{2014}+2015$

$=\left(-1\right)^{2014}+2015=1+2015=2016$

C. Dạng tìm giá trị của biến khi biết giá trị của biểu thức:

Bài 1 (Hà Tĩnh – 2012 – 2013): Cho biểu thức $P=\left(\frac{4a}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}}\right).\frac{\sqrt{a}-1}{a^2}$ với $a>0$ và $a\neq 1$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Với những giá trị nào của a thì $P=3$

Lời giải:

a) Với $0<a\neq 1$ thì ta có:

$P=\left(\frac{4a}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}}\right).\frac{\sqrt{a}-1}{a^2}=\frac{4a-1}{\sqrt{a}-1}.\frac{\sqrt{a}-1}{a^2}=\frac{4a-1}{a^2}$

b) Với $0<a\neq 1$ thì $P=3\Leftrightarrow \frac{4a-1}{a^2}=3\Leftrightarrow 3a^2=4a-1\Leftrightarrow 3a^2-4a+1=0$

$\Leftrightarrow a=1$ (loại) hoặc $a=\frac{1}{3}$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy $a=\frac{1}{3}$

Bài 2 (Bình Dương – 2012 – 2013): Cho biểu thức: $A=\frac{2}{5}\sqrt{50x}-\frac{3}{4}\sqrt{8x}$

1/ Rút gọn biểu thức A

2/ Tính giá trị của x khi $A=1$

Lời giải:

1/ Điều kiện xác định: $x\geq 0$

$A=\frac{2}{5}\sqrt{50x}-\frac{3}{4}\sqrt{8x}=\frac{2}{5}\sqrt{25.2x}-\frac{3}{4}\sqrt{4.2x}=2\sqrt{2x}-\frac{3}{2}\sqrt{2x}=\frac{1}{2}\sqrt{2x}$

Vậy với $x\geq 0$ thì $A=\frac{1}{2}\sqrt{2x}$

2/ Khi $A=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2x}=1\Leftrightarrow \sqrt{2x}=2\Leftrightarrow 2x=4\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy khi $A=1$ giá trị của $x=2$

Bài 3 (Cần Thơ – 2012 – 2013): Cho biểu thức: $K=2\left(\frac{1}{\sqrt{a}-1}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right):\left(\frac{\sqrt{a}+1}{a^2-a}\right)$ (với $a>0, a\neq 1$)

1. Rút gọn biểu thức K

2. Tìm a để $K=\sqrt{2012}$

Lời giải:

Với $a>0; a\neq 1$ ta có:

$$K=2\left(\frac{1}{\sqrt{a}-1}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right):\left(\frac{\sqrt{a}+1}{a^2-a}\right)=2\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}\right):\left(\frac{\sqrt{a}+1}{a(a-1)}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}\right):\left(\frac{1}{a\left(\sqrt{a}-1\right)}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}\right):\left(a\left(\sqrt{a}-1\right)\right)=2\sqrt{a}$$

$K=\sqrt{2012}\Leftrightarrow 2\sqrt{a}=\sqrt{2012}\Leftrightarrow a=503$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $a=503$

Bài 4 (Trà Vinh – 2012 – 2013): Cho biểu thức $A=\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}+1$

1) Rút gọn biểu thức A

2) Tìm x để $A=-3$

Lời giải:

1) Điều kiện: $x\geq 0, x\neq 1$

Ta có: $A=\frac{\sqrt{x}+1-\left(\sqrt{x}-1\right)+x-1}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}$

2) Ta có: $A=-3\Leftrightarrow\frac{x+1}{x-1}=-3\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Kết luận: $x=\frac{1}{2}$

Bài 5: Cho biểu thức: $P=\left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}+\frac{2x}{9-x}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa và rút gọn P

b) Tìm giá trị x để $P=-\frac{4}{3}$

Lời giải:

1) Điều kiện xác định: $x>0; x\neq 9; x\neq 25$

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)+2x}{\left(3+\sqrt{x}\right)\left(3-\sqrt{x}\right)}\right):\left(\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)-2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)}\right)$$

$$P=\frac{\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)}{\left(3+\sqrt{x}\right)\left(3-\sqrt{x}\right)}.\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)}{5-\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}-5}$$

2) $P=\frac{-4}{3}\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x}-5}=\frac{-4}{3}\Leftrightarrow 3x+4\sqrt{x}-20=0\Leftrightarrow 3x-6\sqrt{x}+10\sqrt{x}-20=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)\left(3\sqrt{x}+10\right)=0\Leftrightarrow x=4$

Bài 6: Cho biểu thức:

$$A=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right]:\frac{\sqrt{x^3}+y\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{xy^3}+\sqrt{x^3y}}$$

a) Rút gọn A

b) Tìm $x;y$ biết $xy=\frac{1}{36};A=5$

Lời giải:

a) Ta có:

$$A=\left[\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}.\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{x+y}{xy}\right]:\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)+\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}\left(x+y\right)}\frac{1}{2}$$

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{xy}.\frac{\sqrt{xy}\left(x+y\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x+y\right)}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$$

b) $A=5\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\sqrt{xy}\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{5}{6}$. Mặt khác, theo giả thiết ta có: $\sqrt{xy}=\frac{1}{6}$

Theo định lí Viet đảo $\sqrt{x};\sqrt{y}$ là nghiệm dương của phương trình bậc hai:

$t^2-\frac{5}{6}t+\frac{1}{6}=0\Leftrightarrow 6t^2-5t+1=0\ \ \Delta=1\Rightarrow t_1=\frac{1}{2};t_2=\frac{1}{3}$

Vậy $\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right);\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$

D. Một số dạng toán hay gặp khác:

Bài 1 (Lào Cai – 2013 – 2014):

1. Thực hiện phép tính: a) $\sqrt{3}.\sqrt{12}$

b) $3\sqrt{20}+\sqrt{45}-2\sqrt{80}$

2. Cho biểu thức: $P=\left(\frac{1}{\sqrt{a}-1}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right):\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2}-\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$ với $a>0;a\neq 1;a\neq 4$

a) Rút gọn P

b) So sánh giá trị của P với số $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn:

Việc so sánh một biểu thức với một số thì bản chất là rút gọn biểu thức rồi so sánh. Nếu nhìn thấy bất đẳng thức hiển nhiên thì không có vấn đề gì để nói. Nếu như không hiển nhiên thì việc làm sẽ là xét hiệu của biểu thức và số rồi biến đổi

Lời giải:

1. Thực hiện phép tính:

a) $\sqrt{3}.\sqrt{12}=\sqrt{36}=6$

b) $3\sqrt{20}+\sqrt{45}-2\sqrt{80}=6\sqrt{5}+3\sqrt{5}-8\sqrt{5}=\sqrt{5}$

2. Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2}-\dfrac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$ với $a>0;a\neq 1;a\neq 4$

a) Với điều kiện $a>0;a\neq 1;a\neq 4$ ta có:

$$P=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}:\left(\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}-\frac{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}.\frac{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}{(a-1)-(a-4)}=\frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}}$$

b) So sánh giá trị của P với số $\dfrac{1}{3}$

Xét hiệu: $P-\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{a}-2-\sqrt{a}}{3\sqrt{a}}=\dfrac{-2}{3\sqrt{a}}$

Do $a>0$ nên $3\sqrt{a}>0$ suy ra hiệu nhỏ hơn 0 tức là $P<\dfrac{1}{3}$

Bài 2 (Khánh Hòa – 2012 – 2013):

1) Đơn giản biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

2) Cho biểu thức: $P=a-\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}\right);(a\geq 1)$

Rút gọn P và chứng tỏ $P\geq 0$

Lời giải:

1) $A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{6}+\sqrt{8}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=1+\sqrt{2}$

2) Ta có: $P=a-\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}-\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{a-a+1}\right);a\geq 1$

$$=a-2\sqrt{a-1}=a-1-2\sqrt{a-1}+1;(a\geq 1)\Rightarrow P=\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2\geq 0;\forall a\geq 1$$

Vậy $P \geq 0$

Bình luận: Bài toán tương tự:

Bài toán: Cho biểu thức: $P = \left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}} + \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1+x-\sqrt{1+x}} \right)^2 . \left(\dfrac{x^2-1}{2} \right) + 1$

a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa và rút gọn P

b) Tìm x để $P \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải:

1) P có nghĩa khi: $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \\ 1-x+\sqrt{1-x} \neq 0 \\ 1+x-\sqrt{1+x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \\ x \neq 0, x \neq 1 \\ x \neq 0 . x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0; 0 < x < 1$

Rút gọn P:

$$P = \left[\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}+1\right)} + \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)} \right]^2 . \left(\frac{x^2-1}{2} \right) + 1$$

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)^2 . \left[\frac{(1+x)(1-x)}{-2} \right] + 1$$

$$P = \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2}{(1-x)(1+x)} . \frac{(1-x)(1+x)}{-2} + 1$$

$$P = \frac{1+x+1-x-2\sqrt{(1+x)(1-x)}}{-2} + 1$$

$$P = \frac{2-\sqrt{1-x^2}-2}{-2} = \sqrt{1-x^2}$$

Vậy với $-1 < x < 0$ và $0 < x < 1$ thì $P = \sqrt{1-x^2}$

2) $P \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 1-x^2 \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow |x| \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$

Kết hợp với điều kiện $1 < x < 0$ và $0 < x < 1$ ta có: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1 \\ -1 < x \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$ thì $P \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 3 (Hà Nội – 2010 – 2011): Cho biểu thức:

$A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+9}{x-9}$, với $x\ge 0$ và $x\ne 9$

1) Rút gọn biểu thức A 2) Tìm giá trị của x để $A=\frac{1}{3}$

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

Lời giải:

1. $A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+9}{x-9}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)+2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-\left(3x+9\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-3x-9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{3\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{3\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

2. $A=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\sqrt{x}+3=9\Leftrightarrow\sqrt{x}=6\Leftrightarrow x=36$ (thỏa mãn điều kiện)

3. $\sqrt{x}+3\ge 3\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}+3}\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{x}+3}\le\frac{3}{3}=1$

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 1, khi $x=0$ (thỏa mãn điều kiện)

Nhận xét: Tương tự ta có bài toán sau:

Bài toán: Cho biểu thức $P=\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}};Q=x^4-7x^2+15$ (với $x>0,x\ne 1$)

a) Rút gọn P

b) Với giá trị nào của x thì $Q-4P$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải:

$$P=\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\sqrt{x}\left(\sqrt{x^3}-1\right)$$

$$P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)=x-1$$

$$Q-4P=x^4-7x^2+15-4\left(x-1\right)$$

$$=\left(x^4-8x^2+16\right)+\left(x^2-4x+4\right)-1=\left(x^2-4\right)^2+\left(x-2\right)^2-1$$

$\rightarrow Q-4P\ge -1$

Dấu "=" xảy ra khi: $x=2$. Vậy giá trị nhỏ nhất $Q-4P$ là -1

Bài 4 (Hà Nội – 2012 – 2013):

1) Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của A khi $x=36$

2) Rút gọn biểu thức $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}+\dfrac{4}{\sqrt{x}-4}\right):\dfrac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x\ge 0; x\ne 16$)

3) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị của x nguyên để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên

Nhận xét: Bài toán này có ba ý. Rõ ràng, trong ý đầu tiên, do biểu thức đơn giản nên việc thay số vào biểu thức là cách suy nghĩ cơ bản nhất. Với ý thứ hai, việc rút gọn sẽ bắt đầu từ những biểu thức trong ngoặc trước. Hai đại lượng $\sqrt{x}+4$ và $\sqrt{x}-4$ giúp ta liên tưởng đến phép nhân liên hợp $\left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-4\right)=x-16$. Đối với ý thứ ba là ý hơi nâng cao chút nhưng không quá khó vì ta chỉ cần đưa về dạng: $\dfrac{a}{f(x)}$

Trong đó a là một số nguyên và $f(x)$ là đa thức với biến x khi đó, $f(x)$ chỉ cần là ước của a là giải được

Lời giải:

1) Với $x=36$, ta có: $A=\dfrac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2}=\dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}$

2) Với $x\ge 0, x\ne 16$, ta có:

$$B=\left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)}{x-16}+\frac{4\left(\sqrt{x}+4\right)}{x-16}\right)\frac{\sqrt{x}+2}{x+16}=\frac{(x+16)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-16)(x+16)}=\frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$$

3) Ta có: $B(A-1)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-16}.\left(\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}-1\right)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-16}.\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{2}{x-16}$

Để $B(A-1)$ nguyên, x nguyên thì $x-16$ là Ư(2) $=$

Ta có bảng giá trị tương ứng:

$x-16$	1	-1	2	-2
x	17	15	18	14

Kết hợp điều kiện: $x\ge 0, x\ne 16$, để $B(A-1)$ nguyên thì $x\in\{14;15;17;18\}$

Nhận xét: Tương tự với bài toán 5 sau:

Bài 5 (Gia Lai – 2012 – 2013): Cho biểu thức

$Q=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$, với $x>0, x\ne 1$

a. Rút gọn biểu thức Q

b. Tìm các giá trị nguyên của x để Q nhận giá trị nguyên

Lời giải:

a. $Q=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$

$=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}\right)\sqrt{x}=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1+1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-1-1}{\sqrt{x}-1}\right)\sqrt{x}$

$=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)\sqrt{x}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{x-1}.\sqrt{x}$

$=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}.\sqrt{x}=\dfrac{2x}{x-1}$

Vậy $Q=\dfrac{2x}{x-1}$

b. Q nhận giá trị nguyên

$Q=\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2x-2+2}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$

$Q\in\mathbb{Z}$ khi $\dfrac{2}{x-1}\in\mathbb{Z}$ hay là 2 chia hết cho $x-1$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=\pm1\\x-1=\pm2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=-1\\x=3\end{array}\right.$ đối chiếu điều kiện thì $\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$

Bình luận: Ngoài hướng suy nghĩ trên ta có thể dùng thêm hướng suy nghĩ chặn giá trị của biểu thức rồi từ tính nguyên thi biểu thức chỉ nhận một số giá trị cụ thể và từ đó tính ra giá trị của biến

Bài 6 (Thái Bình – 2012 – 2013):

1) Tính: $A=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

2) Cho biểu thức: $B=\dfrac{2\left(x+4\right)}{x-3\sqrt{x}-4}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{8}{\sqrt{x}-4}$ với $x\geq0,x\neq16$

a) Rút gọn B

b) Tìm x để giá trị của B là một số nguyên

Lời giải:

1. $A=\dfrac{\sqrt{5}-2}{5-4}-\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}=\sqrt{5}-2-\sqrt{5}-2=-4$

2. Ta có:

a. Với $x\ge 0, x\ne 16$, thì:

$$B=\frac{2\left(x+4\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{8}{\sqrt{x}-4}=\frac{2x+8+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)-8\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}$$

$$=\frac{2x+8+x-4\sqrt{x}-8\sqrt{x}-8}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}=\frac{3x-12\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}$$

$$=\frac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy $B=\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0, x\ne 16$

b. Dễ thấy $B\ge 0$ (vì $\sqrt{x}\ge 0$)

Lại có: $B=3-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}<3$ (vì $\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}>0\forall x\ge 0, x\ne 16$)

Suy ra: $0\le B<3\Rightarrow B\in\left\{0;1;2\right\}$ (vì $B\in\mathbb{Z}$)

- Với $B=0\Rightarrow x=0$

- Với $B=1\Rightarrow \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=1\Leftrightarrow 3\sqrt{x}=\sqrt{x}+1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$

- Với $B=2\Rightarrow \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=2\Leftrightarrow 3\sqrt{x}=2\left(\sqrt{x}+1\right)\Leftrightarrow x=4$

Vậy để $B\in\mathbb{Z}$ thì $x\in\left\{0;\dfrac{1}{4};4\right\}$

Bài 7 (Lạng Sơn – 2010 – 2011):

Cho biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-1$ với $x\ge 0, x\ne 1$

a) Rút gọn P

b) Tìm tất cả các số nguyên x để P là một số nguyên

Lời giải:

a) $P=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-1$ với $x\ge 0, x\ne 1$

$$P=\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}-1=\frac{\sqrt{x}+1-\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1-x+1}{x-1}=\frac{-x+3}{x-1}$$

b) Ta có: $P=\frac{-x+3}{x-1}=-1+\frac{2}{x-1}$

Để P nguyên thì $\frac{2}{x-1}$ nguyên, tức là $x-1\in U\left(2\right),U\left(2\right)=\left\{-1;-2;1;2\right\}$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}x-1=-1\\x-1=-2\\x-1=1\\x-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\left(TM\right)\\x=-1\left(\notin DKXD\right)\\x=2\left(TM\right)\\x=3\left(TM\right)\end{array}\right.$

Vậy với $x\in\left\{0;2;3\right\}$ thì P là một số nguyên

Bài 8 (Nam Định – 2013 – 2014):

Cho biểu thức $A=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right):\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x>0$ và $x\neq 1$

1) Rút gọn biểu thức A

2) Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức A có giá trị là số nguyên

Gợi ý giải:

1. Rút gọn biểu thức $A=\frac{2}{x-1}$

2. Với $x>0$ và $x\neq 1$ ta có $A=\frac{2}{x-1}$

Chỉ ra khi A có giá trị là số nguyên khi và chỉ khi $x-1$ là ước của 2

Từ đó tìm được $x=2$ và $x=3$ thỏa mãn điều kiện đề bài

Bài 9 (Hà Nam – 2013 – 2014): Rút gọn biểu thức sau:

$A=\frac{a-\sqrt{a}}{a-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\left(a\geq 0;a\neq 1\right)$ $\qquad B=\frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{8}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Lời giải:

$$A=\frac{a-\sqrt{a}}{a-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}=\frac{1}{\sqrt{a}+1}$$

$$B=\frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{8}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = 1+\sqrt{2}$$

Bài 10 (Quảng Ninh – 2013 – 2014): Cho biểu thức:

$P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$ với $x \ge 0$ và $x \ne 1$

a. Rút gọn biểu thức P

b. Tìm x để P đạt giá trị nguyên

Lời giải:

a.

$$P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{x+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} + \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} = \frac{x-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

Vậy với $x \ge 0$ và $x \ne 1$, thì $P = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

b. Đặt $t = \sqrt{x}$, đk $t \ge 0$

Ta có $P = \frac{t}{t^2+t+1} \Rightarrow Pt^2 + \left(P-1\right)t + P = 0$

Điều kiện có nghiệm $\Delta = \left(P-1\right)^2 - 4P^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le P \le \frac{1}{3}$

Do $x \ge 0; x \ne 1$ nên $0 \le P \le \frac{1}{3} \Rightarrow P$ nguyên $\Leftrightarrow P = 0$ tại $x = 0$

Vậy $x = 0$ thì P nguyên

Bài 11 (Nam Định – 2013 – 2014):

Cho biểu thức $A=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right):\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x>0$ và $x\neq 1$

1) Rút gọn biểu thức A

2) Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức A có giá trị là số nguyên

Gợi ý giải:

1. Rút gọn biểu thức $A=\frac{2}{x-1}$

2. Với $x>0$ và $x\neq 1$ ta có $A=\frac{2}{x-1}$

Chỉ ra khi A có giá trị là số nguyên khi và chỉ khi $x-1$ là ước của 2

Từ đó tìm được $x=2$ và $x=3$ thỏa mãn điều kiện để bài

Nhận xét: Tiếp theo ta sẽ đến với một số bài toán "bản chất vẫn là rút gọn biểu thức" nhưng trong câu hỏi khác

Bài 12: Cho biểu thức:

$$A=\frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right).\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}\quad (x\neq 8; x\neq -8; x\neq 0)$$

Chứng minh A không phụ thuộc vào biến số

Lời giải:

$$A=\frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)\left(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{2+\sqrt[3]{x}}:\left(\frac{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right).\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x}+2\right)}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+2\right)}$$

$$A=\frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)\left(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{2+\sqrt[3]{x}}.\frac{2+\sqrt[3]{x}}{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}+\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right).\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x}+2\right)}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+2\right)}$$

$$A=2-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}=2\notin x$$

Bài 13: Cho biểu thức: $P=\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}\right).\frac{\sqrt{x^3y}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}$

Chứng minh rằng P luôn nhận giá trị nguyên với mọi x,y thỏa mãn: $x,y>0, x\neq y$

Lời giải:

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}\right).\frac{\sqrt{x^3y}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}$$

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}.\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}.\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}\right).\frac{x\sqrt{xy}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}$$

$$P=\left(\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{xy}.(x-y)}+\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{xy}.(x-y)}\right).\frac{x\sqrt{xy}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}$$

$$P=\frac{2(x+y)}{x-y}.\frac{x}{x+y}-\frac{2y}{x-y}=2$$

Sau đây là một số bài toán áp dụng khác

Bài 1: Rút gọn các biểu thức:

a. $\sqrt{36}-\sqrt{25}-\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}=6-5-\left(1+\sqrt{5}\right)=1-1-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

b. $\sqrt{80}-\sqrt{20}+\left(1-\sqrt{5}\right)^2=\sqrt{4^2.5}-\sqrt{2^2.5}+1-2\sqrt{5}+5$

$=4\sqrt{5}-2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}=6$

c. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2-\sqrt{84}=3+2\sqrt{21}+7-\sqrt{2^2.21}=10+2\sqrt{21}-2\sqrt{21}=10$

d. $\left(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{72}+5\sqrt{20}+\sqrt{32}\right)$

$=\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2}\right)\left(6\sqrt{2}+10\sqrt{5}+4\sqrt{2}\right)=\left(3\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\left(10\sqrt{2}+10\sqrt{5}\right)$

$=30\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=90$

e. $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}$

$=\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)=2\sqrt{3}$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a. $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}$

$=-\dfrac{2\sqrt{5}}{7-5}=-\sqrt{5}$

b. $\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

c. $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}+1$

d. $\dfrac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{2}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt{3}.\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2+\sqrt{3}\right)-2.\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right).\sqrt{3}.\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}+3\sqrt{3}+5-4-2\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right).\sqrt{3}.\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right).\sqrt{3}.\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}.\left(\sqrt{3}+1\right)}=2.\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}-1}{3.\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{6-2\sqrt{3}}{6}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

e. $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Bài 3: Rút gọn biểu thức:

a. $A=\dfrac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\dfrac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$ với $x\ge 2; x<-2$

Với điều kiện trên, ta có:

$$A=\frac{\left(x+2+\sqrt{x^2-4}\right)^2}{\left(x+2-\sqrt{x^2-4}\right)\left(x+2+\sqrt{x^2-4}\right)}+\frac{\left(x+2-\sqrt{x^2-4}\right)^2}{\left(x+2-\sqrt{x^2-4}\right)\left(x+2+\sqrt{x^2-4}\right)}$$

$$A=\frac{2\left(x+2\right)^2+2\left(x^2-4\right)}{\left(x+2\right)^2-\left(x^2-4\right)}$$

$$A=\frac{2x^2+8x+8+2x^2-8}{x^2+4x+4-x^2+4}$$

$$A=\frac{4x^2+8x}{4x+8}$$

$$A=x$$

Vậy $A=x$

b. $B=\left(1+\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)\left(1-\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$ với $x\ge 0; x\ne 1$

$B=\left(1+\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}\right)\left(1-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}\right)$

$B=\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)$

$B=1-x$

Vậy $B=1-x$

c. $C=\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}:\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}$ với $x>0;x\neq 1$

Với điều kiện trên, biểu thức xác định

$C=\frac{1}{\sqrt{x}\left(\left(\sqrt{x}\right)^3-1\right)}:\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$

$C=\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}$

$C=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

Vậy $C=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

d. $D=\frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}-1}$ với $x\geq 2;x\neq 3$

Với điều kiện trên, biểu thức xác định

$D=\frac{\sqrt{x-2-2\sqrt{x-2}+1}}{\sqrt{x-2}-1}$

$D=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2}}{\sqrt{x-2}-1}$

$D=1$ nếu $\sqrt{x-2}-1>0\Leftrightarrow x>3$

$D=-1$ nếu $\sqrt{x-2}-1<0\Leftrightarrow x<3$

Vậy $\left[\begin{array}{ll} D=1 & \text{neu } x>3 \\ D=-1 & \text{neu } 2\leq x<3 \end{array}\right.$

Bài 4: Rút gọn biểu thức: $A=\left(2+\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)\left(2-\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$

a. Rút gọn biểu thức A

b. Tìm a để $A>0$

Lời giải:

a. Điều kiện xác định $\begin{cases} a \ge 0 \\ \sqrt{a}+1 \ne 0 \\ \sqrt{a}-1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ a \ne 1 \end{cases}$

Với điều kiện trên, ta có: $A = \left(2+\dfrac{\sqrt{a}.\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}+1}\right)\left(2-\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}{\sqrt{a}-1}\right)$

$$= \left(2+\sqrt{a}\right)\left(2-\sqrt{a}\right) = 4-a$$

b. Ta có $A > 0 \Leftrightarrow 4-a > 0 \Leftrightarrow a < 4$

Kết hợp với điều kiện xác định ta có $\begin{cases} 0 \le a < 4 \\ a \ne 1 \end{cases}$

Bài 5: Cho biểu thức: $B = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{2x}{1-x}$

a. Tìm điều kiện để B có nghĩa và rút gọn B

b. Tìm x để $B = -\dfrac{1}{2}$

Lời giải:

a. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x}-1 \ne 0 \\ \sqrt{x}+1 \ne 0 \\ 1-x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} \ne 1 \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$

Với điều kiện trên,

Ta có $B = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}+\dfrac{2x}{1-x} = \dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}+\dfrac{2x}{1-x}$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{x-1}-\frac{2x}{x-1} = \frac{2\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}{x-1} = -\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

b. Ta có $B = -1 \Leftrightarrow -\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}+\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{9}$ (thỏa mãn)

Vậy $x = \dfrac{1}{9}$ là giá trị cần tìm

Bài 6: Rút gọn biểu thức: $P = \dfrac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{3\sqrt{a}+\left(\sqrt{a}-1\right)^2}-\dfrac{3-2\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{a\sqrt{a}-1}+\dfrac{2}{\sqrt{a}-1}$

a. Rút gọn biểu thức b. Tìm a để $P = 2$

Lời giải:

a. P xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ 3\sqrt{a} + \left(\sqrt{a} - 1\right)^2 \neq 0 \\ a\sqrt{a} - 1 \neq 0 \\ \sqrt{a} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

Với điều kiện trên, ta có

$$P = \frac{\left(\sqrt{a} - 1\right)^2}{3\sqrt{a} + a - 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\left(3 - 2\left(\sqrt{a} - 1\right)^2\right)}{\left(\sqrt{a} - 1\right)\left(a + \sqrt{a} + 1\right)} + \frac{2}{\sqrt{a} - 1}$$

$$P = \frac{\left(\sqrt{a} - 1\right)^3}{\left(a + \sqrt{a} + 1\right)\left(\sqrt{a} - 1\right)} - \frac{\left(3 - 2\left(\sqrt{a} - 1\right)^2\right)}{\left(\sqrt{a} - 1\right)\left(a + \sqrt{a} + 1\right)} + \frac{2\left(a + \sqrt{a} + 1\right)}{\left(\sqrt{a} - 1\right)\left(a + \sqrt{a} + 1\right)}$$

$$P = \frac{\left(\left(\sqrt{a} - 1\right)^3 - 3 + 2a - 4\sqrt{a} + 2 + 2a + 2\sqrt{a} + 2\right)}{\left(a + \sqrt{a} + 1\right)\left(\sqrt{a} - 1\right)}$$

$$P = \frac{a\sqrt{a} - 3a + 3\sqrt{a} - 1 + 4a - 2\sqrt{a} + 1}{\left(a + \sqrt{a} + 1\right)\left(\sqrt{a} - 1\right)}$$

$$P = \frac{a\sqrt{a} + a + \sqrt{a}}{\left(a + \sqrt{a} + 1\right)\left(\sqrt{a} - 1\right)}$$

$$P = \frac{\sqrt{a}\left(a + \sqrt{a} + 1\right)}{\left(a + \sqrt{a} + 1\right)\left(\sqrt{a} - 1\right)}$$

$$P = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}$$

Vậy $P = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}$

b. $P = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{a} = -2\sqrt{a} + 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{4}{9}$ (thỏa mãn)

Vậy $a = \dfrac{4}{9}$ là giá trị cần tìm

Bài 7: Cho biểu thức: $P=\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x-3}{x-9}\right):\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$

a. Tìm điều kiện của x để P có nghĩa

b. Rút gọn P

c. Tìm các giá trị nguyên của x để P mang giá trị nguyên

Lời giải:

a. P có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x}+3 \ne 0 \\ \sqrt{x}-3 \ne 0 \\ x-9 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 9 \end{cases}$

b. Ta có:

$$P=\left(\frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}+\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\frac{3x-3}{x-9}\right).\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$$

$$P=\left(\frac{2x-6\sqrt{x}+x+3\sqrt{x}-3x+3}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}\right).\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$$

$$P=\frac{-3\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(2\sqrt{x}-2\right)}$$

$$P=-\frac{3\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$P=-\frac{3}{\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

Vậy $P=-\frac{3}{\left(\sqrt{x}-3\right)}$

c. P nguyên $\Leftrightarrow -\frac{3}{\sqrt{x}-3}$ nguyên

mà x nguyên $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-3=1 \\ \sqrt{x}-3=-1 \\ \sqrt{x}-3=3 \\ \sqrt{x}-3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=4 \\ \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=6 \\ \sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ x=4 \\ x=36 \\ x=0 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy $x=16; x=4=x=36=x=0$ là các giá trị cần tìm

Bài 8: Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{3\sqrt{x}+1}+\dfrac{8\sqrt{x}}{9x-1}\right):\left(1-\dfrac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1}\right)$

a. Tìm điều kiện của x để P có nghĩa

b. Rút gọn P

c. Tìm các giá trị của x để $P=\dfrac{6}{5}$

Lời giải

a. P có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 3\sqrt{x}-1\ne 0 \\ 3\sqrt{x}+1\ne 0 \\ 9x-1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\ne \dfrac{1}{9} \end{cases}$

b. Với $x\ge 0; x\ne \dfrac{1}{9}$, ta có:

$$P=\left(\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(3\sqrt{x}+1\right)}{\left(3\sqrt{x}-1\right)\left(3\sqrt{x}+1\right)}-\frac{3\sqrt{x}-1}{\left(3\sqrt{x}+1\right)\left(3\sqrt{x}-1\right)}+\frac{8\sqrt{x}}{9x-1}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+1}-\frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1}\right)$$

$$P=\left(\frac{3x+\sqrt{x}-3\sqrt{x}-1-3\sqrt{x}+1+8\sqrt{x}}{\left(3\sqrt{x}-1\right)\left(3\sqrt{x}+1\right)}\right):\left(\frac{3}{3\sqrt{x}+1}\right)$$

$$P=\frac{3x+3\sqrt{x}}{\left(3\sqrt{x}-1\right)\left(3\sqrt{x}+1\right)}.\frac{3\sqrt{x}+1}{3}$$

$$P=\frac{x+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-1}$$

c. $P=\dfrac{6}{5}\Leftrightarrow \dfrac{x+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-1}=\dfrac{6}{5}\Leftrightarrow 18\sqrt{x}-6=5x+5\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 5x-13\sqrt{x}+6=0 \Leftrightarrow 5x-10\sqrt{x}-3\sqrt{x}+6=0$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)-3\left(\sqrt{x}-2\right)=0 \Leftrightarrow \left(5\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5\sqrt{x}-3=0 \\ \sqrt{x}-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=\dfrac{3}{5} \\ \sqrt{x}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{9}{25} \\ x=4 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy với $x=\dfrac{9}{25}; x=4$ thì $P=\dfrac{6}{5}$

Bài 9: Cho biểu thức:

$P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x-1}\right)$ với $x\ge 0; x\ne 1$

a. Rút gọn P

b. Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của P và giá trị của x tương ứng

Lời giải:

a. Với $x\ge 0; x\ne 1$, ta có:

$$P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{2\sqrt{x}-2}{x\left(\sqrt{x}+1\right)-\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{2}{x-1}\right)$$

$$P=\left(\frac{x-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-1\right)}-\frac{2\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-1\right)}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)$$

$$P=\left(\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-1\right)}\right).\left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$P=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}.\left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$P=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy $P=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

b. Ta có: $P=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=-\frac{2}{\sqrt{x}+1}+1$

P nguyên $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ nguyên

$\Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{x}+1}$ nguyên

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sqrt{x}+1=1\\ \sqrt{x}+1=2\\ \sqrt{x}+1=-1\\ \sqrt{x}+1=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sqrt{x}=0\\ \sqrt{x}=1\\ \sqrt{x}=-2(\text{loai})\\ \sqrt{x}=-3(\text{loai})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=0(\text{TM})\\ x=1(\text{loai})\end{array}\right.$$

Vậy $x=0$ là giá trị cần tìm

c. Ta có: $P=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=1-\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$

Ta có: $\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow \sqrt{x}+1\ge 1\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x}+1}\le 2\Rightarrow 1-\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}\ge -1\Rightarrow P\ge -1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -1 khi $x=0$

Bài 10: Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}\right):\left(\dfrac{2}{x^2-2x+1}\right)$ với $x\ge 0; x\ne 1$

a. Rút gọn P

b. Tìm các giá trị của x để $P>0$

c. Tính giá trị của P khi $x=7-4\sqrt{3}$

d. Tìm giá trị lớn nhất của P và giá trị tương ứng của x

Lời giải:

a. Với $x\ge 0; x\ne 1$, ta có:

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\right).\frac{\left(x-1\right)^2}{2}$$

$$P=\left(\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}-\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\right).\frac{\left(x-1\right)^2}{2}$$

$$P=\left(\frac{x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2-x+\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\right).\frac{\left(x-1\right)^2}{2}$$

$$P=\frac{-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}.\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{2}$$

$$P=-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$$

Vậy $P=-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$

b. Ta có $P>0$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)>0\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)<0\Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0\\ \sqrt{x}-1<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0\\ \sqrt{x}<1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0\\ x<1\end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện đề bài, ta được $0<x<1$

Vậy với $0<x<1$ thì $P>0$

c. Với $x = 7 - 4\sqrt{3} = 3 - 2.2.\sqrt{3} + 4 = \left(\sqrt{3} - 2\right)^2$ thì

$P = -\sqrt{\left(\sqrt{3} - 2\right)^2}\left(\sqrt{\left(\sqrt{3} - 2\right)^2} - 1\right)$

$P = -\left|\sqrt{3} - 2\right|\left(\left|\sqrt{3} - 2\right| - 1\right)$

$P = \left(\sqrt{3} - 2\right)\left(1 - \sqrt{3}\right)$

$P = \sqrt{3} - 3 - 2 + 2\sqrt{3}$

$P = 3\sqrt{3} - 5$

Vậy với $x = 7 - 4\sqrt{3}$ thì $P = 3\sqrt{3} - 5$

d. Ta có $P = -\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right) = \sqrt{x} - x = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

Nhận thấy: $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi:

$\sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy với $x = \frac{1}{4}$ thì P đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{4}$

CHƯƠNG II

ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. Đồ thị hàm số $y = ax + b$:

Lưu ý: Để khỏi phải nhàm chán anh sẽ nhắc lại kiến thức thông qua các bài toán cụ thể.

Bài 1: Với giá trị nào của m thì hàm số: $y = \left(m^2 - 2m\right)x^2 + \left(2m^2 - m\right)x + m - 2$ là hàm số bậc nhất.

Lý thuyết: Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ trong đó a, b là các số thực và $a \neq 0$.

Lời giải:

Để hàm số đã cho là hàm bậc nhất ta phải có:

$$\begin{cases} m^2 - 2m = 0 \\ 2m^2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-2) = 0 \\ (2m-1)m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ hoặc } m = 2 \\ m \neq 0 \text{ và } m \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy với $m = 2$ thì hàm số đã cho thành hàm số bậc nhất, khi đó ta có: $y = 6x$.

Lưu ý: Đối với bài toán này điểm nhấn mạnh mà anh muốn nhắc tới là:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ hoặc $x = x_2 ...$

$f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq x_1$ và $x \neq x_2 \dots$

Chỉ thay đổi chữ "hoặc" bằng chữ "và" cũng có thể làm sai kết quả bài toán và ý nghĩa toán học.

Bài 2: Tìm k để hàm số $y = \left(k^2 - 3k - 4\right)x + (2k - 1)$ là hàm số đồng biến.

Lý thuyết: Hàm số $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

Lời giải:

Hàm số đã cho là hàm số bậc nhất nên nó đồng biến khi và chỉ khi:

$$a = k^2 - 3k - 4 > 0 \Leftrightarrow (k+1)(k-4) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k < -1 \\ k > 4 \end{array}\right.$$

Vậy tập giá trị của k thỏa mãn là: $k < -1; k > 4$.

Lưu ý: Hàm số bậc nhất đồng biến hay nghịch biến thì chỉ phụ thuộc vào dấu của giá trị a còn giá trị b thì không quan tâm! Áp dụng lí thuyết học được làm bài toán sau:

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x) = \left(a^2 + (b-1)^2\right)x^2 + (2a + 3b + c)x - 2b$.

a) Tìm a, b, c để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất và đồng biến trên R.

b) Biết hàm số đã cho là hàm số bậc nhất và $f(2) = 11$, hỏi hàm số đó là hàm đồng biến hay nghịch biến.

c) Nếu hàm số đã cho là hàm bậc nhất và thỏa mãn $f(1) = 5$. Hãy tìm x để $f\left(x^2\right) = 100$.

Bài 3: Cho hàm số $y = 2x + 1$.

a) Vẽ đồ thị hàm số.

b) Cho ba điểm A, B, C thuộc đồ thị có hoành độ lần lượt là 0, 1, 2. Tìm ba điểm đó. Tính khoảng cách ba điểm A, B, C tới gốc tọa độ O.

Lý thuyết: Đồ thị hàm số bậc nhất là một đường thẳng!

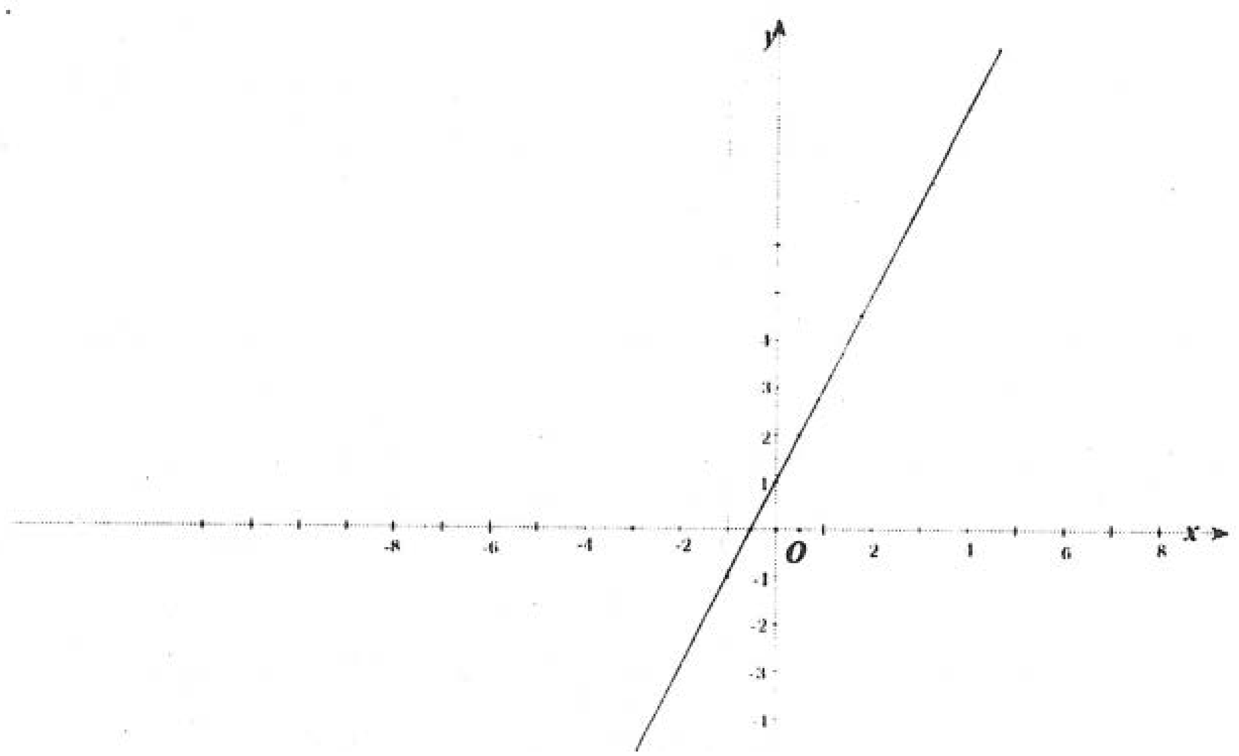
Lời giải:

a) Vì hàm đã cho là hàm bậc nhất nên đồ thị của nó là một đường thẳng. Do là đường thẳng nên ta chỉ cần xác định hai điểm để vẽ, tuy nhiên ta có thể lấy thêm một số điểm cho đồ thị có thêm nhiều thông tin hơn.

Bảng giá trị:

X	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	1
Y	0	1	-1	2	3

Đồ thị:



b) Với $x = 0$ thì $y = 2.0 + 1 = 1$. Với $x = 1$ thì $y = 2.1 + 1 = 3$. Với $x = 2$ thì $y = 2.2 + 1 = 5$. Khi đó, kẻ vuông góc từ các điểm A, B, C xuống trục Ox tại các điểm M, N, P và áp dụng định lí Pytago ta có:

$OA = MA = 1; OB = \sqrt{ON^2 + NP^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$OC = \sqrt{OP^2 + PC^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = 3\sqrt{3}$.

Bài 4: Cho hàm số $y = (m+4)x - 2m + 3$.

a) Tìm các giá trị của m để hàm số nghịch biến.

b) Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;5)$. Vẽ đồ thị hàm số khi đó.

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì đồ thị hàm số luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải:

a) Hàm số đã cho là hàm bậc nhất nên đó là hàm nghịch biến khi và chỉ khi:

$m+4<0 \Leftrightarrow m<-4$

b) Để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;5)$ thì:

$5=(m+4).1-2m+3 \Leftrightarrow m=2$.

Khi đó, hàm số đã cho là: $y=6x-1$.

Bảng giá trị:

X	0	$\frac{1}{6}$	1
Y	-1	0	5

c) Giả sử $(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng đi qua, điều đó tương đương:

$y_0=(m+4)x_0-2m+3; \forall m\in R$

$\Leftrightarrow m(x_0-2)+(4x_0-y_0+3)=0; \forall m\in R$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-2=0 \\ 4x_0-y_0+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=11 \end{cases}$

Vậy đường thẳng luôn đi qua điểm cố định $B(2;11)$

II. Đồ thị hàm số bậc hai $y=ax^2$:

Bài 1 (Hưng Yên – 2010): Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{3}x^2$. Tính các giá trị $f(0);f(-3);f(\sqrt{3})$.

Lời giải:

Ta có: $y=f(x)=\frac{1}{3}x^2$

$f(0)=\frac{1}{3}.0=0; f(-3)=\frac{1}{3}(-3)^2=3; f(\sqrt{3})=\frac{1}{3}(\sqrt{3})^2=1$

Bài 2: Tìm m để hàm số $y=(m^2-2m-3)x^2$ đồng biến trên tập số dương.

Lý thuyết:

Hàm số $y = ax^2$ có:

+ Nếu $a > 0$ thì hàm đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$.

+ Nếu $a < 0$ thì hàm đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$.

Lời giải:

Do hàm số là hàm bậc hai dạng $y = ax^2$ nên hàm đồng biến trên tập số dương khi và chỉ khi:

$$a = m^2 - 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -1 \end{array}\right.$$

Vậy tập giá trị của m thỏa mãn là: $m > 3$; $m < -1$.

Bài 3: Cho hai hàm số: $y = x^2$ và $y = x + 2$

1) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trên cùng một hệ trục Oxy.

2) Tìm tọa độ các giao điểm M, N của hai đồ thị trên bằng phép tính.

Lý thuyết: Giao điểm của hai đồ thị $y = f(x); y = (x)$ thì chúng ta phải xét phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) = g(x)$

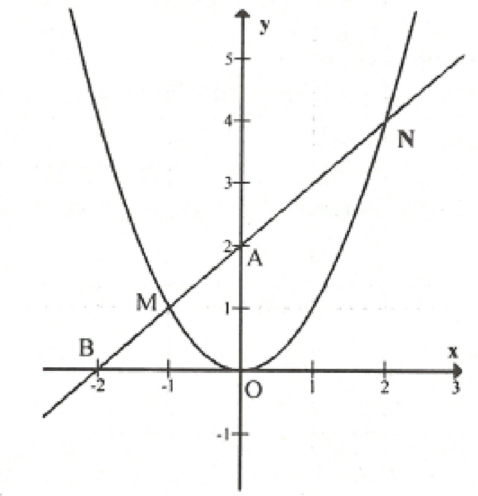
Sau khi giải phương trình này thì ta sẽ thu được các điểm cần tim.

Lời giải:

Vẽ đồ thị $y = x^2$ thông qua bảng giá trị:

X	-2	-1	0	1	2
Y	4	1	0	1	4

Vẽ đồ thị $y = x + 2$ qua các điểm $A(0;2)$ và $B(-2;0)$.



2) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $x^2 = x + 2$ hay $x^2 - x - 2 = 0$

Phương trình này có nghiệm: $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 1$ và $x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 4$.

Vậy hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm $M(-1;1)$ và $N(2;4)$

III. Một số bài toán trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10:

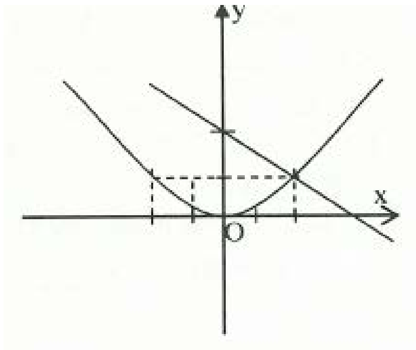
Bài 1 (Hồ Chí Minh – 2012 – 2013):

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y=\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(D): y=-\frac{1}{2}x+2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) ở câu trên bằng phép tính.

Lời giải:

a) Đồ thị:



Lưu ý: (P) đi qua $O(0;0),(\pm2;1),(\pm4;4)$ (D) đi qua $(-4;4),(2;1)$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) là

$\frac{1}{4}x^2=-\frac{1}{2}x+2 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow x=-4$ hay $x=2$

$y(-4)=4, y(2)=1$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (D) là $(-4;4),(2;1)$

Bài 2 (Đà Nẵng – 2012 – 2013): Biết rằng đường cong trong hình vẽ bên là một parabol $y=ax^2$.

1) Tìm hệ số a biết nó đi qua điểm $A(2;2)$

2) Gọi M và N là các giao điểm của đường thẳng $y=x+4$ với parabol. Tìm tọa độ của các điểm M và N.

Lời giải:

1) Theo đồ thị ta có $y(2)=2 \Rightarrow 2=a.2^2 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của $y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y=x+4$ là:

$x+4=\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow x=-2$ hay $x=4$.

Ta có: $y(-2)=2; y(4)=8$. Vậy tọa độ các điểm M và N là $(-2;2)$ và $(4;8)$.

Bài 3 (Thanh Hóa – 2012 – 2013): Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+3$.

1. Chứng minh rằng (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt.

2. Gọi A và B là các điểm chung của (d) và (P). Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Lời giải:

1. Chứng minh rằng (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt

Hoành độ giao điểm đường thẳng (d) và Parabol (P) là nghiệm của phương trình:

$x^2=2x+3 \Rightarrow x^2-2x-3=0$ có $a-b+c=0$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -1$ và $x_2 = \frac{-c}{a} = \frac{3}{1} = 3$

Với $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = (-1)^2 = 1 \Rightarrow A(-1;1)$

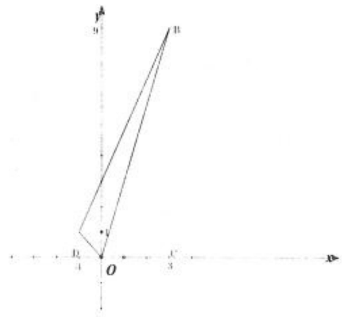
Với $x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 3^2 = 9 \Rightarrow B(3;9)$

Vậy (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt A và B.

2. Gọi A và B là các điểm chung của (d) và (P). Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Ta biểu diễn các điểm A và B trên mặt phẳng tọa độ Oxy như hình vẽ:

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}.DC = \frac{1+9}{2}.4 = 20$$



$$S_{BDC} = \frac{BC.CO}{2} = \frac{9.3}{2} = 13,5$$

$$S_{AOD} = \frac{AD.DO}{2} = \frac{1.1}{2} = 0,5$$

Theo công thức cộng diện tích ta có:

$$S_{(ABC)} = S_{(ABCD)} - S_{(BCO)} - S_{(ADO)} = 20 - 13,5 - 0,5 = 6$$

(Đơn vị diện tích)

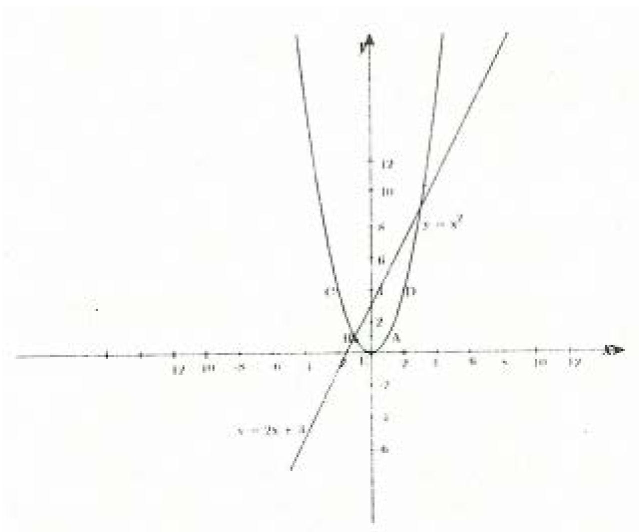
Bài 4 (Bình Dương – 2010 – 2011):

1) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ: $(P): y = x^2; (d): y = 2x + 3$.

2) Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của (d) và (P).

Lời giải:

1) Vẽ đồ thị:



Tọa độ điểm của đồ thị $(P): y = x^2$

X	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Tọa độ điểm của đồ thị $(d): y = 2x + 3$

X	0	$\frac{-3}{2}$
$y = 2x + 3$	3	0

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ có dạng $a - b + c = 1 - (-2) + (-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-c}{a} = 3 \end{cases}$ từ (P) $\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 9 \end{cases}$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $A(-1;1); B(1;9)$

Bài 5 (Đà Nẵng – 2010 – 2011): Cho hai hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị (P) và $y = x + 3$ có đồ thị (d).

a) Vẽ các đồ thị (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Gọi A là giao điểm của hai đồ thị (P) và (d) có hoành độ âm. Viết phương trình của đường thẳng (Δ) đi qua A và có hệ số góc bằng -1.

c) Đường thẳng (Δ) cắt trục tung tại C, cắt trục hoành tại D. Đường thẳng (d) cắt trục hoành tại B. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ABC và tam giác ABD.

Lời giải:

a) Đồ thị: học sinh tự vẽ.

Lưu ý: (P) đi qua $O(0;0)$, $(\pm 1;2)$. (d) đi qua $(0;3), (-1;2)$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$2x^2 = x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hay $\mathrm{x} = \frac{3}{2}$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(-1;2), \left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right) \Rightarrow A(-1;2)$.

Phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A có hệ số góc bằng -1 là:

$y - 2 = -1(x + 1) \Leftrightarrow (\Delta): y = -x + 1$

c) Đường thẳng (Δ) cắt trục tung tại C $\Rightarrow$ C có tọa độ $(0;1)$

Đường thẳng (Δ) cắt trục hoành tại D$\Rightarrow$D có hoành độ $(1;0)$

Đường thẳng (Δ) cắt trục hoành tại B$\Rightarrow$B có hoành độ $(-3;0)$

Vì $x_A + x_D = 2x_C$ và A, C, D thẳng hàng (vì cùng thuộc đường thẳng (Δ))

Nên C là trung điểm AD.

Hai tam giác BAC và BAD có chung đường cao kẻ từ đỉnh B và $AC = \frac{1}{2}AD$

Do đó, ta có $\dfrac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{1}{2}$

Bài 6 (Hà Nội – 2010 – 2011): Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - 1$.

1) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

2) Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P). Tìm giá trị của m để: $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 - x_1 x_2 = 3$.

Lời giải:

1. Xét phương trình: $-x^2 = mx - 1 \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0$

$\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi m nên (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Suy ra mọi giá trị của m thì (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

2. Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) nên theo định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$

$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 - x_1 x_2 = x_1 x_2 \left(x_1 + x_2\right) - x_1 x_2 = m + 1$

$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 - x_1 x_2 = 3 \Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$

Bài 7 (Hải Dương – 2010 – 2011):

1. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 1$. Xác định hệ số a, biết rằng đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $1 + \sqrt{2}$.

2. Tìm các số nguyên m để hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3m \\ x - 2y = -3 \end{cases}$ có nghiệm $\left(x; y\right)$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + xy = 30$.

Lời giải:

1. Ra được phương trình $0 = a\left(\sqrt{2} + 1\right) + 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{-1}{\sqrt{2} + 1}$

$a = 1 - \sqrt{2}$. Vậy $a = 1 - \sqrt{2}$ là giá trị thỏa mãn.

2. Tìm được $y = m + 1, x = 2m - 1$.

$x^2 + xy = 30 \Leftrightarrow \left(2m - 1\right)^2 + \left(2m - 1\right)\left(m + 1\right) = 30 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 10 = 0$

$\Leftrightarrow m = -2$ hoặc $m = \dfrac{5}{2}$

Do m nguyên nên $m = -2$ là giá trị thỏa mãn.

Bài 8 (Huế - 2010 – 2011): Cho hàm số $y = ax^2$

a) Xác định hệ số a biết rằng đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $M\left(-2; 8\right)$.

b) Vẽ trên cùng một mặt phẳng tọa độ đồ thị (P) của hàm số đã cho với giá trị a vừa tìm được và đường thẳng (d) đi qua $M\left(-2; 8\right)$ có hệ số góc bằng -2. Tìm tọa độ giao điểm khác M của (P) và (d).

Lời giải:

a) Đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $M\left(-2;8\right)$, nên:

$8 = a.\left(-2\right)^2 \Leftrightarrow a = 2$

Vậy: $a = 2$ và hàm số đã cho là: $y = 2x^2$

b) Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng -2, nên có phương trình dạng: $y = -2x + b$

+ (d) đi qua điểm $M\left(-2;8\right)$, nên $8 = -2.\left(-2\right) + b \Leftrightarrow b = 4$.

+ Vẽ (P) (bạn đọc tự vẽ)

+ Vẽ (d) (bạn đọc tự vẽ)

+ Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình:

$2x^2 = -2x + 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$.

+ Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = -2$

Do đó hoành độ giao điểm thứ hai vủa (P) và (d) là $\text{x} = 1 \Rightarrow y = 2.1^2 = 2$.

Vậy giao điểm khác M của (P) và (d) có tọa độ: $N\left(1;2\right)$.

Bài 9 (Khánh Hòa – 2010 – 2011): Cho hàm số: $y = mx - m + 2$, có đồ thị là đường thẳng $\left(d_m\right)$.

1. Khi $m = 1$, vẽ đường thẳng $\left(d_1\right)$.

2. Tìm tọa độ điểm cố định mà đường thẳng $\left(d_m\right)$ luôn đi qua với mọi giá trị của m.

Tính khoảng cách lớn nhất từ điểm $M\left(6;1\right)$ đến đường thẳng thẳng $\left(d_m\right)$ khi m thay đổi.

Lời giải:

1) Bạn đọc tự giải:

2) Ta có: $y = mx - m + 2\left(d_m\right)$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)m = y - 2\ \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy điểm cố định mà $\left(d_m\right)$ đi qua là $C\left(1;2\right)$.

Ta dễ dàng chứng minh được khoảng cách từ $M\left(6;1\right)$ đến $\left(d_m\right)$ lớn nhất chính là độ dài đoạn thẳng CM.

Ta có: $CM = \sqrt{\left(6-1\right)^2 + \left(1-2\right)^2} = \sqrt{26}$

Bài 10 (Kiên Giang – 2010 – 2011): Cho hàm số $y = \left(m-3\right)x + 2 + m$. Xác định m để:

a) Hàm số là hàm số bậc nhất nghịch biến.

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $\left(1;1\right)$

c) Đồ thị cắt hai trục tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 3.

Lời giải:

Cho hàm số $y=(m-3)x+2+m$. Xác định m để:

a) Để hàm số là hàm số bậc nhất nghịch biến thì: $m-3<0$ suy ra $m<3$

b) Khi đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$ ta có:

$(m-3).1+2+m=1\Rightarrow m=1$

c) Đồ thị cắt hai trục tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 3.

Để đồ thị cắt 2 trục tọa độ: Cắt Ox tại $A(x_A;0)$ và cắt Oy tại $B(0;y_B)$ thì điều kiện

Thay tọa độ điểm A ta có: $(m-3)x_A+2+m=0\Rightarrow x_A=\dfrac{-(2+m)}{m-3}$

Thay tọa độ điểm B ta có: $y_B=2+m$ (có thể tính OA, OB theo x_A và y_B)

Ta có tam giác OAB vuông tại O nên diện tích $S=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}|x_A|.|y_B|=3$

$\Rightarrow |x_A|.|y_B|=6$

$\Rightarrow \left|\dfrac{-(2+m)}{m-3}\right|.|2+m|=6\Rightarrow \left|\dfrac{-(2+m)}{m-3}.(2+m)\right|=6\Rightarrow \left|\dfrac{-(2+m)^2}{m-3}\right|=6$

Trường hợp 1: $\dfrac{-(2+m)^2}{m-3}=6\Rightarrow -(2+m)^2=6(m-3)\Leftrightarrow m^2+10m-14=0$

$\Delta'=5^2-(-14)=39>0\Rightarrow m_{1,2}=-5\pm\sqrt{39}$

Trường hợp 2: $\dfrac{-(2+m)^2}{m-3}=-6\Rightarrow -(2+m)^2=-(m-3)\Leftrightarrow m^2-2m+22=0$

$\Delta'=(-1)^2-22=-21<0\Rightarrow m\in\varnothing$

Vậy giá trị tìm được: $m_{1,2}=-5\pm\sqrt{39}$.

Bài 11 (Phú Yên – 2010 – 2011): Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=2x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y=2(m-1)x-m+1$, trong đó m là tham số.

a) Vẽ parabol (P).

b) Xác định m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi, các đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định. Tìm điểm cố định đó.

Lời giải:

a) Bạn đọc tự giải.

b) Phương trình hoành độ giao tiếp của (P) và (d): $2x^2-2(m-1)x+m-1=0$

$\Delta=m^2-4m+3=(m+1)(m+3)$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -1$ hoặc $m < -3$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c) Giả sử $(x_0; y_0)$ là điểm cố định các đường thẳng (d) đi qua, ta cóL

$y_0 = 2(m-1)x_0 - m + 1 \Leftrightarrow m(2x_0 - 1) - (2x_0 + y_0 - 1) = 0$

Vì không phụ thuộc vào m ta có: $\begin{cases} 2x_0 - 1 = 0 \\ 2x_0 + y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{2} \\ y_0 = 0 \end{cases}$

Bài 12 (Quảng Nam – 2010 – 2011): Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 3$ có đồ thị là đường thẳng (d).

a) Xác định hệ số a, biết đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 3x$. Vẽ (d) với hệ số a vừa tìm được.

b) Đường thẳng (d') có dạng $y = x + 1$ cắt đường thẳng (d) ở câu a) tại điểm M. Xác định tọa độ điểm M.

Lời giải:

a)

+ (d) song song với đường thẳng $y = 3x$ nên $a = 3$.

+ Vẽ $(d)\, y = 3x + 3$

- Xác định đúng hai điểm thuộc (d): $(0;3)$ và $(-1;0)$

- Vẽ đúng (d) trên mặt phẳng Oxy.

b) – Tọa độ $(x;y)$ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = 3x + 3 \\ y = x + 1 \end{cases}$

- Giải hệ được: $\mathrm{x} = -1; y = 0$

- Tọa độ $M(-1;0)$.

Bài 13 (Quảng Trị - 2010 – 2011): Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hàm số $y = -x + 4$ có đồ thị là đường thẳng (d). Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (d) với trục tung và trục hoành.

a) Tìm tọa độ các điểm A và B.

b) Hai điểm A, B và gốc tọa độ O tạo thành tam giác vuông AOB. Quay tam giác vuông AOB một vòng quanh cạnh góc vuông OA cố định ta được một hình gì? Tính diện tích xung quanh hình đó.

Lời giải:

a) Giao điểm đồ thị với trục tung: $x = 0 \Rightarrow y = 4$. Tọa độ điểm $A(0;4)$

Giao điểm đồ thị với trục hoành: $y = 0 \Rightarrow x = 4$. Tọa độ điểm $B(4;0)$

b) Quay tam giác vuông AOB một vòng quanh cạnh OA ta được một hình nón.

Hình nón có bán kính đáy $\mathrm{r} = OB = 4$, đường sinh $AB = 1 = 4\sqrt{2}$ (Do tam giác AOB cân tại O có $OA = OB = 4$)

Diện tích xung quanh hình nón là: $\mathrm{S}_{xq} = \pi \mathrm{r} l = \pi 4.4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\pi$ (đơn vị diện tích)

Bài 14 (Thái Bình – 2010 – 2011): Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y=(k-1)x+n$ và hai điểm $A(0;2), B(-1;0)$

1. Tìm các giá trị của k và n để:

a) Đường thẳng (d) đi qua hai điểm A và B.

b) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(\Delta): y=x+2-k$.

2. Cho $n=2$. Tìm k để đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm C sao cho diện tích tam giác OAC gấp hai lần diện tích tam giác OAB.

Lời giải:

1a) $(d): y=(k-1)x+n$ đi qua $A(0;2), B(-1;0)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(k-1).0+n=2\\(k-1).(-1)+n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=2\\1-k+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=2\\k=3\end{cases}$$

Kết luận: Vậy $k=3, n=2$ thì (d) đi qua hai điểm $A(0;2), B(-1;0)$

b) $(d)//(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}k-1=1\\n\neq 2-k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\n\neq 0\end{cases}$

Kết luận: Vậy $(d)//(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\n\neq 0\end{cases}$

2. Với $n=2$, ta có $(d): y=(k-1)x+2$. Suy ra đường thẳng (d) cắt trục Ox tại C $\Leftrightarrow k-1\neq 0\Leftrightarrow k\neq 1$

Khi đó tạo độ điểm C là $\left(\dfrac{2}{1-k};0\right)$

Ta có: $OC=|x_C|=\dfrac{2}{|1-k|}$ và do $B(-1;0)$ nên $OB=1$.

Vì các tam giác OAC và OAB vuông tại O và chung đường cao AO nên suy ra:

$$S_{OAC}=2S_{OAB}\Leftrightarrow OC=2OB\Leftrightarrow\frac{2}{|1-k|}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k=2\end{array}\right.$$ (thỏa mãn đk $k\neq 1$)

Kết luận: $k=0$ hoặc $k=2$.

Bài 15 (Hồ Chí Minh – 2010 – 2011):

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y=-\dfrac{x^2}{2}$ và đường thẳng $(D): y=\dfrac{1}{2}x-1$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) bằng phép tính.

Lời giải:

a) Đồ thị: học sinh tự vẽ.

Lưu ý: (P) đi qua $O(0;0),\left(\pm 1;-\dfrac{1}{2}\right),(\pm 2;-2)$. (D) đi qua $\left(1;-\dfrac{1}{2}\right),(-2;-2)$

Do đó (P) và (D) có hai điểm chung là: $\left(1;-\frac{1}{2}\right),\left(-2;-2\right)$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) là:

$\frac{-x^2}{2}=\frac{1}{2}x-1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ hay $x=-2$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (D) là $\left(1;-\frac{1}{2}\right),\left(-2;-2\right)$

Bài 16 (Ninh Thuận – 2012 -2013): Cho hai hàm số $y=x^2$ và $y=x+2$

a) Vẽ đồ thị hai hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

b) Bằng phép tính hãy xác định tọa độ các giao điểm A, B của hai đồ thị trên (điểm A có hoành độ âm).

c) Tính diện tích của tam giác OAB (O là gốc tọa độ)

Lời giải:

a) Vẽ (d) và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ.

	-2	-1	0	1	2
$y=x^2 \quad (P)$	4	1	0	1	4

x	-2	0
$y=x+2(d)$	0	2

Bạn đọc tự vẽ.

b) Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=x+2 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1; x_2=2 \\ y_1=1; y_1=4 \end{cases}$$

Tọa độ các giao điểm của (d) và (P) là: $A\left(-1;1\right)$ và $B\left(2;4\right)$

c) Ta có: $S_{OAB}=\frac{1}{2}.\left(1+4\right).3-\frac{1}{2}.1.1-\frac{1}{2}2.4=3$

Bài 17 (Hưng Yên – 2012 – 2013): Cho đường thẳng (d): $y=2x+m-1$.

a) Khi $m=3$, tìm a để điểm $A\left(a;-4\right)$ thuộc đường thẳng (d).

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại M và N sao cho tam giác OMN có diện tích bằng 1.

Lời giải:

a) Thay $m=3$ vào phương trình đường thẳng ta có: $y=2x+2$

Để điểm $A\left(a;-4\right)$ thuộc đường thẳng (d) khi và chỉ khi: $-4=2a+2$ suy ra $a=-3$.

b) Cho $x=0$ suy ra $y=m-1$ suy ra: $ON=\left|m-1\right|$, cho $y=0$ suy ra $x=\dfrac{1-m}{2}$

suy ra $OM=\left|\dfrac{1-m}{2}\right|$ hay $OM=\left|\dfrac{m-1}{2}\right|$

Để diện tích tam giác $OMN=1$ khi và chỉ khi: $OM.ON=2\Leftrightarrow\left|m-1\right|.\left|\dfrac{m-1}{2}\right|=2$

Khi và chỉ khi $\left(m-1\right)^2=4$ khi và chỉ khi: $m-1=2$ hoặc $m-1=-2$ suy ra $m=3$ hoặc $m=-1$.

Vậy để diện tích tam giác $OMN=1$ khi và chỉ khi $m=3$ hoặc $m=-1$.

Bài 18 (Đồng Nai – 2012 – 2013): Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho các hàm số: $y=3x^2$ có đồ thị $\left(P\right); y=2x-3$ có đồ thị là (d); $y=kx+n$ có đồ thị là $\left(d_1\right)$ với k và n là những số thực.

1) Vẽ đồ thị (P).

2) Tìm k và n biết $\left(d_1\right)$ đi qua điểm $T\left(1;2\right)$ và $\left(d_1\right)//\left(d\right)$.

Lời giải

1) Vẽ đồ thị (P).

2) $\left(d_1\right)//\left(d\right)$ nên $k=2; n\neq-3$ và đi qua điểm $T\left(1;2\right)$ nên $x=1; y=2$.

Ta có phương trình: $2=1.2+n\Rightarrow n=0$.

Bài 19 (Đồng Nai – 2012 – 2013): Cho parabol $y=x^2\left(P\right)$ và đường thẳng $y=mx\left(d\right)$, với m là tham số.

1) Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 9.

2) Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm, mà khoảng cách giữa hai điểm này bằng $\sqrt{6}$.

Lời giải

1) Phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d):

$$x^2-mx=0\Leftrightarrow x\left(x-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=m\end{array}\right.$$

Vì giao điểm $\in\left(P\right): y=x^2\Rightarrow y=m^2$. Với $y=9\Rightarrow m^2=9\Leftrightarrow m=3; m=-3$.

Vậy với $m=\pm3$ thì (P) và (d) cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 9.

2) Từ ý (1) suy ra: (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi $m\neq0$.

Khi đó giao điểm thứ nhất là gốc tạo độ O $\left(x=0; y=0\right)$, giao điểm thứ 2 là điểm a có $\left(x=m; y=m^2\right)$.

Khooảng cách giữa hai giao điểm: $AO=\sqrt{m^2+m^4}=\sqrt{6}\Leftrightarrow m^4+m^2-6=0$ (1)

Đặt $t=m^2;\left(t\geq0\right)$

$\left(1\right)\Leftrightarrow t^2+t-6=0\Leftrightarrow t_1=3$ (nhận); $t_2=-2$ (loại),

Với $t_1=3\Leftrightarrow m^2=3\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{3}$ (nhận).

Vậy với $m=\pm\sqrt{3}$ thì (P) cắt (d) tại hai điểm có khoảng cách bằng $\sqrt{6}$.

Bài 20 (Lào Cai – 2012 – 2013):

1. Cho hai hàm số bậc nhất $y=-x+2$ hay $y=(m+3)x+4$. Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số đã cho là:

a) Hai đường thẳng cắt nhau.

b) Hai đường thẳng song song.

2. Tìm các giá trị của a để đồ thị hàm số $y=ax^2\ (a\neq 0)$ đi qua điểm $M(-1;2)$.

Lời giải

1.a) Để hàm số $y=(m+3)x+4$ là hàm số bậc nhất thì $m+3\neq 0$ suy ra $m\neq -3$.

Đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau $\Leftrightarrow a\neq a'$.

$\Leftrightarrow -1\neq m+3 \Leftrightarrow m\neq -4$

Vậy với $m\neq -3$ và $m\neq -4$ thì đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau.

b) Đồ thị của hàm số đã cho là hai đường thẳng song song

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b\neq b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=m+3 \\ 2\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m=-4$ (thỏa mãn điều kiện $m\neq -3$)

Vậy với $m=-4$ thì đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng song song.

2. Tìm các giá trị của a để đồ thị hàm số $y=ax^2\ (a\neq 0)$ đi qua điểm $M(-1;2)$.

Vì đồ thị hàm số $y=ax^2\ (a\neq 0)$ đi qua điểm $M(-1;2)$ nên ta thay $x=-1$ và $y=2$ vào hàm số ta có phương trình $2=a.(-1)^2$ suy ra $a=2$ (thỏa mãn điều kiện $a\neq 0$)

Vậy với $a=2$ thì đồ thị hàm số $y=ax^2\ (a\neq 0)$ đi qua điểm $M(-1;2)$.

Bài 21 (Gia Lai – 2012 – 2013): Cho hàm số $y=-x^2$ có đồ thị (P). Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $M(0;1)$ và có hệ số góc k.

a. Viết phương trình của đường thẳng d.

b. Tìm điều kiện của k để đồ thị d cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

a. Viết phương trình của đường thẳng d

Đường thẳng d với hệ số góc k có dạng $y=kx+b$

Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;1)$ nên: $1=k.0+b \Leftrightarrow b=1$

Vậy $d: y=kx+1$.

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d:

$-x^2=kx+1 \Leftrightarrow x^2+kx+1=0$, có $\Delta=k^2-4$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi $\Delta>0$

$k^2-4>0 \Leftrightarrow k^2>4 \Leftrightarrow k^2>2^2 \Leftrightarrow |k|>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k<-2 \\ k>2 \end{array}\right.$.

Bài 21 (Bình Định – 2012 – 2013): Cho parabol (P) và đường thẳng (d) có phương trình lần lượt là $y=mx^2$ và $y=(m-2)x+m-1$ (m là tham số, $m \neq 0$).

a) Với $m=-1$, tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$ đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

a) Với $m=-1$ (P) và (d) lần lượt trở thành $y=-x^2; y=x-2$.

Lúc đó phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$-x^2=x-2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$ có $a+b+c=1+1-2=0$ nên có hai nghiệm là $x_1=1; x_2=-2$.

Với $x_1=1 \Rightarrow y_1=-1$

Với $x_2=-2 \Rightarrow y_2=-4$x

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(1;-1)$ và $(-2;-4)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$mx^2=(m-2)x+m-1 \Leftrightarrow mx^2-(m-2)x-m+1=0(*)$

Với $m \neq 0$ thì (*) là phương trình bậc hai ẩn x có:

$\Delta=(m-2)^2-4m(-m+1)=m^2-4m+4+4m^2-4m=5m^2+4>0$ với mọi m. Suy ra (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Hay với mọi $m \neq 0$ đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 22 (Quảng Ngãi – 2012 – 2013): Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m^2+1$(m là tham số).

1. Xác định tất cả các giá trị của m để (d) song song với đường thẳng $(d'): y=2m^2x+m^2+m$.

2. Chứng minh rằng với mọi m, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

3. Kí hiệu $x_A : x_B$ là hoành độ của điểm A và điểm B. Tìm m sao cho ${x_A}^2+{x_B}^2=14$

Lời giải

1. Đường thẳng $(d): y=2x+m^2+1$ song song với đường thẳng $(d'): y=2m^2x+m^2+m$ khi:

$$\begin{cases} 2=2m^2 \\ m^2+1 \neq m^2+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=-1 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$x^2=2x+m^2+1 \Leftrightarrow x^2-2x-m^2-1=0$ là phương trình bậc hai có $ac=-m^2-1<0$ với mọi m nên luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Do đó (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B với mọi m.

3. **Cách 1:** Kí hiệu $x_A : x_B$ là hoành độ của điểm A và điểm B thì $x_A : x_B$ là nghiệm của phương trình: $x^2 - 2x - m^2 - 1 = 0$

Giải phương trình $x^2 - 2x - m^2 - 1 = 0$

$\Delta' = 1 + m^2 + 1 = m^2 + 2 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{m^2 + 2}$

Phương trình có hai nghiệm là $x_A = 1 + \sqrt{m^2 + 2}; x_B = 1 - \sqrt{m^2 + 2}$

Do đó: ${x_A}^2 + {x_B}^2 = 14 \Leftrightarrow \left(1 + \sqrt{m^2 + 2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{m^2 + 2}\right)^2 = 14$

$\Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{m^2 + 2} + m^2 + 2 + 1 - 2\sqrt{m^2 + 2} + m^2 + 2 = 14$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 6 = 14 \Leftrightarrow 2m^2 = 8 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Cách 2: Kí hiệu $x_A : x_B$ là hoành độ của điểm A và điểm B thì $x_A : x_B$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - m^2 - 1 = 0$. Áp dụng hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} S = x_A + x_B = 2 \\ P = x_A.x_B = -m^2 - 1 \end{cases}$ do đó, ta có:

${x_A}^2 + {x_B}^2 = 14 \Leftrightarrow \left(x_A + x_B\right)^2 - 2x_A.x_B = 14 \Leftrightarrow 2^2 - 2\left(-m^2 - 1\right) = 14 \Leftrightarrow 4 + 2m^2 + 2 = 14 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Bài 23 (Hà Tĩnh – 2012 – 2013):

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $M\left(-1;2\right)$ và song song với đường thẳng $y = 2x + 1$. Tìm a và b.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 4x - m^2 - 5m = 0$. Tìm các giá trị của m sao cho: $\left|x_1 - x_2\right| = 4$.

Lời giải

a) Đường thẳng $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = 2x + 1$ nên: $a = 2, b \neq 1$.

Vì đường thẳng $y = 2x + b$ đi qua điểm $M\left(-1;2\right)$ nên ta có phương trình: $2\left(-1\right) + b = 2 \Leftrightarrow b = 4$ (thỏa mãn $b \neq 1$). Vậy $a = 2, b = 4$.

b) Ta có: $\Delta' = 4 + m^2 + 5m = \left(m + 1\right)\left(m + 4\right)$. Để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thì ta có: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -4$ hoặc $m \geq -1\left(*\right)$

Theo định lí Viet, ta có: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -4$ và $x_1, x_2 = \dfrac{c}{a} = -m^2 - 5m$.

Ta có: $\left|x_1 - x_2\right| = 4 \Leftrightarrow \left(x_1 - x_2\right)^2 = 16 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1.x_2 = 16$

$\Leftrightarrow 16 - 4\left(-m^2 - 5m\right) = 16 \Leftrightarrow m^2 + 5m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -5$

Kết hợp với điều kiện (*), ta có $m = 0, m = -5$ là các giá trị cần tìm.

Bài 24 (Bình Dương – 2012 – 2013):

1. Vẽ đồ thị (P) hàm số $y=\frac{x^2}{2}$

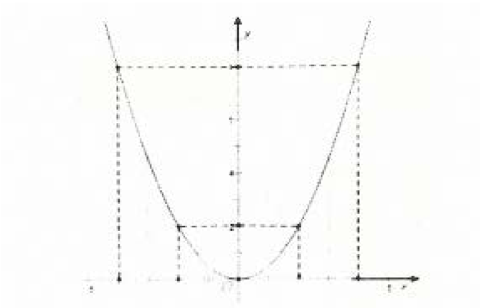
2. Xác định m để đường thẳng $(d): y=x-m$ cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng 1. Tìm tung độ của điểm A.

Lời giải

- Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y=\frac{x^2}{2}$	8	2	0	2	8

- Đồ thị (P) là đường parabol đỉnh $O(0;0)$ nằm phía trên trục hoành, nhận trục tung làm trục đối xứng và đi qua các điểm có tọa dộ cho trong bảng trên.



2/ **Cách 1:**

Vì (d) cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng 1 nên $x=1$ thỏa mãn công thức hàm số (P) nên tung độ của điểm A là: $y_A=\frac{1^2}{2}=\frac{1}{2}$

Do đó $A\left(1;\frac{1}{2}\right)\in(d)$ nên $\frac{1}{2}=1-m\Rightarrow m=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Vậy với $m=\frac{1}{2}$ thì $(d): y=x-m$ cắt P tại điểm A có hoành độ bằng 1. Khi đó tung độ $y_A=\frac{1}{2}$.

Cách 2:

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $\frac{x^2}{2}=x-m\Leftrightarrow x^2-2x+2m=0(*)$

Để (d) cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng 1 thì phương trình (P) có nghiệm bằng 1.

$\Rightarrow I^2-2.1+2m=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

Vậy với $m=\frac{1}{2}$ thì $(d): y=x-m$ cắt P tại điểm A có hoành độ bằng 1. Khi đó tung độ $y_A=\frac{1^2}{2}=\frac{1}{2}$.

Bài 25 (Thái Bình – 2012 – 2013): Trong mặt phẳn tọa độ Oxy cho parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+2$ (m là tham số).

1. Tìm m để (d) cắt (P) tại một điểm duy nhất.

2. Cho hai điểm $A\left(-2;m\right)$ và $B\left(1;n\right)$. Tìm m, n để a thuộc (P) và B thuộc (d).

3. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến (d). Tìm m để độ dài đoạn OH lớn nhất.

Lời giải:

1. (d) cắt (P) tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow$ Phương trình hoành độ của (d) và (P):

$-x^2 = mx+2 \Leftrightarrow x^2+mx+2=0$ có nghiệm duy nhất.

$\Leftrightarrow \Delta = m^2-8=0 \Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt{2}$

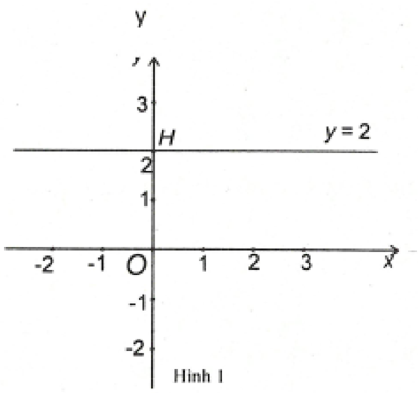
Vậy giá trị m cần tìm là $m=\pm 2\sqrt{2}$.

2. $\begin{cases} A\in\left(P\right) \\ B\in\left(d\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\left(-2\right)^2 \\ n=m+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-4 \\ n=-2\end{cases}$

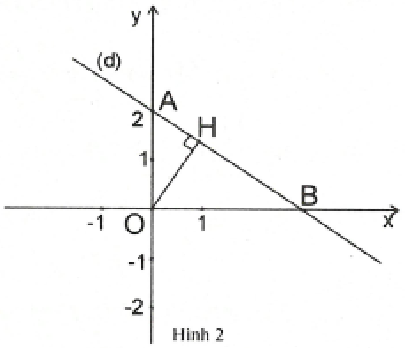
Vậy $m=-4, n=-2$

3. Nếu $m=0$ thì (d) thành: $y=2 \Rightarrow$ khoảng cách từ O đến $\left(d\right)=2 \Rightarrow OH=2$

(Hình 1).



Hình 1



Hình 2

- Nếu $m\neq 0$ thì (d) cắt trục tung tại điểm $A\left(0;2\right)$ và cắt trục hoành tại điểm $B\left(-\frac{2}{m};0\right)$ (Hình 2).

$\Rightarrow OA=2; OB=\left|-\frac{2}{m}\right|=\frac{2}{\left|m\right|}$.

ΔOAB vuông tại O có $OH\perp AB$ suy ra: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{4}+\frac{m^2}{4}=\frac{m^2+1}{4}$

$\Rightarrow OH=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$. Vì $m^2+1>1\ \forall m\neq 0 \Rightarrow \sqrt{m^2+1}>1 \Rightarrow OH<2$.

So sánh hai trường hợp, ta có $OH_{\max}=2 \Leftrightarrow m=0$.

CHƯƠNG III:

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1: Phương trình bậc nhất, bậc hai, tam thức bậc hai

A. Lí thuyết cần nhớ:

I. Phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0\ (1)$

1. Cách giải và biện luận trong trường hợp tổng quát:

+ Nếu $a=0$ ta được phương trình bậc nhất: $bx+c=0$

Biện luận như sau:

a. Nếu $b\neq 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất: $x=-\frac{c}{b}.$

b. Nếu $b=0;\ c=0$ thì phương trình có nghiệm đúng với mọi x thuộc R.

c. Nếu $b=0;\ c\neq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $a\neq 0.$ Tính Δ (hoặc Δ')

Với $\Delta=b^2-4ac;\ \Delta'=b'^2-ac;\ \mathrm{b}'=\frac{b}{2}.$

- Nếu $\Delta<0$ thì phương trình vô nghiệm.

- Nếu $\Delta=0$ phương trình có nghiệm kép $x_0=-\frac{b}{2a}.$

- Nếu $\Delta>0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

2. Chú ý:

+ Nếu $ac<0$ thì phương trình bậc hai luôn có hai nghiệm phân biệt.

+ Nếu $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình thì: $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$

+ Nếu $a+b+c=0$ thì (1) có hai nghiệm: $x_1=1;x_2=\frac{c}{a}.$

+ Nếu $a-b+c=0$ thì (1) có hai nghiệm: $x_1=-1;x_2=-\frac{c}{a}.$

3. Định lí Viet

a. Phần thuận: Nếu phương trình bậc hai có hai nghiệm $x_1;x_2$ thì:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ P=x_1.x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$$

b. Phần đảo: Nếu hai số $x_1;x_2$ thỏa mãn: $\begin{cases} x_1+x_2=S \\ x_1.x_2=P \end{cases}\left(S^2-4P\ge 0\right)$

Thì $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình: $x^2-Sx+P=0$

4. Dấu của nghiệm:

Nếu phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0\ \left(a\ne 0\right)$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thì:

$x_1<0<x_2 \Leftrightarrow P<0$

$x_1<0<x_2 \Leftrightarrow P<0$

$x_1<x_2<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \\ S<0 \end{cases}$

$0<x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases}$

II. Tam thức bậc hai: $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\ \left(a\ne 0\right)$

1. Dấu của tam thức:

- $f\left(x\right)<0$ với mọi x thuộc R $\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$
- $f\left(x\right)>0$ với mọi x thuộc R $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$
- Nếu $\Delta=0$ thì $a.f\left(x\right)>0$ với mọi $x\ne -\dfrac{b}{2a}$
- Nếu $\Delta>0$ thì $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2;x_1<x_2$

+ Nếu $x_1<x<x_2$ thì $af\left(x\right)<0$

+ Nếu $x<x_1$ hoặc $x>x_2$ thì $a.f\left(x\right)>0$

2. Công thức so sánh các số α, β với hai nghiệm của phương trình bậc hai $\left(\alpha<\beta\right)$

- $x_1<\alpha<x_2 \Leftrightarrow a.f\left(a\right)<0$
- Nếu tồn tại số thực α sao cho $a.f\left(\alpha\right)<0$ thì phương trình bậc hai: $f\left(x\right)=ax^2+bx+c=0\ \left(a\ne 0\right)$**.** Có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1<\alpha<x_2$
- $x_1<x_2<\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ a.f\left(a\right)>0 \\ \dfrac{S}{2}-\alpha<0 \end{cases}$ $\qquad \alpha<x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ a.f\left(\alpha\right)>0 \\ \dfrac{S}{2}-\alpha>0 \end{cases}$
- $\alpha<x_1<\beta<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a.f\left(\beta\right)<0 \\ a.f\left(\alpha\right)>0 \end{cases}$ $\qquad x_1<\alpha<x_2<\beta \Leftrightarrow \begin{cases} a.f\left(\alpha\right)<0 \\ a.f\left(\beta\right)>0 \end{cases}$

- $\alpha < x_1 < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\beta) > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \alpha < \dfrac{S}{2} < \beta \end{cases}$ $\qquad x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\alpha) < 0 \\ a.f(\beta) < 0 \end{cases}$

B. Các vấn đề toán và phương pháp giải:

<u>Vấn đề 1: Giải và biện luận phương trình bậc nhất:</u>

Bước 1: Biến đổi phương trình đã cho về dạng: $ax + b = 0 \ (1)$

Bước 2: Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $a = 0$ thế vào (1) và kiểm tra.

Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ: Giải và biện luận các phương trình sau:

a) $mx + (m^2 - m) = 0$ b) $m^2(x+1) + 2 = x + 3m$

Phân tích và hướng dẫn giải:

a) Rõ ràng phương trình (a) này đã ở dạng chính tắc. Ta có:

$$mx = m(1-m)$$

+ Với $m = 0$ thì phương trình trở thành $0x = 0$ nên phương trình có vô số nghiệm.

+ Với $m \neq 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 1 - m$.

Kết luận:

+ $m = 0;\ x \in R.$

+ $m \neq 0;\ x = 1 - m.$

b) Phương trình (b) này chưa đưa về dạng chính tắc, ta cần thêm một bước biến đổi:

$m^2(x+1) + 2 = x + 3m \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = -m^2 + 3m - 2$

$\Leftrightarrow (m-1)(m+1)x = -(m-1)(m-2)$

+ Với $m = 1$ thì phương trình trở thành $0x = 0$ nên phương trình có vô số nghiệm.

+ Với $m = -1$ thì phương trình trở thành $0x = -6$ nên phương trình vô nghiệm.

+ Với $m \neq \pm 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất: $x = -\dfrac{m-2}{m+1} = \dfrac{2-m}{m+1}$

Kết luận:

+ $m = 1;\ x \in R.$

+ $m = -1$, phương trình vô nghiệm.

+ $m \neq \pm 1,\ x = \dfrac{2-m}{m+1}.$

Vấn đề 2: Nghiệm của phương trình bậc nhất thỏa mãn điều kiện cho trước:

Bước 1: Đưa phương trình đã cho về dạng: $ax + b = 0\ \ (1)$

Bước 2: Tìm điều kiện của a để (1) có nghiệm x_0. Cho nghiệm x_0 thỏa mãn điều kiện.

Ví dụ: Tìm m để phương trình $m^2.x + m^3 - 3m^2 = x - 3m + 1$ có duy nhất một nghiệm x_0 thỏa mãn: $|x_0| \geq 1$.

Phân tích và hướng dẫn giải:

Bài toán có hai yêu cầu:

- Một là nghiệm duy nhất.

- Hai là nghiệm duy nhất ấy phải thỏa mãn : $|x_0| \geq 1$.

Đầu tiên ta có một bước là đưa về phương trình dạng chính tắc:

$m^2.x + m^3 - 3m^2 = x - 3m + 1$

$\Leftrightarrow \left(m^2 - 1\right)x = -m^3 + 3m^2 - 3m + 1$

$\Leftrightarrow (m-1)(m\ \ +1)x = -(m-1)^3$

+ Với $m = 1$, phương trình có vô số nghiệm nên không xét trường hợp này.

+ Với $m = -1$, phương trình trở thành $0x = 8$ nên phương trình vô nghiệm.

+ Với $m \neq \pm 1$ phương trình có nghiệm duy nhất: $x_0 = \dfrac{-(m-1)^2}{m+1}$

Khi đó để có $|x_0| \geq 1$ ta phải có: $\left|\dfrac{-(m-1)^2}{m+1}\right| \geq 1 \Leftrightarrow (m-1)^2 \geq |m+1|$

$\Leftrightarrow (m-1)^4 \geq (m+1)^2$

$\Leftrightarrow \left((m-1)^2 - (m+1)\right).\left((m-1)^2 + (m+1)\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(m^2 - 3m\right)\left(m^2 - m + 2\right) \geq 0$

Do $m^2 - m + 2 = \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} > 0; \forall m$ nên: $m^2 - 3m \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m \leq 0 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $m \neq \pm 1$ ta có: $m \geq 3;\ m \leq 0$ thỏa mãn.

Vấn đề 3: Giải và biện luận phương trình bậc hai:

Bước 1: Xét a = 0 biện luận phương trình bậc nhất.

Bước 2: Xét $a \neq 0$ tính Δ hoặc Δ'

Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm

Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$

Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ: Giải và biện luận các phương trình sau:

a) $x^2 - mx + m = 0$

b) $x^2 - (m+2)x + m^2 = 2m$

Phân tích và hướng dẫn giải:

a) $x^2 - mx + (m+2) = 0.$

Đây là phương trình bậc hai dạng chính tắc có: $\Delta = m^2 - 4m = m(m-4)$

+ Với $m < 0$ hoặc $m > 4$ thì ta có: $\Delta > 0.$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2}$$

+ Với $0 < m < 4$ thì ta có: $\Delta < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

+ Với $m = 0$ thì $\Delta = 0$ phương trình có nghiệm kép $x = 0.$

+ Với $m = 4$ thì $\Delta = 0$ phương trình có nghiệm kép $x = 2.$

Kết luận:

+ $m = 0$; nghiệm kép $x = 0.$

+ $m = 4$; nghiệm kép $x = 2.$

+ $0 < m < 4$; vô nghiệm.

+ $m < 0; m > 4$, hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{m+\sqrt{m^2-4m}}{2}; x_2 = \frac{m-\sqrt{m^2-4m}}{2}$$

b) Phương trình đã cho chưa ở dạng chính tắc, ta cần thêm một bước:

$$x^2 - (m+2)x + m^2 = 2m \Leftrightarrow m^2 - (m+2)x + (m^2 - 2m) = 0$$

Đến đây bạn đọc có thể làm tương tự cho câu (a).

<u>Vấn đề 4: Chứng minh một phương trình bậc hai có nghiệm:</u>

Bản chất là chứng minh $\Delta \geq 0.$

<u>Vấn đề 5: Phương trình bậc hai có hai nghiệm thỏa mãn một điều kiện cho trước:</u>

1. Các điều kiện cho trước thường gặp:

a. Hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn một phương trình, một bất phương trình.

b. Một biểu thức chứa hai nghiệm $x_1; x_2$ đạt giá trị lớn nhất, bé nhất.

c. Nghiệm âm, nghiệm dương.

d. Nghiệm thuộc (a; b) cho trước.

e. Nghiệm nguyên.

f. Nghiệm này bằng k lần nghiệm kia.

2. Phương pháp giải:

Bài toán 1: Hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn một phương trình, một bất phương trình:

Bước 1: Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$.

Bước 2: Biến đổi phương trình, bất phương trình chứa $\left(x_1+x_2\right); x_1.x_2$ sau đó áp dụng định lí Viet tìm m.

Bước 3: Dùng các điều kiện ràng buộc của m tìm ra m. Kết luận.

Bài toán 2: Biểu thức chứa hai nghiệm $x_1; x_2$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bước 1: Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$.

Bước 2: Biến đổi biểu thức chứa $\left(x_1+x_2\right); x_1.x_2$. Dùng định lí Viet đưa về hàm f(m)

Bước 3: Để tìm min, max của f(m) có thể dùng một trong các cách sau:

Cách 1: Phân tích $f\left(m\right)=\pm\left(\alpha m+\beta\right)^2+A^2$

Cách 2: Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.

Cách 3: Dùng bất đẳng thức Cô si, Bunhiacopxki.

Bài toán 3: Nghiệm thuộc (a; b) âm dương.

Dùng công thức so sánh nghiệm.

Bài toán 4: Nghiệm nguyên.

Dùng tính chia hết số chính phương.

Bài toán 5: Nghiệm này bằng k lần nghiệm kia.

Bước 1: Giả sử phương trình bậc hai có hai nghiệm $x_1; x_2$.

Bước 2: Nghiệm này bằng k lần nghiệm kia nên ta có được phương trình: $\left(x_1-kx_2\right)\left(x_2-kx_1\right)=0$.

Bước 3: Biến đổi đẳng thức trên về tổng, tích rồi dùng Viet.

Vấn đề 6: Quan hệ nghiệm của hai phương trình bậc hai:

Bài toán 1: Cho hai phương trình bậc hai:

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0\ \left(1\right)$$
$$a_2x^2+b_2x+c_2=0\ \left(2\right)$$

Tìm các giá trị của tham số m để (1); (2) có nghiệm chung.

Phương pháp:

Bước 1: Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình thì:

$$\begin{cases}a_1x_0^2+b_1x_0+c_1=0\\a_2x_0^2+b_2x_0+c_2=0\end{cases}$$

Bước 2: Giải hệ trên tìm x_0. Suy ra m.

Bước 3: Thế m vào (1); (2) để kiểm tra.

Bài toán 2: Tìm giá trị của m để (1); (2) có nghiệm sao cho một nghiệm của phương trình (1) bằng k lần một nghiệm của phương trình (2)

Phương pháp:

Bước 1: Gọi x_0 là một nghiệm của (2) thì $kx_0\left(k\neq 0\right)$ là một nghiệm của (1).

Khi đó x_0 là nghiệm của hệ. $\begin{cases} a_2x_0^2+b_2x_0+c_2=0 \\ a_1\left(kx_0\right)^2+b_2\left(kx_0\right)+c_1=0 \end{cases}$

Bước 2: Giải hệ trên tìm x_0. Suy ra m.

Bước 3: Lấy giá trị của m thế vào (1) và (2) để kiểm tra.

Bài toán 3: Tìm các giá trị của tham số m để (1); (2) tương đương.

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa vì hai phương trình tương đương.

Hoặc là cả hai phương trình vô nghiệm hoặc có cùng hai nghiệm.

Vấn đề 7: Các ứng dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai:

Chứng minh bất đẳng thức:

Phương pháp: Từ một đẳng thức $T=f\left(x;\,y\right)$ ta biến đổi về phương trình bậc hai. Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\geq 0$ ta có điều phải chứng minh.

Tìm max, min của hàm số:

Phương pháp: Từ hàm số $y=f\left(x\right)$ đưa về một phương trình bậc hai.

Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai để tìm max, min.

C. Một số bài tập áp dụng:

1) Phương trình bậc nhất, bậc hai:

Bài 1 (Bình Định - 2010) Giải các phương trình sau:

a) $3\left(x-1\right)=2+x$ b) $x^2+5x-6=0$

Lời giải:

Giải các phương trình sau:

a) $3\left(x-1\right)=2+x$

$3x-3=2+x$

$2x=5$

Vậy $x=\dfrac{5}{2}$

b) $x^2+5x-6=0$

Ta có: $a+b+c=1+5-6=0$ Nên pt có hai nghiệm là $x_1=1; x_2=-6$

Nhận xét: Với các bài giải phương trình, cần chú ý tới điểm đặc biệt của tham số như với điều kiện $a+b+c=0$ hoặc $a-b+c=0$ để giải phương trình nhanh hơn.

Bài 2 (Bình Dương - 2010): Giải phương trình $x^2+5x+6=0$

Lời giải:

1) $x^2+5x+6=0$ $\quad\quad\quad\quad$ $\Delta=b^2-4ac=25-4.6=1$

Vì $\Delta>0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+1}{2}=-2 \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-1}{2}=-3 \end{cases}$$

Bài 3 (Hải Dương - 2012) Giải các phương trình sau:

a) $\left(\dfrac{2}{3}x-5\right)\left(\dfrac{4}{5}x+3\right)=0$ $\quad\quad$ b) $|2x-3|=1.$

Lời giải:

a) $\left(\dfrac{2}{3}x-5\right)\left(\dfrac{4}{5}x+3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{3}x-5=0 \\ \dfrac{4}{5}x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=15 \\ 4x=-15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{15}{2} \\ x=\dfrac{-15}{4} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\dfrac{15}{2};\dfrac{-15}{4}\right\}$

b) $|2x-3|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=1 \\ 2x-3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=4 \\ 2x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{1;2\}$.

Bài 4 (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2012): Cho phương trình:

$x^2+2mx+m^2-2m+4=0$

1. Giải phương trình khi $m=4$
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải:

1. Khi m = 4, ta có phương trình: $x^2+8x+12=0$ có $\Delta'=16-12=4>0$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt.

$x_1=-4+2=-2$ và $x_2=-4-2=-6$

2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

$x^2+2mx+m^2-2m+4=0$

Có $\Delta'=m^2-\left(m^2-2m+4\right)=2m-4$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0$

$\Leftrightarrow 2m-4>0 \Leftrightarrow 2(m-2)>0 \Leftrightarrow m-2>0 \Leftrightarrow m>2$

Vậy với m > 2 thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

2) Định lí Viet và ứng dụng:

Bài 1: Cho phương trình $x^2-(m+1)x+12=0$

a. Giải phương trình khi m = 12

b. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm đối nhau

c. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn:

$(x_1-2x_2)(x_2-2x_1)=10$

Lời giải:

$x^2-(m+1)x+12=0 \quad (1)$

a. Khi m = 12, phương trình (1) trở thành: $x^2-13x+12=0$

Ta có $\Delta = 13^2-4.12=121$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{13-\sqrt{\Delta}}{2}=1; x_2=\frac{13+\sqrt{\Delta}}{2}=12$$

Vậy $x=1;x=12$ là nghiệm của phương trình.

b. Phương trình (1) là phương trình bậc hai có:

$\Delta=(m+1)^2-4.12=m^2-2m-47$

Nhận thấy x = 0 không là nghiệm của phương trình.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m^2-2m-47>0$

Với điều kiện trên, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$:

Áp dụng định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m+1 \\ x_1x_2=12 \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm đối nhau $\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ -x_1^2=12 \end{cases}$ (vô lí)

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn

c. Ta có: $(x_1-2x_2)(x_2-2x_1)=x_1x_2-2x_1^2-2x_2^2+4x_1x_2$

$=3x_1x_2-2(x_1^2+x_2^2)=7x_1x_2-2(x_1+x_2)^2=7.12-2.(m+1)^2$

$=82-2m-m^2 \Rightarrow 82-2m-m^2=10 \Leftrightarrow m^2+2m-72=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1-\sqrt{73} \quad (\text{thoa man}) \\ m=-1+\sqrt{73} \quad (\text{loai}) \end{array}\right.$

Vậy $m=-1-\sqrt{73}$ là giá trị cần tìm.

Bài 2: Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+4m=0$

a. Giải phương trình khi m = 3.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó.

c. Xác định m để phương trình có một nghiệm bằng 4. Tìm nghiệm còn lại.

Lời giải:

$x^2-2(m+1)x+4m=0 \ (1)$

a. Khi m = 3, phương trình (1) trở thành: $x^2-8x+12=0$

Phương trình có $\Delta=8^2-4.12=16$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{8+\sqrt{16}}{2}=6; x_2=\dfrac{8-\sqrt{16}}{2}=2$

Vậy $x=6; x=2$ là nghiệm của phương trình.

b. Phương trình (1) là phương trình bậc hai có:

$\Delta'=(m+1)^2-4m=m^2-2m+1$

Phương trình có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow m^2-2m+1=0 \Leftrightarrow (m-1)^2=0 \Leftrightarrow m-1=0 \Leftrightarrow m=1$

Vậy với $m=1$, Phương trình có nghiệm kép.

c. Phương trình (1) có một nghiệm bằng 4.

$\Rightarrow 4^2-2(m+1).\,4+4m=0 \Leftrightarrow 16-8m-8+4m=0 \Leftrightarrow 4m=8 \Leftrightarrow m=2$

Với $m=2$; phương trình (1) trở thành:

$x^2-6x+8=0$

Phương trình có $\Delta'=3^2-8=1$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{3+\sqrt{1}}{1}=4; x_2=\dfrac{3-\sqrt{1}}{1}=2$

Vậy khi m = 2; phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x=4; x=2$

Bài 3: Cho phương trình: $(m+1)x^2-2(m+1)x+m-3=0$

a. Giải phương trình khi m = 3

b. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn

$(4x_1+1)(4x_2+1)=18$

Lời giải:

$\left(m+1\right)x^2-2\left(m+1\right)x+m-3=0 \quad (1)$

a. Khi m = 3; phương trình (1) trở thành:

$$4x^2-8x=0 \Leftrightarrow 4x\left(x-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=0\\x-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

Vậy khi $m=3; x=0, x=2$ là nghiệm của phương trình.

b. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m+1\neq 0\\ \Delta'>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq -1\\ \left(m+1\right)^2-\left(m-3\right)\left(m+1\right)>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m\neq -1\\ 4m+4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq -1\\ m>-1\end{cases} \Leftrightarrow m>-1$$

Với $m>-1$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

Áp dụng định lí Viet, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1x_2=\dfrac{m-3}{m+1}\end{cases}$

Ta có: $\left(4x_1+1\right)\left(4x_2+1\right)=16x_1x_2+4\left(x_1+x_2\right)+1$

$$=16\frac{m-3}{m+1}+4.2+1=\frac{16\left(m-3\right)}{m+1}+9 \Rightarrow \frac{16\left(m-3\right)}{m+1}+9=18$$

$$\Leftrightarrow 16\left(m-3\right)=9\left(m+1\right) \Leftrightarrow 16m-48=9m+9 \Leftrightarrow 7m=56$$

$\Leftrightarrow m=8$ (thỏa mãn)

Vậy $m=8$ là giá trị cần tìm.

Bài 4 : Cho phương trình: $mx^2-\left(m-4\right)x+2m=0$

a. Giải phương trình khi $m=-2$

b. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn

$2\left(x_1^2+x_2^2\right)=5x_1x_2$

Lời giải:

$mx^2-\left(m-4\right)x+2m=0 \quad (1)$

a. Khi $m=-2$, phương trình (1) trở thành:

$-2x^2+6x-4=0 \Leftrightarrow 2m^2-6x+4=0$

Phương trình có $\Delta'=3^2-4.2=1$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{-3+\sqrt{1}}{-2}=1; x_2=\dfrac{-3-\sqrt{1}}{-2}=2$

Vậy khi $m=-2$, phương trình có nghiệm $x=1; x=2$

b. Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-4)^2 - 8m^2 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 8m + 16 - 8m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -7m^2 - 8m + 16 > 0 \end{cases}$$

Với điều kiện trên, ta có phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

Áp dụng định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{m-4}{m} \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$

Ta có $2\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 5x_1x_2 \Leftrightarrow 2\left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right) = 5x_1x_2$

$$\Leftrightarrow 2\left(x_1 + x_2\right)^2 = 9x_1x_2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{m-4}{m}\right)^2 = 9.2$$

$$\Leftrightarrow 2(m-4)^2 = 18m^2 \Leftrightarrow 2\left(m^2 - 8m \ + 16\right) = 18m^2$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 16m + 32 = 18m^2 \Leftrightarrow 16m^2 + 16m - 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m=1; m=2$ là các giá trị cần tìm.

Bài 5: Cho phương trình: $mx^2 - 6(m-1)\text{x} + 9(m-3) = 0 \ (1)$

a. Giải phương trình (1) với m = 2

b. Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$

Lời giải:

a. Với $m=3$, phương trình (1) trở thành:

$$3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Vậy $x=0; x=4$ là nghiệm của phương trình

b. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9(m-1)^2 - 9(m-3).m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9m^2 - 18m + 9 - 9m^2 + 27m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -1 \end{cases}$$

Với điều kiện trên, phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

Áp dụng định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{6(m-1)}{m} \\ x_1x_2 = \dfrac{9(m-3)}{m} \end{cases}$

Ta có $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$

$\Leftrightarrow \dfrac{6(m-1)}{m} = \dfrac{18(m-3)}{m} \Leftrightarrow 6m - 6 = 18m - 54 \Leftrightarrow 48 = 12m$

$\Leftrightarrow m = 4$ (thỏa mãn)

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Bài 6: Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0 \ (1)$

a. Giải phương trình (1) với $m = -5$

b. Chứng minh rằng phương trình (1) có 2 nghiệm $x_1; x_2$ phân biệt với mọi m

c.Tìm m để $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất với $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1).

Lời giải:

a. Với $m = -5$, phương trình (1) trở thành: $x^2 + 8x - 9 = 0$

Phương trình là phương trình bậc hai có: $\Delta' = 4^2 + 9 = 25 > 0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$x_1 = \dfrac{-4 + \sqrt{25}}{1} = 1 \qquad x_2 = \dfrac{-4 - \sqrt{25}}{1} = -9$

Vậy $x = 1; x = -9$ là nghiệm của phương trình .

b. Phương trình (1) là phương trình bậc hai có

$\Delta' = (m+1)^2 - (m-4) = m^2 + 2m + 1 - m + 4 = m^2 + m + 5$

$= \left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{19}{4} > 0$ với mọi m

$\Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

c. Áp dụng định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1x_2 = m - 4 \end{cases}$

Ta có: $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$

$= \sqrt{(2m+2)^2 - 4(m-4)} = \sqrt{4m^2 + 8m + 4 - 4m + 16}$

$= \sqrt{4m^2 + 4m + 20} = \sqrt{(2m+1)^2 + 19}$

Ta có: $(2m+1)^2 \geq 0$ với mọi m

$\Rightarrow (2m+1)^2 + 19 \geq 19$ với mọi m $\Rightarrow |x_1 - x_2| \geq \sqrt{19}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2m+1=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$

Vậy $m=-\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 7: Cho phương trình: $mx^2-(2m+1)x+(m+1)=0\ (1)$

a. Giải phương trình (1) với $m=-\dfrac{3}{5}$

b. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

c. Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm lớn hơn 2.

Lời giải:

a. Thay $m=-\dfrac{3}{5}$ vào phương trình ta có:

$$\frac{-3}{5}x^2+\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}=0 \Leftrightarrow -3x^2+x+2=0$$

Phương trình là phương trình bậc hai có $\Delta = 1^2 + 4.2.3 = 25$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{25}}{-3.2}=-\frac{4}{6}; \qquad x_2=\frac{-1-\sqrt{25}}{-2.3}=1$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_1=-\dfrac{2}{3}; x_2=1$

b. Phương trình (1) là phương trình bậc hai có

$\Delta=(2m+1)^2-4(m+1)m$

$=4m^2+4m+1-4m^2-4m=1>0$ với mọi m

$\Rightarrow$ phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

c. Phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

$$x_1=\frac{2m+1+\sqrt{1}}{2m}=\frac{m+1}{m} \qquad x_2=1$$

Phương trình có nghiệm lớn hơn 2.

$$\Leftrightarrow \frac{m+1}{m}>2 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{m}>2 \Leftrightarrow \frac{1}{m}>1 \Leftrightarrow 0<m<1$$

Vậy $0<m<1$ là các giá trị cần tìm.

Bài 8: Cho phương trình: $x^2-mx+m-1=0.$

a. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt sao cho

$$4x_1^2+4x_2^2-3x_1x_2=4$$

c. Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2\left(x_1x_2+1\right)}$$

Lời giải:

$x^2-mx+m-1=0\ \ (1)$

a. Phương trình (1) là phương trình bậc hai có:

$\Delta=m^2-4\left(m-1\right)=m^2-4m+4=\left(m-2\right)^2\geq 0$ với mọi m

$\Rightarrow$ phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0\Leftrightarrow \left(m-2\right)^2>0\Leftrightarrow m\neq 2$

Với $m\neq 2$, áp dụng định lí Viet, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1x_2=m-1\end{cases}$

Ta có: $4x_1^2+4x_2^2-3x_1x_2=4\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)-3x_1x_2$

$=4\left(x_1+x_2\right)^2-11x_1x_2=4m^2-11\left(m-1\right)=4m^2-11m+11$

$\Rightarrow 4m^2-11m+11=4\Leftrightarrow 4m^2-11m+7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{7}{4}\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy $m=1;m=\dfrac{7}{4}$ là giá trị cần tìm

c. $P=\dfrac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2\left(x_1x_2+1\right)}$

Ta có: $P=\dfrac{2x_1x_2+3}{\left(x_1+x_2\right)^2+2}$

Theo định lí Viet ta có:

$$P=\frac{2\left(m-1\right)+3}{m^2+2}=\frac{2m+1}{m^2+2}=\frac{m^2+2}{m^2+2}-\frac{m^2+2-\left(2m+1\right)}{m^2+2}$$
$$=1-\frac{\left(m-1\right)^2}{m^2+2}$$

Ta có: $m^2+2>0\Rightarrow \dfrac{\left(m-1\right)^2}{m^2+2}\geq 0\Rightarrow 1-\dfrac{\left(m-1\right)^2}{m^2+2}\leq 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m-1=0\Leftrightarrow m=1$

Vậy GTLN của P là 1 tại $m=1$

Bài 9: Cho phương trình: $x^2+2\left(m-1\right)x-\left(2m-5\right)=0\ \ (1)$

a. Giải phương trình khi m = 2

b. Tìm giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và biểu thức $A = 12 - 10x_1x_2 - \left(x_1^2 + x_2^2\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

a. Khi m = 2, phương trình (1) trở thành:

$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Vậy khi $m = 2;\ x = -1$ là nghiệm của phương trình.

b. Phương trình (1) là phương trình bậc hai có

$\Delta' = \left(m-1\right)^2 - \left(2m-5\right) = m^2 - 2m + 1 - 2m + 5$

$= m^2 - 4m + 6 = \left(m-2\right)^2 + 2 > 0$ với mọi m

$\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m

Áp dụng định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2\left(m-1\right) \\ x_1x_2 = -2m + 5 \end{cases}$

Ta có:

$A = 12 - 10x_1x_2 - \left(x_1^2 + x_2^2\right) = 12 - 10x_1x_2 - \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right)$

$= 12 - 10\left(-2m+5\right) - \left(4\left(m-1\right)^2 - 2\left(-2m+5\right)\right)$

$= 12 + 20m - 50 - \left(4\left(m^2 - 2m + 1\right) + 4m - 10\right)$

$= 20m - 38 - \left(4m^2 - 8m + 4 + 4m - 10\right)$

$= 20m - 38 - \left(4m^2 - 4m - 6\right) = -4m^2 + 24m - 32$

$= -\left(4m^2 - 24m + 36\right) + 4 = -\left(2m-6\right)^2 + 4$

Ta có $-\left(2m-6\right)^2 \le 0 \Rightarrow -\left(2m-6\right)^2 + 4 \le 4$

Dấu "=” xảy ra $\Leftrightarrow 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 4 khi m = 3

Bài 10: Cho phương trình bậc hai: $2x^2 + \left(2m-1\right)x + m - 1 = 0$

a. Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có nghiệm với mọi m.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm đó.

c. Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 < 1$

d. Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$, hãy lập một hệ thức giữa x_1 *và* x_2 không có m

Lời giải:

$2x^2+(2m-1)x+m-1=0 \quad (1)$

a. Phương trình (1) là phương trình bậc hai, có

$\Delta=b^2-4ac=(2m-1)^2-4(m-1).\,2=4m^2-4m+1-8m+8$

$=4m^2-12m+9=(2m-3)^2\geq 0$ với mọi m

$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm với mọi m.

b. Phương trình (1) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow (2m-3)^2=0 \Leftrightarrow 2m-3=0 \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$

Vậy $m=\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm

c. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2 \Leftrightarrow m\neq\frac{3}{2}$

Ta có: $x_2=\frac{-(2m-1)+\sqrt{(2m-3)^2}}{4};x_1=\frac{-(2m-1)-\sqrt{(2m-3)^2}}{4}$

Nhận thấy $x_2>x_1 \Rightarrow -1<x_1<x_2<1$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{(-2m+1-|2m-3|)}{4}>-1 \ (2)\\ \frac{(-2m+1+|2m-3|)}{4}<1 \ \ (3)\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}-2m-|2m-3|>-5\\ -2m+|2m-3|<3\end{cases} \quad (1)$$

* $2m-3\geq 0 \Leftrightarrow m\geq\frac{3}{2}$

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases}-2m-(2m-3)>-5\\ -2m+2m-3<3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4m+3>-5\\ -3<3\end{cases} \Leftrightarrow -4m>-8 \Leftrightarrow m<2$$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow \frac{3}{2}<m<2$

$2m-3<0 \Leftrightarrow m<\frac{3}{2}$

* $$(1)\Leftrightarrow \begin{cases}-2m+2m-3>-5\\ -2m+3-2m<3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3>-5\\ -4m<0\end{cases} \Leftrightarrow -m>0$$

Kết hợp với điều kiện, ta có $0<m<\frac{3}{2}$

Vậy $0<m<2, m\neq\frac{3}{2}$ là các giá trị cần tìm.

d. Áp dụng định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m-1}{2} \\ x_1x_2 = \dfrac{m-1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = \dfrac{2m-1}{2} - \dfrac{2(m-1)}{2} = \dfrac{2m-1-2m+2}{2} = \dfrac{1}{2}$

Vậy hệ thức không phụ thuộc vào m là $x_1 + x_2 - 2x_1x_2$

Bài 11: Cho phương trình: $x^2 - (m-1)x - m^2 + m - 2 = 0 \ (1)$ (m là tham số)

a. Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b. Tìm những giá trị của m để (1) có 2 nghiệm phân biệt trái dấu.

c. Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (1). Tìm m để $x_1^3 + x_2^3 > 0$

Lời giải:

$x^2 - (m-1)x - m^2 + m - 2 = 0 \ (1)$

a. Phương trình (1) là phương trình bậc hai có

$\Delta = b^2 - 4ac = (m-1)^2 + 4m^2 - 4m + 8$

$= 5m^2 - 6m + 9 = (m-3)^2 + 4m^2 > 0$ với mọi m

$\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

b. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m

Áp dụng định lí Vi-ét, ta có: $x_1x_2 = c/a = -m^2 + m - 2$.

Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow x_1x_2 < 0 \Leftrightarrow -m^2 + m - 2 < 0$

$\Leftrightarrow -\left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{7}{4} < 0$ luôn đúng với mọi m.

Vậy với mọi m, phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu

c. Áp dụng định lí Viet, ta có:

$x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = m - 1$ $\qquad$ $x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = -m^2 + m - 2$

Ta có: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$

$= (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) = (m-1)^3 - 3(m-1)(-m^2 + m - 2)$

$= m^3 - 3m^2 + 3m - 1 - 3\left(-m^3 + m^2 - 2m + m^2 - m + 2\right)$

$= m^3 - 3m^2 + 3m - 1 + 3m^3 - 6m^2 + 9m - 6$

$= 4m^3 - 9m^2 + 12m - 7 = 4m^3 - 4m^2 - 5m^2 + 5m + 7m - 7$

$= 4m^2\left(m-1\right) - 5m\left(m-1\right) + 7\left(m-1\right)$

$= \left(m-1\right)\left(4m^2 - 5m + 7\right) = \left(m-1\right)\left(\left(2m - \dfrac{5}{4}\right)^2 + \dfrac{87}{16}\right)$

Ta có: $x_1^3 + x_2^3 > 0 \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

Vậy $m > 1$ là các giá trị cần tìm.

Bài 12: Cho phương trình:

$\left(m+2\right)x^2 + \left(1-2m\right)x + m - 3 = 0$ (m là tham số)

a. Giải phương trình khi $m = -\dfrac{9}{2}$

b. Chứng minh rằng phương trình đã cho có nghiệm với mọi m.

c. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình có 2 nghiệm phân biệt và nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia.

Lời giải:

$\left(m+2\right)x^2 + \left(1-2m\right)x + m - 3 = 0 \quad (1)$

a. Khi $m = -\dfrac{9}{2}$, phương trình (1) trở thành: $-\dfrac{5}{2}x^2 + 10x - \dfrac{15}{2} = 0$

Phương trình là phương trình bậc hai có:

$\Delta' = 5^2 - \dfrac{5}{2}.\dfrac{15}{2} = 25 - \dfrac{75}{4} = \dfrac{25}{4}$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-5 + \sqrt{\dfrac{25}{4}}}{-\dfrac{5}{2}} = 1;\ x_2 = \left(\dfrac{-5 - \sqrt{\dfrac{25}{4}}}{-\dfrac{5}{2}}\right) = 3$

Vậy $x = 1;\ x = 3$ là nghiệm của phương trình.

b. Phương trình (1) là phương trình bậc hai có :

$\Delta = \left(1-2m\right)^2 - 4\left(m-3\right)\left(m+2\right) = 4m^2 - 4m + 1 - 4\left(m^2 - m - 6\right)$

$= 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 4m + 24 = 25 > 0$

$\Rightarrow$ phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

c. Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (1)

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{2m - 1 + 5}{2\left(m+2\right)} = \dfrac{2m+4}{2m+4} = 1 \qquad x_2 = \dfrac{2m - 1 - 5}{2\left(m+2\right)} = \dfrac{2m-6}{2m+4}$

TH1: $x_1 = 3x_2 \Rightarrow 6m - 18 = 2m + 4 \Leftrightarrow 4m = 22 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{2}$

TH2: $x_2 = 3x_1 \Rightarrow \dfrac{2m-6}{2m+4} = 3 \Rightarrow 2m - 6 = 6m + 12 \Leftrightarrow 4m = -18 \Leftrightarrow m = -\dfrac{9}{2}$

Vậy $m = \dfrac{11}{2};\ m = -\dfrac{9}{2}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 13: Cho phương trình: $(m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0\ \ (1)$

a. Giải phương trình khi $m = 4$

b. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn

$x_1 < 0 < x_2\ \ và\ \ |x_1| > x_2$

Lời giải:

a. Khi $m = 4$ phương trình (1) trở thành:

$0x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$

Vậy với $m = 4$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{3}{4}$

b. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ (m-2)^2 - (m-1)(m-4) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m^2 - 4m + 4 - (m^2 - 5m + 4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m > 0 \end{cases}$$

Với điều kiện trên, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

Áp dụng định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-2)}{m-4} \\ x_1x_2 = \dfrac{m-1}{m-4} \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ |x_1| > x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ -x_1 > x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 < 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m-1}{m-4} < 0 \\ \dfrac{2(m-2)}{m-4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m - 4 < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 4 \\ m - 2 > 0 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $2 < m < 4$

Vậy $2 < m < 4$ là các giá trị cần tìm.

Bài 14: Cho phương trình: $(3m-2)x^2 - 2(5m-2)x + 3(2m+1) = 0\ \ (1)$

a. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình .

b. Xác định giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn hệ thức $2\left(x_1+x_2\right)-3x_1x_2=1$

Lời giải:

a.

+ $3m-2=0 \Leftrightarrow m=\frac{2}{3}$

Phương trình (1) trở thành: $-\frac{8}{3}x+7=0 \Leftrightarrow x=\frac{21}{8}$

+ $3m-2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \frac{2}{3}$

Phương trình (1) là phương trình bậc hai có

$$\begin{aligned}\Delta' &= (5m-2)^2-3\left(2m+1\right)\left(3m-2\right)\\ &=25m^2-20m+4-3\left(6m^2-m-2\right)\\ &=25m^2-20m+4-18m^2+3\,m+6\\ &=7m^2-17m+10=\left(m-1\right)\left(7m-10\right)\end{aligned}$$

TH1: $\Delta'=0 \Leftrightarrow \left(m-1\right)\left(7m-10\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{10}{7}\end{array}\right.$

Phương trình có nghiệm kép: $x=\frac{5m-2}{3m-2}$

$m=1 \Rightarrow x=3$ $\qquad$ $m=\frac{10}{7} \Rightarrow x=\frac{9}{4}$

TH2: $\Delta'<0 \Leftrightarrow \left(m-1\right)\left(7m-10\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1>0 \\ 7m-10<0 \end{cases} \\ \begin{cases} m-1<0 \\ 7m-10>0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>1 \\ m<\frac{10}{7} \end{cases} \\ \begin{cases} m<1 \\ m>\frac{10}{7}\left(vo\ ly\right) \end{cases}\end{array}\right.$

Phương trình vô nghiệm.

TH3: $\Delta'>0 \Leftrightarrow \left(m-1\right)\left(7m-10\right)>0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1>0 \\ 7m-10>0 \end{cases} \\ \begin{cases} m-1<0 \\ 7m-10<0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>1 \\ m>\frac{10}{7} \end{cases} \\ \begin{cases} m<1 \\ m<\frac{10}{7} \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\frac{10}{7} \\ m<1 \end{array}\right.$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

Vậy với $m=\frac{3}{2},$ phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{21}{8}$

Với $\left[\begin{array}{l} m=\frac{10}{7} \\ m=1 \end{array}\right.$, phương trình có nghiệm kép

Với $\begin{cases} 1<m<\frac{10}{7} \\ m\neq\frac{3}{2} \end{cases}$, phương trình vô nghiệm

Với $\left[\begin{array}{l} m>\frac{10}{7} \\ m<1 \end{array}\right.$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt

b. Với $\left[\begin{array}{l} m>\frac{10}{7} \\ m<1 \end{array}\right.$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2(5m-2)}{3m-2} \\ x_1x_2=\dfrac{3(2m+1)}{3m-2} \end{cases}$

Ta có: $2(x_1+x_2)-3x_1x_2=\frac{20m-8}{3m-2}-\frac{18m+9}{3m-2}=\frac{2m-17}{3m-2}$

$\Rightarrow \frac{2m-17}{3m-2}=1 \Leftrightarrow 2m-17=3m-2 \Rightarrow m=-15$ (thỏa mãn)

Vậy $m=-15$ là giá trị cần tìm.

Bài 15: Giả sử $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+ax+2=0;$ $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2+bx+2=0.$ Tính giá trị của biểu thức: $A=(x_1+x_3)(x_2+x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_4)$

Lời giải:

Áp dụng định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-a \\ x_1x_2=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3+x_4=-b \\ x_3x_4=2 \end{cases}$

Ta có $A=(x_1+x_3)(x_2+x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_4)$

$=(x_1x_2-x_1x_4+x_2x_3-x_3x_4)(x_1x_2-x_2x_4+x_1x_3-x_3x_4)$

$=(2-x_1x_4+x_2x_3-2)(2-x_2x_4+x_1x_3-2)$

$=(x_2x_3-x_1x_4)(x_1x_3-x_2x_4)=x_1x_2x_3^2-x_2^2x_3x_4-x_1^2x_3x_4+x_1x_2x_4^2$

$=x_1x_2\left(x_3^2+x_4^2\right)-x_3x_4\left(x_1^2+x_2^2\right)$

$=x_1x_2\left((x_3+x_4)^2-2x_3x_4\right)-x_3x_4\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)$

$=2\left(b^2-4\right)-2\left(a^2-4\right)=2b^2-8-2a^2+8=2b^2-2a^2$

Bài 16: (Thái Bình - 2010): Cho phương trình bậc hai: $x^2-2mx+m-7=0\ (1)$ (với m là tham số).

1. Giải phương trình (1) với $m=-1$.

2. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

3. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1;x_2$ thoả mãn hệ thức: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=16$.

Lời giải:

1. Với $m=-1$ thì phương trình (1) trở thành: $\begin{array}{l} x^2+2x-8=0 \\ \Delta'=1+8=9\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=3 \end{array}$

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt là: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1-3}{1}=-4 \\ x=\dfrac{-1+3}{1}=2 \end{array}\right.$

Vậy với $m=-1$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là $x=-4,\ x=2$

2. Phương trình (1) có $\Delta'=m^2-(m-7)=\ m^2-m+7$

$=\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}>0$ với mọi m.

Vậy với mọi giá trị của m thì (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

3. Theo câu 2, ta có (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ với mọi giá trị của m.

Theo định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=m-7 \end{cases}$

Theo giả thiết ta có: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=16\Leftrightarrow\begin{cases} x_1x_2\neq 0 \\ x_1+x_2=16x_1x_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} m-7\neq 0 \\ 2m=16(m-7) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 7 \\ m=8 \end{cases}\Leftrightarrow m=8$

Vậy $m=8$ là giá trị cần tìm.

Bài 17 (Kiên Giang chuyên 2010): Cho phương trình

$x^2-(2m+1)x+m^2+m-6=0\ (1)$

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm âm.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn hệ thức: $\left|x_1^3 - x_2^3\right| = 50$

Lời giải:

Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (1)

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm âm.

$\Delta = (2m+1)^2 - 4\left(m^2 + m - 6\right) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m + 24 = 25 > 0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$x_1 = \dfrac{2m+1+5}{2} = m+3;\quad x_2 = \dfrac{2m+1-5}{2} = m-2$

Để hai nghiệm đều âm thì $\begin{cases} m+3<0 \\ m-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-3 \\ m<2 \end{cases} \Leftrightarrow m<-3$

(Có thể tính $S = x_1 + x_2$; $P = x_1.x_2$. Điều kiện để pt có 2 nghiệm đều âm thì

$\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ S < 0 \ \text{(Giải các bất phương trình tìm m)} \\ P > 0 \end{cases}$

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn hệ thức:

$\left|x_1^3 - x_2^3\right| = 50 \Leftrightarrow \left|(m+3)^3 - (m-2)^3\right| = 0$

$\Leftrightarrow \left|m^3 + 9m^2 + 27m + 27 - m^3 + 6m^2 - 12m + 8\right| = 50$

$\Leftrightarrow \left|15m^2 + 15m + 35\right| = 50 \Leftrightarrow \left|3m^2 + 3m + 7\right| = 10$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3m^2 + 3m + 7 = 10 \\ 3m^2 + 3m + 7 = -10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3m^2 + 3m - 3 = 0 & (1) \\ 3m^2 + 3m + 17 = 0 & (2) \end{array}\right.$

Giải từng bước 2 phương trình trên: $(1) \Leftrightarrow m_{1;2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2};\quad (2) \Leftrightarrow m \in \varnothing$

Vậy $m_{1;2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(Có thể từ $\left|3m^2 + 3m + 7\right| = 10 \Leftrightarrow 3\left|m^2 + m + \dfrac{7}{3}\right| = 10.$

Nhận xét $m^2 + m + \dfrac{7}{3} > 0, \forall m \in R$ nên: $3m^2 + 3m + 7 = 10$ rồi giải phương trình này).

Bài 18 (Cần Thơ - 2012): Cho phương trình (ẩn số x): $x^2 - 4x - m^2 + 3 = 0$ $(*)$.

1. Chứng minh phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

2. Tìm giá trị của m để phương trình (*) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa $x_2 = -5x_1$

Lời giải:

1. $x^2 - 4x - m^2 + 3 = 0\ (*)$.

$\Delta = 16 + 4m^2 - 12 = 4m^2 + 4 \geq 4 > 0;\ \forall\, \mathrm{m}$

Vậy (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

2. Tìm giá trị của m để phương trình (*) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa $x_2 = -5x_1$

Theo hệ thức Viet có: $x_1.x_2 = -m^2 + 3;\ x_1 + x_2 = 4;\ m\grave{a}\ x_2 = -5x_1 \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 5$

Thay $x_1 = -1;\ x_2 = 5$ vào $x_1.x_2 = -m^2 + 3 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$

BÀI 2: Phương trình bậc ba, bậc bốn và đa thức:

I- Nghiệm của đa thức:

1. Số c là nghiệm bội lẻ của một đa thức $P_n\left(x\right)$ nếu $P_n\left(x\right)$chia hết cho $\left(x-c\right)^k$ với k lẻ. Nếu k = 1 thì c gọi là nghiệm đơn.

2. Số c là nghiệm bội chẵn của đa thức $P_n\left(x\right)$nếu $P_n\left(x\right)$ chia hết cho $\left(x-c\right)^k$ và k là số chẵn. Nếu k = 2 thì c là nghiệm kép.

3. Một đa thức bậc n chỉ có thể có tối đa n nghiệm.

4. Một đa thức bậc lẻ luôn có ít nhất một nghiệm.

5. Một đa thức bậc n, mà có (n+1) nghiệm thì đa thức đó đồng nhất không?

II- Định lí Viet áp dụng cho phương trình bậc ba

Cho phương trình bậc ba: $ax^3+bx^2+cx+d=0\ \left(a\neq 0\right)$. Giả sử phương trình này có 3 nghiệm $x_1;x_2;x_3$. Khi đó ta có hệ thức:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2+x_2.x_3+x_3.x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1.x_2.x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

III- Cách nhẩm nghiệm nguyên hoặc nghiệm hữu tỉ của phương trình bậc ba

- Nếu phương trình bậc ba có thể có nghiệm hữu tỉ hoặc nghiệm nguyên, để tìm nghiệm này ta làm như sau:

\+ Tìm tập hợp các ước số của a gọi là p.

\+ Tìm tập hợp các ước số của d gọi là q.

\+ Tìm các phân số $\dfrac{q}{p}$ rồi thế từng phân số vào phương trình, phân số nào thỏa mãn thì đó là nghiệm của phương trình.

<u>Vấn đề 1: Nhẩm một nghiệm - đưa về phương trình tích.</u>

<u>Vấn đề 2: Nghiệm của phương trình bậc ba thỏa mãn một điều kiện cho trước:</u>

Phương pháp giải:

Bước 1: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có 3 nghiệm phân biệt

Bước 2: Dùng định lí Viet $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2+x_2.x_3+x_3.x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1.x_2.x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$

<u>Vấn đề 3: Các dạng phương trình bậc bốn chuẩn:</u>

Dạng 1: Phương trình trùng phương:

- Có dạng: $ax^4+bx^2+c=0\ (a\neq 0)$

- Cách giải:

  + Đặt $t=x^2>0$

  + Đưa về phương trình bậc hai.

Dạng 2: Phương trình bậc bốn có dạng:

$(\alpha x+a)^4+(\alpha x+b)^4=c$

- Cách giải

  + Đặt $t=\alpha x+\frac{1}{2}(a+b)$

  + Đưa về phương trình trùng phương.

- Chú ý:

  + Nếu bài toán có tham số m thì ta có hai cách giải.

  Cách 2: Đặt ẩn phụ rồi dùng công thức so sánh nghiệm.

  + Nếu bài toán không có tham số thì ta đặt $t=ax+\frac{1}{2}(a+b)$

  + Nếu đặt $t=ax+\frac{1}{2}(a+b)$ thì ta dùng 2 cách đẳng thức

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$

Dạng 3: Phương trình bậc bốn có dạng:

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=k$ với $a+b=c+d$

- Cách giải:

  + Bước 1: Nhân từng cặp $(x+a)(x+b);(x+c)(x+d)$

  + Bước 2: Đặt ẩn phụ $t=x^2+(a+b)x+D$

  Đưa về phương trình bậc 2

- Dạng mở rộng: $(A_1x^2+B_1x+C_1)(A_2x^2+B_2x+C_2)=k$

  Cách giải: Tìm các nghiệm của $A_1x^2+B_1x+C_1;A_2x^2+B_2x+C_2$

  Sau đó đưa về tích

Dạng 4: Phương trình bậc bốn có dạng:

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=kx^2$ với $ab=cd$

Cách giải:

- Nhân từng cặp $(x+a)(x+b);(x+c)(x+d)$

- Chia hai vế cho x^2 đặt $t=x+\frac{ab}{x}$.

- Đưa về phương trình bậc hai

<u>Chú ý:</u> Dạng đặt biệt của phương trình trên là:

a. $\left(A_1x^2+B_1x+C_1\right)\left(A_2x^2+B_2x+C_2\right)=kx^2$

b. $\frac{Ax^2+C}{Ax^2+B_1x+C}+\frac{A_1x^2+C_1}{A_2x^2+B_2x+C_2}=k$

Dạng 5: Phương trình bậc bốn có dạng:

$ax^4+bx^3+cx^2+kbx+k^2a=0$

$ax^4\pm bx^3+cx^2\mp kbx+k^2a=0$

Cách giải:

- Chia hai vế của phương trình cho $x^2\left(x\neq 0\right)$

- Đặt $t=x\pm\frac{k}{x}$

Dạng 6: Phương trình bậc bốn chứa một biểu thức giống nhau:

Cách giải:

- Biến đổi để phương trình chứa một biểu thức giống nhau.

- Đặt t bằng biểu thức đó.

- Tìm miền giá trị của t.

- Đưa về phương trình bậc hai theo t.

- Giải phương trình với biến t rồi đối chiếu tìm ra x.

Một số bài toán áp dụng:

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $x^3-x^2+x-1=0$ b) $x^3-x^2+2x-8=0$

Lời giải:

a) Rõ ràng, ta thấy $a+b+c+d=1-1+1-1=0$ nên phương trình có một nghiệm bằng 1. Khi đó ta có phân tích:

$$x^3-x^2+x-1=0\Leftrightarrow\left(x^3-x^2\right)+(x-1)=0\Leftrightarrow x^2.(x-1)+(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=1\quad\left(do\quad x^2+1>0\right)$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1$.

b) Bằng phương pháp nhẩm nghiệm ta thấy: $x=2$ là một nghiệm của phương trình nên ta có phân tích:

$$x^3-x^2-6x+8=0\Leftrightarrow\left(x^3-2.x^2\right)+\left(x^2-2.x\right)-(4.x-8)=0$$

$\Leftrightarrow x^2.(x-2)+x(x-2)-4(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+x-4)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2+x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt:

$x_1=2;\ x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

Bài 2 (Hồ Chí Minh - 2012): Giải các phương trình sau:

a) $2x^2-x-3=0$ b) $x^4+x^2-12=0$ c) $x^2-2\sqrt{2}x-7=0$

Lời giải:

Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $2x^2-x-3=0\ (a)$

Vì phương trình (a) có $a-b+c=0$ nên $(a)\Leftrightarrow x=-1, x=\dfrac{3}{2}$

b) $x^4+x^2-12=0$ (b)

Đặt $u=x^2\geq 0,$ phương trình thành: $u^2+u-12=0\ (*)$

(*) có $\Delta=49$ nên $(*)\Leftrightarrow u=\dfrac{-1+7}{2}=3$ hay $u=\dfrac{-1-7}{2}=-4$ (loại)

Do đó, $(b)\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Cách khác: $(b)\Leftrightarrow (x^2-3)\ (x^2+4)=0\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Nhận xét: Nếu có thể nhẩm được một bộ nghiệm $(a;-a)$ của phương trình thì chúng ta nên đưa phương trình về dạng $(x^2-a^2)(x^2-b)=0$ để giải một cách nhanh gọn.

c) $x^2-2\sqrt{2x}-7=0\ \ (c)$

$\Delta'=2+7=9$ do đó $(c)\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\pm 3$

Bài 3 (Đắk lắk - 2012): Giải các phương trình:

a) $2x^2-7x+3=0.$ b) $9x^4+5x^2-4=0.$

Lời giải:

a) $2x^2-7x+3=0.$

$\Delta=(-7)^2-4.2.3=25>0\Leftrightarrow\sqrt{\Delta}=5.$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1=\dfrac{7+5}{4}=3$ $x_2=\dfrac{7-5}{4}=\dfrac{1}{2}$

b) $9x^4+5x^2-4=0.$ Đặt $x^2=t,$ Điều kiện: $t\geq 0.$

Ta có phương trình: $9t^2+5t-4=0.$

$a-b+c=0 \Leftrightarrow t_1=-1$ (không thỏa mãn, loại)

$t_2=\frac{4}{9}$ (thỏa mãn)

Với $t_2=\frac{4}{9} \Leftrightarrow x^2=\frac{4}{9} \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3}.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x_{1,2}=\pm\frac{2}{3}$

Bài 4 (Đà Nẵng - 2010) Giải phương trình $x^4-13x^2-30=0$

Lời giải:

Đặt $u=x^2\geq 0,$ pt (1) thành: $u^2-13u-30=0 \quad (2)$

(2) có $\Delta=169+120=289=17^2$

Do đó $(2)\Leftrightarrow u=\frac{13-17}{2}=-2$ (loại) hay $u=\frac{13+17}{2}=15$

Do đó $(1)\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{15}$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a) $(x+1)^4+(x+2)^4=17$ b) $(x-1)^4+(x+3)^4=132$

Lời giải:

a) Rõ ràng ta thấy $1^4+2^4=1+16=17$ nên ta có thể không làm theo chính tắc mà ta chỉ cần khai triển như bình thường:

$(x+1)^4+(x+2)^4=17 \Leftrightarrow (x^2+2x+1)^2+(x^2+4x+4)^2=17$

$\Leftrightarrow x^4+4x^3+6x^2+4x+1+x^4+8x^3+24x^2+32x+16=17$

$\Leftrightarrow 2x^4+12x^3+30x^2+36x=0 \Leftrightarrow x(x^3+6x^2+15x+18)=0$

$\Leftrightarrow x(x+3)(x^2+3x+6)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \end{array}\right. \left(do\ x^2+3x+6=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{135}{4}>0\right)$

Vậy phương trình có nghiệm $x=0;\ x=-3.$

b) Dễ thấy ngay việc nhẩm nghiệm là không được. Do đó, ta phải giải theo phương pháp làm:

Đặt: $t=x+\frac{a+b}{2}=x+\frac{-1+3}{2}=x+1$

Khi đó, phương trình trở thành:

$(t-2)^4+(t+2)^4=132 \Leftrightarrow (t^2-4t+4)^2+(t^2+4t+4)^2=132$

$\Leftrightarrow t^4+48t^2+32=132 \Leftrightarrow t^4+48.t^2-100=0$

$\Leftrightarrow (t^2-2)(t^2+50)=0 \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}\ \ (do\ t^2+50>0)$

Do đó, ta có: $x=t-1=\pm\sqrt{2}-1$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-1-\sqrt{2};\ x=-1+\sqrt{2}.$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

a) $(x^2+3x+1)(x^2+5x+1)=10x^2$

b) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)=100x^2$

Lời giải:

a) Với $x=0$ không là nghiệm của phương trình. Do đó, $x\neq 0$. Khi đó, phương trình tương đương:

$$\left(x+3+\frac{1}{x}\right)\left(x+5+\frac{1}{x}\right)=10 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)=10$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t\ \left(|t|\geq 2\right)$ ta có:

$(t+3)(t+5)=10 \Leftrightarrow t^2+8t+5=0 \Leftrightarrow t=-4\pm\sqrt{11}$

Do $|t|\geq 2$ nên ta loại nghiệm $t=-4+\sqrt{11}$. Với $t=-4-\sqrt{11}$ ta có:

$$x+\frac{1}{x}=-4-\sqrt{11} \Leftrightarrow x^2+\left(4+\sqrt{11}\right)x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-\left(4+\sqrt{11}\right)\pm\sqrt{23+8\sqrt{11}}}{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm:

$$x=\frac{-\left(4+\sqrt{11}\right)+\sqrt{23+8\sqrt{11}}}{2};\ x=\frac{-\left(4+\sqrt{11}\right)-\sqrt{23+8\sqrt{11}}}{2}$$

Nhận xét: Với phần a, vì ta muốn chia vế bên trái cho x^2 nên cần xét đến nghiệm $x = 0$. Sau đó chia vế trái cho x^2 là ta được dạng phương trình bậc bốn đã học.

Bài 7: Giải các phương trình sau:

a) $x^4-2x^3-3x^2+4x+4=0$

b) $x^5+3x^4-x^3+x^2-3x-1=0$

Lời giải:

a) Đây là phương trình có thể chia cho x^2 để đặt ẩn phụ quen thuộc:

+ Ta có $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

+ Với $x\neq 0$ ta chia cả hai vế cho x^2 được:

$$x^2-2x-3+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{2}{x}\right)-3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{2}{x}\right)+1=0$$

Đặt $x-\frac{2}{x}=t$ ta có:

$$t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x-\frac{2}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-1; x=2$.

b) Dễ dàng nhẩm được nghiệm x = 1 nên ta chỉ cần chú ý:

$$x^5+3x^4-x^3+x^2-3x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^5-x^4\right)+\left(4x^4-4x^3\right)+\left(3x^3-3x^2\right)+\left(4x^2-4x\right)+\left(x-1\right)=0$$

$$\left(x-1\right).\left(x^4+4x^3-3x^2+4x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^4+4x^3-3x^2+4x+1=0\left(*\right) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) rõ ràng là đối xứng với bậc bốn (có cách giải giống câu (a)). Dễ thấy x = 0 không là nghiệm của (*) nên ta có:

$$\left(*\right) \Leftrightarrow x^2+4x-3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}-1\right).\left(x+\frac{1}{x}-5\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=5 \quad \left(do \quad \left|x+\frac{1}{x}\right| \geq 2\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm 2\sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình có đúng ba nghiệm: $x=1;\ x=\frac{5+2\sqrt{5}}{2};\ x=\frac{5-2\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét: Với phương trình a, nhìn vào khá dễ để nhận ra chia cả 2 vế phương trình cho x^2 để đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai quen thuộc. Phương trình b, trước tiên phải nhẩm nghiệm để tách thành tích của một bậc nhất và một bậc bốn. Phần còn lại các em thấy rằng tương tự như với phần a, rồi.

BÀI 3: Phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối,

phương trình dạng phân thức, phương trình vô tỉ.

I. Kiến thức cần nhớ:

1. Đối với phương trình vô tỉ ta cần nhớ:

$|A| = \begin{cases} A;\ neu\ \ A \geq 0 \\ -A;\ neu\ \ A < 0 \end{cases}$ $\qquad$ $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$

2. Đối với phương trình phân thức ta cần nhớ:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Lưu ý: Điều kiện để tồn tại phân thức là mẫu số phải khác 0.

3. Đối với phương trình căn thức ta cần nhớ: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x)^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Lưu ý: Điều kiện tồn tại căn bậc hai của một số là số đó phải không âm (lớn hơn hoặc bằng 0).

II. Một số phương trình căn bản:

Bài 1: Giải các phương trình

a) $|x+2| = 3;$ $\qquad$ b) $|2x-3| = 3-x;$

c) $|x + |2x+1|| = 5;$ $\qquad$ d) $|x| + |x+2| = 3;$

e) $2|x| + |x+1| + |x+2| = 3$

Lời giải:

a) Dễ dàng nhận thấy đây là một phương trình cơ bản nhất trong phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Ta có: $|x+2| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 = 3 \\ x+2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -5 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $x = 1;\ x = -5.$

b) Phương trình này cũng là một phương trình cơ bản và có hai hướng tiếp cận như sau:

+ Cách 1:

$$|2x-3| = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ (2x-3)^2 = (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 4x^2 - 12x + 9 = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 3x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0; x = 2.$

+ Cách 2: $|2x-3| = 3-x.$

Nếu $2x-3\ge 0\Leftrightarrow x\ge \frac{3}{2}$ phương trình trở thành:

$2x-3=3-x\Leftrightarrow 3x=6\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn điều kiện $x\ge \frac{3}{2}$)

Nếu $2x-3<0\Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$ phương trình trở thành:

$3-2x=3-x\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn điều kiện $x<\frac{3}{2}$)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0;x=2$.

Nhận xét: Ta hoàn toàn có thể tổng quát hóa bài toán! Hãy tổng quát hóa bài toán và giải phương trình sau:

$\left|x^2-2x-3\right|=x^2-4x+5$

Và ta nhận thấy cách giải 1 có phần làm gọn bài toán:

$$\left|f\left(x\right)\right|=g\left(x\right)\Leftrightarrow\begin{cases}g\left(x\right)\ge 0\\ f\left(x\right)^2=g\left(x\right)^2\end{cases}$$

c) Giải theo cách đơn thuần ta có:

$$\left|x+\left|2x+1\right|\right|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\left|2x+1\right|=5\\ x+\left|2x+1\right|=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|2x+1\right|=5-x\\ \left|2x+1\right|=-5-x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5-x\ge 0\\ \left(2x+1\right)^2=\left(5-x\right)^2\end{cases}\\ \begin{cases}-5-x\ge 0\\ \left(2x+1\right)^2=\left(-5-x\right)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 5\\ \left(3x-4\right)\left(x+6\right)=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\le -5\\ \left(x-4\right)\left(3x+6\right)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\frac{4}{3}\\ x=-6\end{array}\right.\\ x\in\varnothing\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{4}{3};x=-6$

d)

\+ Cách 1: Ta có:

$$\left|x\right|+\left|x+2\right|=3\Leftrightarrow\left(\left|x\right|+\left|x+2\right|\right)^2=9\Leftrightarrow 2\left|x\left(x+2\right)\right|=9-x^2-\left(x+2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left|x^2+2x\right|=-2x^2-4x+5\Leftrightarrow\begin{cases}-2x^2-4x+5\ge 0\\ \left(2x^2+4x\right)^2=\left(-2x^2-4x+5\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x-\frac{5}{2}\le 0\\ \left(x^2+2x\right)^2=\left(x^2+2x-\frac{5}{2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x\le\frac{5}{2}\\ 5.\left(x^2+2x\right)=\frac{25}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x=\frac{5}{4}\Leftrightarrow (x+1)^2=\frac{9}{4}\Leftrightarrow |x+1|=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=\frac{3}{2} \\ x+1=-\frac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{5}{2}\end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{1}{2};\ x=\frac{-5}{2}$

+ Cách 2: Ta xét các trường hợp sau:

Nếu $x<-2$ thì phương trình trở thành:

$-x-(x+2)=3\Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$ (thỏa mãn $x<-2$)

Nếu $-2\le x<0$ thì phương trình trở thành:

$-x+(x+2)=3\Leftrightarrow 2=3$ (vô lí)

Nếu $x\ge 0$ thì phương trình trở thành:

$x+(x+2)=3\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn $x\ge 0$)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{1}{2};\ x=\frac{-5}{2}$

e) Phương trình $2|x|+|x+1|+|x+2|=3$ có thể có một cách giải là xét trên từng khoảng giá trị để phá dấu giá trị tuyệt đối, tuy nhiên ta có thể giải bằng phương pháp đánh giá.

$|x+1|+|x+2|\ge (x+1)+(x+2)=3+2x$

$\Leftrightarrow 2|x|+|x+1|+|x+2|\ge 3+2x+2|x|=3+2(x+|x|)\ge 3$

Dấu bằng xảy ra khi x = 0.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x = 0.

Nhận xét: Qua bài toán này ta cần lưu ý tới hai bất đẳng thức hiển nhiên: $|x|\ge x;\ |x|\ge -x$

Bài 2: Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m:

a) $|x+m|=m^2-x;$

b) $x^2+2x+m|x+1|=4;$

c) $|x|+|x+1|+|x+2|+|x+3|=4-m^2;$

Lời giải:

a) Phương trình đã cho tương đương với: $|x+m|=m^2-x;$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-x\ge 0 \\ (x+m)^2=(m^2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le m^2 \\ (m^2+m).(2x+m-m^2)=0 \end{cases}$$

+ Với $m=0$ thì phương trình có nghiệm $x\le 0.$

+ Với $m = -1$ thì phương trình có nghiệm $x \le 1$.

+ Với $m \ne 0; m \ne -1$ thì phương trình có nghiệm x_0 khi:

$$x_0 = \frac{m^2 - m}{2} \le m^2 \Leftrightarrow m^2 + m \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m \le -1 \end{array}\right.$$

Do điều kiện đang xét thì ta thấy: $m > 0$ hoặc $m < -1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m^2 - m}{2}$.

Kết luận:

+ $-1 < m < 0,$ phương trình vô nghiệm.

+ $m > 0;\ m < -1,$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m^2 - m}{2}$.

+ $m = 0,$ phương trình có nghiệm $x \le 0$.

+ $m = -1,$ phương trình có nghiệm $x \le 1$.

b) Phương trình này có thể giải bằng cách so sánh x với -1 để phá dấu giá trị tuyệt đối rồi giải. Tuy nhiên, ta có thể giải bằng cách đặt $t = |x+1|$ bởi vì khi đó $x^2 + 2x = |x+1|^2 - 1 = t^2 - 1$.

Ta đặt: $t = |x+1| \Rightarrow t \ge 0$. Khi đó, phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - 1 + mt = 4 \Leftrightarrow t^2 + mt - 5 = 0$$

Dễ thấy đây là phương trình bậc hai đối với biến t có tích $P = -5 < 0$ nên phương trình có hai nghiệm trái dấu: $t_1 > 0 > t_2$

Do đó, với mọi m thì phương trình đã cho có đúng hai nghiệm,

$$|x+1| = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 20}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-m + \sqrt{m^2 + 20} - 2}{2} \\ x = \dfrac{m - \sqrt{m^2 + 20} - 2}{2} \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm với mọi m đó là:

$$x = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 20} - 2}{2};\ x = \frac{m - \sqrt{m^2 + 20} - 2}{2}$$

c) Áp dụng bất đẳng thức $|A| \ge A;\ |A| \ge -A$ ta có:

$$|x| + |x+1| + |x+2| + |x+3| \ge -x - (x+1) + (x+2) + (x+3) = 4 \ge 4 - m^2$$

+ Với $m = 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x \in [-2; -1]$

+ Với $m \ne 0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{x^2 + 1}{x} + \dfrac{x}{x^2 + 1} = -\dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

c) $\frac{x^2}{25}+\frac{9}{x^2}-\frac{11}{5}.\left(\frac{x}{5}-\frac{3}{x}\right)=0$

c) $\frac{2x}{3x^2-5x+2}+\frac{13x}{3x^2+x+2}=6$

e) $\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2-4.\frac{x^2-4}{x^2-9}+3.\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2=0$

f) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+6}$

g) $x^3+\frac{x^3}{(x-1)^3}+\frac{3x^2}{x-1}-2=0$

h) $\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{(x+1)^3}=\frac{1}{3x(x^2+2)}$

Lời giải:

a) Ta có hai hướng tiếp cận: Một là dùng biến đổi tương đương hai là đổi biến số.

+ Cách 1: Biến đổi tương đương: Điều kiện xác định: $x\neq 0$

$$\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{2(x^2+1)^2+2x^2}{2x(x^2+1)}=-\frac{5x(x^2+1)}{2x(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+1)^2+2x^2=-5x(x^2+1)\Leftrightarrow 2x^4+4x^2+2+2x^2+5x^3+5x=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2(x^2+2x+1)+x(x^2+2x+1)\ +2(x^2+2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+1)(2x^2+x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x+1=0\\2x^2+x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x\in\varnothing\ \left(do\ \ \Delta=1-16=-15<0\right)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=-1$.

+ Cách 2: Đổi biến:

Điều kiện xác định: $x\neq 0$

Đặt $\frac{x^2+1}{x}=y$ thì $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{y}$, phương trình đã cho trở thành:

$$y+\frac{1}{y}=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2y^2+5y+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-\frac{1}{2}\\y=-2\end{array}\right.$$

+ Với $y=-\frac{1}{2}$ ta có: $2x^2+x+2=0,$ phương trình vô nghiệm.

+ Với $y=-2$ ta có: $x^2+2x+1=0\Leftrightarrow x=-1.$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=-1.$

b) Phương trình: $\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}=\frac{2x}{x^2-1}$

Điều kiện xác định: $x \neq \pm 1$.

Khi đó, phương trình trở thành: $x^2(x+1) - x^2(x-1) = 2x$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\ (thoa\ man\ dieu\,kien) \\ x = 1\ (khong\,thoa\ man\ dieu\,kien) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 0$

c) Ở đây ta cũng có hai hướng tiếp cận, phép biến đổi tương đương đề nghị bạn đọc tự giải dưới đây ta sẽ trình bày bằng phương pháp đổi biến.

$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{11}{5}.\left(\dfrac{x}{5} - \dfrac{3}{x}\right) = 0.$ Điều kiện: $x \neq 0.$

Đặt $\dfrac{x}{5} - \dfrac{3}{x} = y$ thì $y^2 + \dfrac{6}{5} = \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{9}{x^2}$. Phương trình đã cho trở thành:

$$y^2 + \frac{6}{5} - \frac{11}{5}.y = 0 \Leftrightarrow 5y^2 - 11y + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{6}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{5} - \dfrac{3}{x} = 1 \\ \dfrac{x}{5} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{6}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - 15 = 0 \\ x^2 - 6x - 15 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5+\sqrt{85}}{2} \\ x = \dfrac{5-\sqrt{85}}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 + 2\sqrt{6} \\ x = 3 - 2\sqrt{6} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Tất cả các nghiệm đều thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm

$$x = \frac{5+\sqrt{85}}{2};\ x = \frac{5-\sqrt{85}}{2};\ x = 3 + 2\sqrt{6};\ x = 3 - 2\sqrt{6}.$$

d) $\dfrac{2x}{3x^2 - 5x + 2} + \dfrac{13x}{3x^2 + x + 2} = 6$

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 \neq 0 \\ 3x^2 + x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2/3 \end{cases}$

Với $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Do đó, ta có thể chia cho x cả tử và mẫu của mỗi phân số. Phương trình trở thành:

$$\frac{2}{3x + \dfrac{2}{x} - 5} + \frac{13}{3x + \dfrac{2}{x} + 1} - 6 = 0$$

Đặt $t = 3x + \dfrac{2}{x}$ phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{2}{t-5} + \frac{13}{t+1} - 6 = 0 \Rightarrow 2(t+1) + 13(t-5) - 6(t-5)(t+1) = 0$$

$\Leftrightarrow 6t^2-24t-30-2t-2-13t+65=0$

$$\Leftrightarrow 6t^2-39t+33=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{33}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+\dfrac{2}{x}=1 \\ 3x+\dfrac{2}{x}=\dfrac{33}{6} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-x+2=0 \\ 18x^2-33x+12=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{4}{3}\ (thoa\ \ man\ \ dieu\,kien) \\ x=\dfrac{1}{2}\ (khong\,thoa\ \ man\ \ dieu\,kien) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\dfrac{4}{3};\ x=\dfrac{1}{2}.$

e) Điều kiện: $x\neq\pm 3.$

Dễ dàng nhận thấy $\dfrac{x-2}{x+3}=a;\ \dfrac{x+2}{x-3}=b$ khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2-4.\frac{x^2-4}{x^2-9}+3.\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2=0 \Leftrightarrow a^2-4ab+3b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)(a-3b)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=3b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{x+2}{x-3} \\ \dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{3(x+2)}{x-3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6=x^2+5x+6 \\ x^2-5x+6=3x^2+15x+18 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10x=0 \\ 2x^2+20x+12=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+10x+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-5+\sqrt{19} \\ x=-5-\sqrt{19} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Dễ thấy cả ba nghiệm đều thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x=0;\ x=-5-\sqrt{19};\ x=-5+\sqrt{19}.$

f) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x+6}$

Điều kiện xác định: $x\notin\{0;-1;-2;-3;-4;-5;-6;-7\}$

Phương trình tương đương:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}\right)+\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}\right)-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6}\right)-\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x+7).\left(\frac{1}{x^2+7x}+\frac{1}{x^2+7x+10}-\frac{1}{x^2+7x+6}-\frac{1}{x^2+7x+12}\right)=0$$

Đặt $x^2+7x=y.$ Khi đó phương trình trở thành:

$$\Leftrightarrow (2x+7).\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y+10}-\frac{1}{y+6}-\frac{1}{y+12}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+7=0 \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{y+6}=\frac{1}{y+12}-\frac{1}{y+10} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{7}{2}\ (thoa\ man\ dieu\,kien) \\ \frac{6}{y(y+6)}=-\frac{2}{(y+12)(y+10)}\ (*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) suy ra: $3(y+12)(y+10)+y(y+6)=0$

$\Leftrightarrow 4y^2+72y+360=0$

(phương trình vô nghiệm do $\Delta'=36^2-4.360=-144<0$)

Vậy phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm $x=\frac{-7}{2}$.

g) $x^3+\frac{x^3}{(x-1)^3}+\frac{3x^2}{x-1}-2=0$

Điều kiện: $x\neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương:

$$\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^3-3x.\frac{x}{x-1}.\left(x+\frac{x}{x-1}\right)+\frac{3x^2}{x-1}-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3-3.\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2+\frac{3x^2}{x-1}-2=0$$

Đặt $\frac{x^2}{x-1}=t$ phương trình đã cho trở thành:

$t^3-3t^2+3t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)^3-1=0$

$\Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1}=2 \Leftrightarrow x^2-2x+2=0$

(phương trình vô nghiệm vì $\Delta'=1^2-2=-1<0$)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

h) $\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{(x+1)^3}=\frac{1}{3x(x^2+2)}$

Điều kiện: $x\neq 0;\ x\neq \pm 1.$

Đặt $(x-1)^3=a; x^3=b;\ (x+1)^3=c$ thì $a+b+c=3x^3+6x=3x.(x^2+2)$

Do đó, phương trình trở thành:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{(a+b+c)} \Rightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$$

$\Leftrightarrow (a+b)(ab+bc+ca)+c.(ab+bc+ca)-abc=0$

$\Leftrightarrow (a+b)\left(ab+bc+ca+c^2\right)=0 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$

+ Nếu $a+b=0$ thì: $(x-1)^3+x^3=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

+ Nếu $b+c=0$ thì: : $x^3+(x+1)^3=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

+ Nếu $c+a=0$ thì: : $(x+1)^3+(x-1)^3=0 \Leftrightarrow x=0$ (không thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là: $x=-\frac{1}{2};\ x=\frac{1}{2}$.

Nhận xét: Khi học về các phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện kiên quyết đầu tiên phải có là mẫu số phải khác 0. Sau đó, ta có các phương pháp biến đổi sau:

- Biến đổi tương đương, đưa về dạng đơn giản qua những phép biến đổi tách và ghép.
- Quy đồng mẫu số thông thường đưa về phương trình đại số cơ bản.
- Đặt ẩn phụ để đơn giản phương trình.

Ngoài ra ta còn có thể sử dụng các đánh giá bất đẳng thức với một số bài toán khó.

Bài 4: Giải phương trình:

$$\frac{1}{x^2+5x+4}+\frac{1}{x^2+11x+28}+\frac{1}{x^2+17x+70}=\frac{3}{4x-2}(1)$$

Lời giải:

Điều kiện: $x \notin \left\{-10;\ -7;-4;-1;\frac{1}{2}\right\}$ (*)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+7)}+\frac{1}{(x+7)(x+10)}=\frac{3}{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+10}\right)=\frac{3}{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+10}\right)=\frac{3}{4x-2} \Leftrightarrow x^2+7x+12=0 \Leftrightarrow x=-3; x=-4$$

So sánh với điều kiện (*) thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=-3$.

Nhận xét: Bài toán này có điểm đặc biệt là khi biến đổi ta thấy ngay mẫu số các biểu thức có dạng:

$$\frac{1}{m(m+3)}; m=x+1; x+4; x+7$$

Vì thế mà ta sẽ nghĩ ngay tới phép biến đổi:

$$\frac{1}{m(m+3)}=\frac{1}{3}.\frac{((m+3)-m)}{m(m+3)}=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+3}\right)$$

Hoàn toàn cũng với ý tưởng này, ta có thể xây dựng các bài toán dựa theo những đẳng thức kiểu trên:

$$\frac{2m+3a}{m(m+a)(m+2a)}=\frac{1}{a}.\frac{2m+3a}{m(m+a)(m+2a)}=\frac{1}{a}.\frac{(m+a)(m+2a)-m(m+a)}{m(m+a)(m+2a)}$$

$$=\frac{1}{a}.\left(\frac{1}{m(m+a)}-\frac{1}{(m+a)(m+2a)}\right)=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{m}-\frac{2}{m+a}+\frac{1}{m+2a}\right)$$

Khi đó ta sẽ có:

$$\frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)}+\frac{2x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{2x+8}{(x+2)(x+3)(x+4)}+\frac{2x+11}{(x+3)(x+4)(x+5)}$$

$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x+4}+\frac{1}{x+5}\right)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5}$$

Như vậy ta sẽ thu được bài toán sau :

Bài toán: Giải phương trình:

$$\frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)}+\frac{2x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{2x+8}{(x+2)(x+3)(x+4)}+\frac{2x+11}{(x+3)(x+4)(x+5)}=0$$

Ngoài ra bạn đọc có thể thử sức với bài toán sau:

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}=\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{360}$$

Bài 5: Giải phương trình :

$$\frac{1}{2008x+1}-\frac{1}{2009x+2}=\frac{1}{2010x+4}-\frac{1}{2011x+5}\ (1)$$

Phân tích ý tưởng: Ta thấy ngay ý tưởng của bài toán nhờ vào sự đặc biệt của đẳng thức:

$$2008x+1+2011x+5=2009x+2+2010x+4=4019x+6$$

Lời giải:

Điều kiện: $x\notin\left\{-\frac{1}{2008};-\frac{2}{2009};-\frac{4}{2010};-\frac{5}{2011}\right\}$ (*) 1

Khi đó ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{2008x+1}+\frac{1}{2011x+5}=\frac{1}{2009x+2}+\frac{1}{2010x+4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4019x+6}{(2008x+1)(2011x+5)}=\frac{4019x+6}{(2009x+2)(2010x+4)}$$

$$\Leftrightarrow(4019x+6)\left(\frac{1}{(2008x+1)(2011x+5)}-\frac{1}{(2009x+2)(2010x+4)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4019x+6=0 \\ (2008x+1)(2011x+5)-(2009x+2)(2010x+4)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4019x=-6 \\ 2x^2+5x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{6}{4019} \\ x=-1;\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện (*) thì phương trình có nghiệm là

$x=-\dfrac{6}{4019};\ x=-1;\ x=-\dfrac{3}{2}.$

Bài 6: Giải phương trình: $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ (1)$

Phân tích: Rõ ràng, bài toán này không có gì đặc biệt, vì thế ta cứ đúng quy tắc biến đổi tương đương và đưa về phương trình đại số quen thuộc và giải.

Lời giải:

Điều kiện: $x>0;\ x\neq 1\ (*)$. Khi đó ta có: $(1)\Leftrightarrow \dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

+) Nếu $0<x<1$ thì vế trái âm còn vế phải luôn dương nên phương trình vô nghiệm.

+) Nếu $x>1$ thì hai vế không âm nên bình phương hai vế ta được phương trình:

$x^4-2x^2-16x+1=0 \Leftrightarrow (x^2+3)^2-8(x+1)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2\sqrt{2}x+3-2\sqrt{2}\right)\left(x^2+2\sqrt{2}x+3+2\sqrt{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}\ (x>1)$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}$.

Bài 7: Giải phương trình: $\dfrac{2}{3x^2-4x+1}+\dfrac{13}{3x^2+2x+1}=\dfrac{6}{x}\ (1)$

Ý tưởng: Nhìn vào mẫu số ta thấy có cùng một điểm chung: $3x^2+1;$ điều đó gợi ý cho việc đặt ẩn phụ.

Lời giải:

Điều kiện: $x\notin\left\{0;1;\dfrac{1}{3}\right\}(*)$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{2}{3x-4+\dfrac{1}{x}}+\frac{13}{3x+2+\dfrac{1}{x}}=6$$

Đặt $3x+\dfrac{1}{x}-4=t$ ta được phương trình:

$\dfrac{2}{t}+\dfrac{13}{t+6}=6 \Leftrightarrow 2t^2+7t-4=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2};\ t=-4$

+) $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 6x^2-11x+4=0\Leftrightarrow x=\frac{4}{3};x=\frac{1}{2}$

+) $t=-4\Leftrightarrow 3x^2-x+2=0\Leftrightarrow \nexists x$

So sánh với điều kiện (*) thì phương trình có nghiệm là $x=\frac{4}{3};x=\frac{1}{2}$.

Bài 8: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=15(1)$

Lời giải:

Điều kiện: $x\neq -1;x\neq 0(*)$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2+x^2}{x^2(x+1)^2}=15\Leftrightarrow \frac{1}{x^2(x+1)^2}+\frac{2x^2+2x}{x^2(x+1)^2}-15=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x(x+1)}\right)^2+\frac{2}{x(x+1)}-15=0$$

Đặt $\frac{1}{x(x+1)}=t$ ta được phương trình $t^2+2t-15=0\Leftrightarrow t=3;t=-5$

+) $t=3\Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)}=3\Leftrightarrow 3x^2+3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$

+) $t=-5\Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)}=-5\Leftrightarrow 5x^2+5x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

So sánh với điều kiện (*) thì phương trình có bốn nghiệm

$x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6};x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

Bài 9: Giải phương trình: $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2+\frac{x+1}{x-3}=12\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2\quad(1)$

Lời giải:

Điều kiện: $x\neq 2;x\neq 3(*)$

Đặt $u=\frac{x+1}{x-2};v=\frac{x-2}{x-3}$ ta được

$u^2+uv=12v^2\Leftrightarrow (u-3v)(u+4v)=0\Leftrightarrow u=3v;u=-4v$

+) $u=3v\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2}=3\frac{x-2}{x-3}\Leftrightarrow x^2+4x+3=3x^2-12x+12$

$$\Leftrightarrow 2x^2-16x+9=0\Leftrightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{46}}{2}$$

+) $u=-4v\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-2}=-4\dfrac{x-2}{x-3}\Leftrightarrow x^2+4x+3=-4x^2+16x-16$

$$\Leftrightarrow 5x^2-12x+19=0\Leftrightarrow \nexists x$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\dfrac{8\pm\sqrt{46}}{2}$.

Bài 10: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2-9x+1}=x-2;$

b) $x=\sqrt{2x+3};$

c) $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}=8;$

d) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1};$

e) $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2.$

Lời giải:

a) Với phương trình dạng cơ bản này ta có lời giải sau:

$$\sqrt{3x^2-9x+1}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\ge 0\\ 3x^2-9x+1=(x-2)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ 3x^2-9x+1=x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ 2x^2-5x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=3$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=3$

Nhận xét: Một lần nữa ta nhắc lại cách giải phương trình:

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\ f(x)=g(x)^2\end{cases}$$

b) $x=\sqrt{2x+3}$

Hoàn toàn tương tự ý (a) ta có:

$$x=\sqrt{2x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2=2x+3\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2x-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=3$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$

c) $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}=8.$ Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{3}$

Phương trình đã cho tương đương:

$$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}\right)^2=64\Leftrightarrow 4x+2+2\sqrt{x+1}.\sqrt{3x+1}=64$$

$$\Rightarrow\sqrt{(x+1)(3x+1)}=31-2x(*)\Leftrightarrow\begin{cases}31-2x\ge 0\\ (x+1)(3x+1)=(31-2x)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{31}{2} \\ 3x^2+4x+1=4x^2-124x+961 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{31}{2} \\ x^2-128x+960=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{31}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=120 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=8 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=8$.

Nhận xét: Tại sao phương trình (*) chỉ là phương trình suy ra? Bởi vì ta đã sử dụng $\sqrt{x+1}.\sqrt{3x+1}=\sqrt{(x+1)(3x+1)}$ nên có khả năng sinh ra nghiệm ngoại lai. Do đó ta cần phải có điều kiện và việc thử lại.

d) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}$

Điều kiện: $x \ge 3$.

Khi đó phương trình tương đương:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-3}\right)^2=2x+1 \Leftrightarrow x+2\sqrt{x}.\sqrt{x-3}+x-3=2x+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x(x-3)}=2 \Leftrightarrow x(x-3)=4$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1(\text{khong thoa man dieu kien}) \\ x=4(\text{thoa man dieu kien}) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4$.

e) Điều kiện: $x \ge -1$.

$$\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{3x+7}=2+\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{x+1}\right)^2=3x+7$$

$$\Leftrightarrow 4+4\sqrt{x+1}+x+1=3x+7 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 4(x+1)=(x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ (x+1)(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1(\text{thoa man dieu kien}) \\ x=3(\text{thoa man dieu kien}) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=-1; x=3$.

Nhận xét: Qua bài toán này sẽ để cho ta một lưu ý cực kì quan trọng:

$$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}\,(1) \Leftrightarrow \sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}+\sqrt{h(x)}\,(2)$$

Ta chỉ được phép dùng dấu tương đương khi bình phương ở phương trình (2), nếu bình phương ở phương trình (1) ta chỉ thu được một phương trình hệ quả (tức là dấu suy ra) và do đó có khả năng có chứa nghiệm ngoại lai.

III. Một số phương pháp giải phương trình vô tỉ:

A. Phương pháp đặt ẩn phụ:

Bài 1: Giải phương trình: $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}(1)$

Lời giải:

Điều kiện: $x>1$

Bình phương hai vế của (1), ta có:

$$x^2+\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144}\Leftrightarrow\frac{x^4}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144}\quad(2)$$

Đặt $t=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, với $t>0,$ ta có: $(2)\Leftrightarrow t^2+2t-\frac{1225}{144}=0\quad(3)$

Phương trình (3) có hai nghiệm trái dấu: $\begin{cases} t_1=\frac{25}{12} \\ t_2=-\frac{49}{12}\ (\text{loai}) \end{cases}$

Với $t_1=\frac{25}{12},$ ta có: $12(x^2-1)-25\sqrt{x^2-1}+12=0\quad(4)$

Đặt $y=\sqrt{x^2-1}, y>0,$ ta có: $(4)\Leftrightarrow 12y^2-25y+12=0\Leftrightarrow\begin{cases} y=\frac{4}{3} \\ y=\frac{3}{4} \end{cases}$

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{4} \\ x=\frac{5}{3} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{5}{4};\frac{5}{3}\right\}$

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$

Lưu ý: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=1$ nên phép đổi biến đã rất rõ.

Lời giải:

Điều kiện: $x\geq 1$

Nhận xét: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=1$

Đặt $t=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}$ thì phương trình có dạng: $t+\frac{1}{t}=2\Leftrightarrow t=1$

Thay vào tìm được $x=1.$

Bài 3: Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x-5}$

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq -\frac{4}{5}$

Đặt $t=\sqrt{4x-5}\left(t\geq 0\right)$ thì: $x=\frac{\left(t^2-5\right)}{4}$

Thay vào ta có:

$2.\frac{t^4-10t^2+25}{16}-\frac{6}{4}\left(t^2-5\right)-1=t \Leftrightarrow t^4-22t^2-8t+27=0$

$\Leftrightarrow \left(t^2+2t-7\right)\left(t^2-2t-11\right)=0$

Ta tìm được bốn nghiệm là: $t_{1,2}=-1\pm 2\sqrt{2};t_{3,4}=1\pm 2\sqrt{3}$

Do $t\geq 0$ nên chỉ nhận các giá trị $t_1=-1+2\sqrt{2};t_3=1+2\sqrt{3}$

Từ đó tìm được các nghiệm của phương trình là: $x=1-\sqrt{2};\ x=2+\sqrt{3}$

Cách khác: Ta có thể bình phương hai vế của phương trình với điều kiện: $2x^2-6x-1\geq 0$

Ta được: $x^2(x-3)^2-(x-1)^2=0$

Từ đó ta tìm được nghiệm tương ứng.

Đơn giản nhất là ta đặt: $2y-3=\sqrt{4x+5}$ và đưa về hệ đối xứng.

Bài 4: Giải phương trình: $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$

Lời giải:

Điều kiện: $1\leq x\leq 6$

Đặt $y=\sqrt{x-1}$ $\left(y\geq 0\right)$ thì phương trình trở thành: $y^2+\sqrt{y+5}=5$

$\Leftrightarrow y^4-10y^2-y+20=0$ $\left(voi\ \ y\leq\sqrt{5}\right)$

$\Leftrightarrow \left(y^2+y-4\right)\left(y^2-y-5\right)=0 \Leftrightarrow y=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ (loại), $y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

Từ đó ta suy ra: $x=\frac{11-\sqrt{17}}{2}$

Bài 5: Giải phương trình sau: $x=\left(2004+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$

Lời giải:

Điều kiện: $0\leq x\leq 1$

Đặt $y=\sqrt{1-\sqrt{x}}$ thì phương trình trở thành:

$\left(1-y^2\right)^2=\left(2004+\left(1-y^2\right)\right).(1-y)^2$

$\Leftrightarrow 2(1-y)^2\left(y^2+y-1002\right)=0 \Leftrightarrow y=1 \Leftrightarrow x=0$

Bài 6: Giải phương trình: $x^2+2x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3x+1$

Lời giải:

Điều kiện: $-1 \le x < 0$

Chia cả hai vế cho x ta được: $x+2\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3+\dfrac{1}{x}$

Đặt $t=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}} \ge 0,$ ta suy ra:

$t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow (t+1)(t-3)=0 \Leftrightarrow t=3 \ (do\ t \ge 0)$

$\Leftrightarrow x-\dfrac{1}{x}=9 \Rightarrow x^2-9x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{9\pm\sqrt{85}}{2}$

Do $-1 \le x < 0$ nên: $x=\dfrac{9-\sqrt{85}}{2}$

Bài 6: Giải phương trình: $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$

Lời giải:

$x=0$ không phải là nghiệm. Chia cả hai vế cho x ta được:

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x}}=2$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x}},$ ta có: $t^3+t-2=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Bài 7: Giải phương trình: $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[4]{629-x} \\ v=\sqrt[4]{77+x} \end{cases} \Leftrightarrow u+v=8,\ \ u^4+v^4=706$

Đặt $t=uv$ thì ta có: $t^2-128t+1695=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=15 \\ t=113 \end{array}\right.$

Với $t=15 \Rightarrow x=4$ Với $t=113 \Rightarrow x=548$

Thử lại ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\{4;548\}$

Bài 8: Giải phương trình:

$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)=2+\sqrt{1-x^2}$

Lời giải:

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$

Đặt $u = \sqrt{1+x},\ v = \sqrt{1-x},$ với $u, v > 0$

$\Leftrightarrow u.v = \sqrt{1-x^2}, u^2 + v^2 = 2,\ u^2 - v^2 = 2x$

Phương trình đã cho trở thành: $\left(\dfrac{u^2+v^2}{2} + u.v\right)\left(u^3 - v^3\right) = 2 + u.v$

Giải phương trình trên ta được: $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (thử lại thỏa mãn).

Bài 9: (Duyên hải Bắc Bộ 2013 - 2014) Giải phương trình sau trên tập số thực:

$(6x-3)\sqrt{7-3x} + (15-6x)\sqrt{3x-2} = 2\sqrt{-9x^2+27x-14} + 11.$

Lời giải:

Điều kiện: $\dfrac{2}{3} \le x \le \dfrac{7}{3}.$

Đặt $a = \sqrt{7-3x},\ b = \sqrt{3x-2}\ (a, b \ge 0)$. Suy ra

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ (2b^2+1).a + (2a^2+1)b = 2ab + 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s^2 - 2p = 5 \\ 2sp + s = 2p + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p = s^2 - 5 \\ s(s^2-5) + s = s^2 - 5 + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p = s^2 - 5 \\ s^3 - s^2 - 4s - 6 = 0 \end{cases}$$

$(s = a + b,\ p = ab)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2p = s^2 - 5 \\ (s-3)(s^2+2s+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ s = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Thử lại thỏa mãn. Vậy nghiệm phương trình là $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Bài 10: Giải phương trình: $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge 1$

Nhận xét: Ta viết $\alpha(x-1) + \beta(x^2+x+1) = 7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$

Đồng nhất thức ta được: $3(x-1) + 2(x^2+x+1) = 7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$

Đặt $u = x - 1 \ge 0,\ v = x^2 + x + 1 > 0,$ ta được:

$$3u+2v=7\sqrt{uv}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=9u\\ v=\dfrac{1}{4}u\end{array}\right.$$

Nghiệm $x=4\pm\sqrt{6}.$

Bài 11: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}$

Bình phương hai vế ta được:

$$\sqrt{(x^2+2x)(2x-1)}=x^2+1\Leftrightarrow\sqrt{(x^2+2x)(2x-1)}=(x^2+2x)-(2x-1)$$

Ta có thể đặt: $\begin{cases}u=x^2+2x\\ v=2x-1\end{cases}$, khi đó ta có: $uv=u^2-v^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}v\\ u=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}v\end{array}\right.$

Do $u,v\ge0$ nên: $u=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}v\Leftrightarrow x^2+2x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(2x-1)$

Công việc còn lại bạn đọc tự giải quyết.

Bài 12: Giải phương trình: $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge5$

Chuyển vế bình phương ta được: $2x^2-5x+2=5\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}$

Nhận xét: Không tồn tại số α, β nào để:

$$2x^2-5x+2=\alpha(x^2-x-20)+\beta(x+1)$$

nên ta không thể đặt $\begin{cases}u=(x^2-x-20)\\ v=x+1\end{cases}$

Nhưng may mắn ta có:

$$(x^2-x-20)(x+1)=(x+4)(x-5)(x+1)=(x+4)(x^2-4x-5)$$

Ta viết lại phương trình:

$$2(x^2-4x-5)+3(x+4)=5\sqrt{(x+4)(x^2-4x-5)}$$

Đến đây bài toán được giải quyết.

B. Phương pháp nhân liên hợp:

Bài 1: Giải phương trình sau: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}=\sqrt{x+100}$

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge -1$

Ta thấy $x=0$ là một nghiệm của phương trình nên có thể tiến hành biến đổi như sau:

$$\left(\sqrt{x+1}-1\right)+\left(\sqrt{x+4}-2\right)+\left(\sqrt{x+9}-3\right)+\left(\sqrt{x+16}-4\right)=\sqrt{x+100}-10$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)-1^2}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{(x+4)-2^2}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{(x+9)-3^2}{\sqrt{x+9}+3}+\frac{(x+16)-4^2}{\sqrt{x+16}+4}=\frac{(x+100)-10^2}{\sqrt{x+100}+10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{x}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{x}{\sqrt{x+9}+3}+\frac{x}{\sqrt{x+16}+4}=\frac{x}{\sqrt{x+100}+10}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}+\dfrac{1}{\sqrt{x+16}+4}=\dfrac{1}{\sqrt{x+100}+10} \end{array}\right.$$

Xét phương trình:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+16}+4}=\frac{1}{\sqrt{x+100}+10} \quad (1)$$

Ta có: $\sqrt{x+100}+10>\sqrt{x+1}+1>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}>\dfrac{1}{\sqrt{x+100}+10}$

Suy ra:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+16}+4}>\frac{1}{\sqrt{x+100}+10}, \quad \forall x \ge -1$$

Do đó phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài 2: Giải phương trình: $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}$

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge -\dfrac{10}{3}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$(x+3)(x+6)=\frac{2\left(\sqrt{3x+10}-1\right)\left(\sqrt{3x+10}+1\right)}{\left(\sqrt{3x+10}+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+6)=\frac{6(x+3)}{\left(\sqrt{3x+10}+1\right)} \Leftrightarrow (x+3)\left[(x+6)-\frac{6}{\left(\sqrt{3x+10}+1\right)}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+6)-\dfrac{6}{\left(\sqrt{3x+10}+1\right)}=0 \quad (*) \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Mặt khác, $x \ge -3$ *và* $-\frac{10}{3} \le x \le -3$ nên phương trình vô nghiệm.

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{2x-x^2}{1+x^2}(*)$

Lời giải:

Điều kiện: $0 < x \le 1,$

$(*) \Leftrightarrow (1+x^2)\sqrt{1-x} = (2x+x^2)\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x^2\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{1-x}-2x\sqrt{x}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(1-2x)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+\frac{1-x-4x^3}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}=0 \quad (**) \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Nhận thấy (**) vô nghiệm với $0 < x \le 1$. Vậy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 4: Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình sau:

$\sqrt{x^2+15} = 3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+8}-2$

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(\sqrt{x^2+15}-4\right)=3\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)+\left(\sqrt{x^2+8}-3\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}=\frac{3\left(x^2-1\right)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}$$

Như vậy ta có $x^2 = 1$ hoặc $\frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4}=\frac{3}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}$

Tuy nhiên, do $\sqrt{x^2+8}+3 < \sqrt{x^2+15}+4$ nên ta có: $\frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4} < \frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}$, và do đó khả năng thứ hai không thể xảy ra.

Từ đây ta thu được $x^2 = 1$ hay $x = \pm 1$.

Tóm lại, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1; x = -1$.

Bài 5: Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{2x^2+1} = x^2+x+3$

Lời giải:

Dễ thấy $x=-3$ không là nghiệm của phương trình nên ta chỉ cần xét $x\neq -3$ là đủ. Khi đó, phương trình đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{2x^2+1}=\frac{x^2+x+3}{x+3}\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}-1=\frac{x^2}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\frac{x^2}{x+3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\dfrac{1}{x+3}\end{array}\right.$$

Từ đây ta suy ra $x=0$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Xét phương trình còn lại, ta thấy phương trình này tương đương với:

$$\sqrt{2x^2+1}+1=2x+6\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=2x+5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{5}{2} \\ 2x^2+1=4x^2+25+20x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{5}{2} \\ x^2+10x+12=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{5}{2} \\ x=-5+\sqrt{13}\cup x=-5-\sqrt{13}\end{cases}\Leftrightarrow x=-5\pm\sqrt{13}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=0$ *và* $x=-5\pm\sqrt{13}.$

C. Phương pháp dùng tính đơn điệu:

Bài 1: Giải phương trình: $9x^2-28x+21=\sqrt{x-1}\ (*)$

Lời giải:

Điều kiện xác định: $x\geq 1$

Nếu $x\geq \frac{3}{2}\Rightarrow 3x-5\geq -\frac{1}{2}$

Ta có $(*)\Leftrightarrow (3x-5)^2+3x-5=x-1+\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow f(3x-5)=f\left(\sqrt{x-1}\right)$ với $f\ \ t\ =t^2+t$

$\Leftrightarrow 3x-5=\sqrt{x-1}$ (do *f(t)* đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5\geq 0 \\ (3x-5)^2=x-1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{5}{3} \\ x\in\left\{2;\dfrac{13}{9}\right\}\end{cases}\Leftrightarrow x=2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Nếu $1\leq x<\frac{3}{2}\Rightarrow 4-3x>-\frac{1}{2}(*)$

$(4.1) \Leftrightarrow (4-3x)^2 + 4 - 3x = x - 1 + \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow f\left(4-3x\right) = f\left(\sqrt{x-1}\right)$ với $f\left(t\right) = t^2 + t$

$\Leftrightarrow 4 - 3x = \sqrt{x-1}$ (do *f(t)* đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và (*))

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-3x \geq 0 \\ \left(4-3x\right)^2 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{4}{3} \\ x \in \left\{\frac{25 \pm \sqrt{13}}{18}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{25-\sqrt{13}}{18}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{2; \frac{25-\sqrt{13}}{18}\right\}$

Nhận xét: Bằng việc xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số bậc hai $y = x^2 + x$ ta đã đưa ra một lời giải khá là thú vị. Tuy nhiên bài toán này hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp biến đổi tương đương hoặc nhân liên hợp. Đề nghị bạn đọc tự suy nghĩ thêm!

Bài 2: Giải phương trình $8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = \sqrt[3]{3x-5}$ $(*)$

Lời giải:

$(*) \Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 + 2x - 3 = 3x - 5 + \sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow (2x-3)^3 + 2x - 3 = 3x - 5 + \sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow f\left(2x-3\right) = f\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)$ $(**)$ với $f\left(t\right) = t^3 + t$

Ta có *f*(t) đồng biến trên R do đó:

$(**) \Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt[3]{3x-5} \Leftrightarrow \left(2x-3\right)^3 = 3x - 5$

$\Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{2; \frac{5+\sqrt{3}}{4}\right\}$

Vậy phương trình có nghiệm: $S = \left\{2; \frac{5+\sqrt{3}}{4}\right\}$

D. Một số bài toán khó:

Bài 1: (Tỉnh Vĩnh Long)

1) Giải phương trình: $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} = 1$

2) Giải phương trình với ẩn số thực: $\sqrt{1-x} = \sqrt{6-x} - \sqrt{5-2x}$

Lời giải:

1. Điều kiện: $x \geq 1.$ Phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}=1 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|\sqrt{x-1}-2\right|=1(*)$

- Nếu $\sqrt{x-1}<1$ thì $(*) \Leftrightarrow -\left(\sqrt{x-1}-1\right)-\left(\sqrt{x-1}-2\right)=1$

$$\Leftrightarrow 3-2\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=1 \text{ (loại)}$$

- Nếu $1 \le \sqrt{x-1} \le 2 \Leftrightarrow 2 \le x \le 5$ thì $(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)-\left(\sqrt{x-1}-2\right)=1 \Leftrightarrow 1=1$ luôn đúng

- Nếu $\sqrt{x-1}>2$ thì $(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(\sqrt{x-1}-2\right)=1$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}-3=1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=2 \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là mọi $x \in [2;5]$

2. Điều kiện: $x \le -\frac{5}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{1-x}+\sqrt{-5-2x}=\sqrt{6-x}$

$\Leftrightarrow (1-x)+(-5-2x)+2\sqrt{(1-x)(-5-2x)}=6-x$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(-5-2x)}=x+5 \Leftrightarrow (1-x)(-5-2x)=x^2+10x+25$

$\Leftrightarrow x^2-7x-30=0 \Leftrightarrow x=-3; x=10$

Thử lại ta thấy chỉ có $x=-3$ thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=-3$

Bài 2: (HSG Đồng Nai) Giải phương trình:

$x^5-x^4-x^3-11x^2+25x-14=0$

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(x^5-2x^4\right)+\left(x^4-2x^3\right)+\left(x^3-2x^2\right)+\left(-9x^2+18x\right)+(7x-14)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^4+x^3+x^2-9x+7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^4+x^3+x^2-9x+7=0 \end{array}\right.$

Phương trình thứ hai ở trên có thể viết lại là:

$\left(x^4+x^3+x^2-9x+6\right)+1=0 \Leftrightarrow \left(x^4-x^3+2x^3-2x^2-3x-6x+6\right)+1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+3x+6)+1=0$

Do $(x-1)^2(x^2+3x+6)+1>0 \;\; \forall x$ nên phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=2$.

Bài 3: (Hà Tĩnh) Giải phương trình sau:

$x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^3+x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$

Lời giải:

Điều kiện $x \in \left(-\infty;-1\right] \cup \left(0;1\right]$

Nếu $x<-1$ thì $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^2+x)^2+(x-1)^2>0;\ x^3+x=x(x^2+1)<0$ nên phương trình không có nghiệm thỏa mãn $x<-1$

Đồng thời $x=1$ không là nghiệm của phương trình ta chỉ xét $x \in \left(0;1\right)$

Phương trình đã cho:

$\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)-2x\left(1-x^2\right)=\left(x^2+1\right)\sqrt{x\left(1-x^2\right)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}-\dfrac{2\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}{x^2+1}=1$

Đặt $t=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}>0$ phương trình trên trở thành:

$t-\dfrac{2}{t}=1 \Leftrightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow t=2\ \ do\ \ t>0$

Khi đó: $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}=2 \Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^2=4x\left(1-x^2\right)$

$\Leftrightarrow x^4+2x^2+1-4x+4x^3=0 \Leftrightarrow \left(x^2+2x-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow \mathrm{x}=-1\pm\sqrt{2}$

So sánh với điều kiện ta có phương trình có nghiệm $\mathrm{x}=-1+\sqrt{2}$

Bài 4: (ĐHSP Hà Nội) Giải phương trình

$\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2x^2+2x+2$

Lời giải:

Điều kiện $\begin{cases}3x^3+2x^2+2\ge 0\\-3x^3+x^2+2x-1\ge 0\end{cases}$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì:

$\sqrt{3x^3+2x^2+2}=1.\sqrt{3x^3+2x^2+2}\le\dfrac{1+\left(3x^3+2x^2+2\right)}{2}=\dfrac{3x^3+2x^2+3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{3x^3+2x^2+2}=1 \Leftrightarrow x=-1$

$\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=1.\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}\le\dfrac{1+\left(-3x^3+x^2+2x-1\right)}{2}=\dfrac{-3x^3+x^2+2x}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=1 \Leftrightarrow x=-1$

$\Rightarrow \sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}$

$\le \dfrac{3x^3+2x^2+3}{2}+\dfrac{-3x^3+x^2+2x}{2}=\dfrac{3x^2+2x+3}{2}$

$$\frac{3x^2+2x+3}{2}\le \frac{\left(3x^2+2x+3\right)+\left(x+1\right)^2}{2}=2x^2+2x+2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$

Do đó ta luôn có: $\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}\le 2x^2+2x+2$

Đẳng thức xảy ra tức là $x=-1$ thử lại thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=-1$

Bài 5: (Chuyên Nguyễn Du) Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x+4}=x^3+3x^2+x-2$

Lời giải:

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+4}+2x+3=\left(x+1\right)^3$

Đặt $y+1=\sqrt[3]{3x+4}$ ta có hệ: $\begin{cases}\left(x+1\right)^3=2x+y+4\\ \left(y+1\right)^3=3x+4\end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ, vế theo vế ta được:

$$\left(x-y\right)\left[\left(x-1\right)^2+\left(x-1\right)\left(y-1\right)+\left(y-1\right)^2\right]=y-x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-y=0\\ \left(x-1\right)^2+\left(x-1\right)\left(y-1\right)+\left(y-1\right)^2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y$$

Suy ra $x+1=\sqrt[3]{3x+4}\Leftrightarrow (x+1)^3=3x+4\Leftrightarrow x^3+3x^2=4$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x+2\right)^2=0\Leftrightarrow x=4; x=-2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm phân biệt $x=1;\ x=-2$

Bài 6: Giải phương trình:

$$\frac{9-2x^2}{x}+\frac{2\left(11x^3+56x^2-11\right)}{\sqrt{x^3+4x^2-1}}=9x\left(6+x\right)\qquad\left(x\in R\right)$$

Lời giải:

Điều kiện: $x^3+4x^2-1>0$

Đặt $t=\sqrt{x^3+4x^2-1}>0$ ta có: $\begin{cases}11x^3+56x^2-11=11t^2+12x^2\\ 9x^3+56x^2-9=9t^2+20x^2\end{cases}$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{2\left(11t^2+12x^2\right)}{t}=\frac{9t^2+20x^2}{x}\Leftrightarrow 22t^2x+24x^3=9t^3+20x^2t$$

$\Leftrightarrow (t-2x)(9t^2-4tx+12x^2)=0 \Leftrightarrow t=2x \Leftrightarrow \sqrt{x^3+4x^2-1}=2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^3+4x^2-1=4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Thử lại thấy $x=1$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=1$

Bài 7: Giải phương trình:

$3x^3+4x^2-6=2\left(x^2+2x-\dfrac{2}{x}\right)\sqrt{x^3+x^2-2} \quad (x \in R)$

Lời giải:

Điều kiện: $x^3+x^2-2>0 \Leftrightarrow x>1$

Đặt $t=\sqrt{x^3+x^2-2} \ge 0$ ta có: $\begin{cases} 3x^3+4x^2-6=3t^2+x^2 \\ x^3+2x^2-2=t^2+x^2 \end{cases}$

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $3t^2+x^2=\dfrac{2t(t^2+x^2)}{x}$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2t+3t^2x-2t^3=0 \Leftrightarrow (x-t)(x^2-xt+2t^2)=0$

$\Leftrightarrow t=x \Leftrightarrow \sqrt{x^3+x^2-2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^3+x^2-2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\sqrt[3]{2}$.

CHƯƠNG IV

BÀI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I.Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn số:

Khi giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn số ta ghi nhớ hai quy tắc sau để biến đổi hệ phương trình đã cho về hệ phương trình tương đương:

- Quy tắc thế:

Bước 1: Từ một phương trình của hệ, ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để được một phương trình mới chỉ có một ẩn.

Bước 2: Thiết lập hệ mới gồm phương trình một ẩn thu được ở bước 1 và một trong hai phương trình ban đầu (nên chọn phương trình đơn giản hơn).

Giải hệ và kết luận nghiệm của hệ.

- Quy tắc cộng đại số:

Bước 1: Cộng hoặc trừ từng vế hai phương trình của hệ đã cho để được phương trình mới chỉ có một ẩn (nếu như hệ số của hai phương trình chưa thể khử khi cộng hay trừ trực tiếp thì ta cần nhân thêm hệ số thích hợp vào một trong hai phương trình của hệ).

Bước 2: Thiết lập hệ mới gồm phương trình một ẩn thu được ở bước 1 và một trong hai phương trình ban đầu. Giải hệ và kết luận nghiệm của hệ.

Ví dụ 1.1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-2y=7 \end{cases}$

Phân tích: Ta thấy rằng đây đúng là phương trình bậc nhất hai ẩn mà ta đang xét, và ta nghĩ ngay đến hai quy tắc đã nói bên trên.

Với quy tắc thế, ta có thể chọn một trong hai ẩn để biểu diễn theo ẩn còn lại. Tuy nhiên khi áp dụng vào bài toán, ta nên chọn ẩn nào có biểu diễn "đẹp" hơn. Với hệ ở trên, nếu ta biểu diễn x theo y thì ta được $x=\dfrac{7-y}{2}$ trông không được "đẹp", nên ta sẽ chọn việc biểu diễn ẩn y theo x rồi thế vào phương trình thứ hai. Vì ta đã biến đổi được $y=7-2x$ từ phương trình thứ nhất nên ta sẽ giữ nó trong hệ phương trình mới tương đương là:

$$\begin{cases} y=7-2x \\ 3x-2\left(7-2x\right)=7 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai đã là phương trình bậc nhất một ẩn nên ta có thể dễ dàng giải hệ phương trình này.

Với quy tắc cộng đại số, ta để ý rằng khi cộng hoặc trừ từng vế của hai phương trình trực tiếp từ hệ ban đầu, ta không thể khử được ẩn nào đi, do đó ta cần nhân thêm hệ số vào một trong hai phương trình của hệ để có thể khử ẩn khi cộng đại số. Cũng như khi ta tìm ẩn để thế như trong quy tắc trên, ở đây ta cũng nên chọn ẩn để khử và phương trình để nhân hệ số sao cho mọi thứ được "đẹp" và dễ dàng nhất. Ta có thể nhìn ra được rằng ẩn y ở phương trình thứ nhất có hệ số là 1 nên ta sẽ nhân thêm 2 vào phương trình thứ nhất rồi cộng từng vế với phương trình thứ 2 để có thể khử được ẩn y. Khi đó ta sẽ được hệ phương trình tương đương mới là:

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ (4x+2y)+(3x-2y)=14+7 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai là phương trình bậc nhất một ẩn x nên ta có thể dễ dàng giải ra nghiệm.

Sau đây là lời giải chi tiết cho cả hai cách

Lời giải:

Cách 1 :

Ta có: $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-2x \\ 3x-2(7-2x)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-2x \\ 3x-14+4x=7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=7-2x \\ 7x=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-2x \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S=\{(3;1)\}$

Cách 2 :

Ta có: $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=14 \\ 3x-2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=7 \\ (4x+2y)+(3x-2y)=14+7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=7 \\ 7x=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=7 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-2.3=1 \\ x=3 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x;y)=(3;1)$

Nhận xét :

Cả hai cách đều có thể dễ dàng thực hiện, nhưng quy tắc thế sẽ giúp chúng ta nhiều hơn đối với các bài toán hệ phương trình khó, vì tính đơn giản của nó để đưa về phương trình một ẩn.

Một điều chú ý khác khi kết luận nghiệm của hệ phương trình thì ta phải kết luận theo tập nghiệm chứ không được kết luận theo từng nghiệm riêng lẻ. Và ta có một số cách kết luận như đã được trình bày bên trên.

Ví dụ 1.2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-2)(y+1)=xy \\ (x+8)(y-2)=xy \end{cases}$

Phân tích: Nhìn qua ta có thể thấy hệ này không thuộc dạng hệ phương trình bậc nhất, tuy nhiên khi ta tách vế trái của cả hai phương trình, ta thấy rằng hạng tử bậc hai xy ở cả hai vế có thể triệt tiêu cho nhau, từ đó ta được một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn mà ta đã biết cách giải.

Lời giải:

Ta có : $\begin{cases} (x-2)(y+1)=xy \\ (x+8)(y-2)=xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-2y+x-2=xy \\ xy+8y-2x-16=xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-2=0 \\ -2x+8y-16=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 \\ -(2y+2) + 4y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 \\ 2y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2.5 + 2 = 12 \\ y = 5 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x; y) = (12; 5)$

Nhận xét:

Nhiều khi ta không thể nhận ra bài toán rất dễ dàng khi ta mới nhìn vào nó, nhưng sau một vài bước biến đổi nho nhỏ thì nó hoàn toàn là một dạng mà ta đã biết cách làm từ trước.

Một số bài toán tương tự :

Bài tập: Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} (2x-3)(2y+4) = 4x(y-3) + 54 \\ (x+1)(3y-3) = 3y(x+1) - 12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{2y-5x}{3} + 5 = \dfrac{y+27}{4} - 2x \\ \dfrac{x+1}{3} + y = \dfrac{6y-5x}{7} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+2)(y+3) - \dfrac{xy}{2} = 50 \\ \dfrac{xy}{2} - \dfrac{1}{2}(x-2)(y-2) = 32 \end{cases}$

Ví dụ 1.3: Giải và biện luận hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6 \end{cases}$

Phân tích: Cũng tương tự như đối với giải và biện luận phương trình bậc nhất một ẩn, ta sẽ dùng các quy tắc cộng đại số hoặc đặt ẩn phụ để tạo ra một phương trình bậc nhất một ẩn với tham số rồi biện luận số nghiệm của hệ theo số nghiệm của phương trình này.

Ta có thể xem xét trước lời giải của ví dụ này

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx - 2m \\ 4x - m(mx - 2m) = m + 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = mx - 2m \\ (4 - m^2)x = -2m^2 + m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx - 2m \\ (4 - m^2)x = (2-m)(2m+3) \quad (1) \end{cases}$

+) Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$ thì từ (1) ta được:

$$x = \frac{(2-m)(2m+3)}{(4-m^2)} = \frac{(2-m)(2m+3)}{(2-m)(2+m)} = \frac{2m+3}{m+2}$$

$$\Rightarrow y = mx - 2m = m.\frac{2m+3}{m+2} - 2m = \frac{-m}{m+2}$$

Khi đó hệ có nghiệm duy nhất : $(x;y)=\left(\frac{2m+3}{m+2};\frac{-m}{m+2}\right)$

+) Nếu $m=2$ thì ta thấy (1) thỏa mãn với mọi x , khi đó $y=mx-2m=2x-4$

Hệ có vô số nghiệm $(x;y)=(k;2k-4)$ với mọi $k\in R$

+) Nếu $m=-2$, phương trình (1) trở thành: $0x=4$ vô nghiệm. Suy ra hệ vô nghiệm

Vậy:

_ Nếu $m\neq\pm 2$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{2m+3}{m+2};\frac{-m}{m+2}\right)$

_ Nếu $m=2$ thì hệ có vô số nghiệm $(x;y)=(k;2k-4)$ với mọi $k\in R$

_ Nếu $m=-2$ thì hệ vô nghiệm.

Nhận xét:

Từ lời giải trên, ta có thể rút ra được phương pháp giải và biện luận tổng quát của hệ phương trình bậc nhất chứa tham số như sau:

- Từ một phương trình của hệ, tìm y theo x (hoặc x theo y) rồi thế vào phương trình còn lại để được một phương trình bậc nhất chứa tham số đối với ẩn x (hoặc y)
- Giả sử phương trình bậc nhất đó có dạng: $ax=b \quad (1)$
- Biện luận hệ phương trình dựa trên việc biện luận phương trình $ax=b$

_ Nếu $a=0,b=0$ thì hệ có vô số nghiệm.

_ Nếu $a=0,b\neq 0$ thì hệ vô nghiệm.

_ Nếu $a\neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất với $x=\frac{b}{a}$ và y tính được từ phương trình còn lại.

Một số bài toán tương tự để bạn đọc tự tìm lời giải:

Bài toán: Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} mx+y=3m-1 \\ x+my=m+1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} (m-1)x-my=3m-1 \\ 2x-y=m+5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+my=3m \\ mx-y=m^2-2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-y=3+2m \\ mx+y=(m+1)^2 \end{cases}$

Ví dụ 1.4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y=5 \\ mx+y=4 \end{cases}$

a) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất mà x và y trái dấu

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất mà $x=|y|$

Phân tích: Đây là dạng toán giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có chứa tham số. Đối với dạng toán này, ta vẫn dùng các quy tắc đã được nêu ra bên trên để tạo ra một phương trình bậc nhất một ẩn mới có chứa tham số. Từ đó ta xem xét tham số sao cho thỏa mãn điều kiện đề bài. Chú ý rằng ở cả hai phần, ta đều cần tìm điều kiện để hệ phương trình có nghiệm duy nhất nên ta có thể gộp chúng lại để tìm điều kiện này ngay đầu bài giúp rút gọn bài làm.

Ở đây ta sẽ áp dụng quy tắc thế để giải bài toán này

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} x+2y=5 \\ mx+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ m(5-2y)+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ 5m-2my+y=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ (-2m+1)y=4-5m \end{cases}$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì phương trình:

$(-2m+1)y=4-5m$ phải có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow -2m+1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \frac{1}{2}$

Khi đó, hệ phương trình sẽ tương đương với:

$\begin{cases} x=5-2y \\ y=\frac{4-5m}{1-2m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2.\frac{4-5m}{1-2m} \\ y=\frac{4-5m}{1-2m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2m-1} \\ y=\frac{4-5m}{1-2m} \end{cases}$

a) Ta có: x và y trái dấu $\Leftrightarrow x.y<0 \Leftrightarrow \frac{3}{2m-1}.\frac{4-5m}{1-2m}<0 \Leftrightarrow \frac{3(5m-4)}{(2m-1)^2}<0 \quad (1)$

Với $m\neq \frac{1}{2}$ thì $(2m-1)^2>0$. Do đó $(1) \Leftrightarrow 3(5m-4)<0 \Leftrightarrow 5m-4<0 \Leftrightarrow m<\frac{4}{5}$

Vậy điều kiện cần tìm là $m<\frac{4}{5}$ và $m\neq \frac{1}{2}$

b) Ta có: $x=|y| \Leftrightarrow \frac{3}{2m-1}=\left|\frac{4-5m}{1-2m}\right| \quad (2)$

Do vế phải của (2) không âm nên ta được $\frac{3}{2m-1}\geq 0 \Leftrightarrow 2m-1>0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$

Với $m>\frac{1}{2}$ ta có: $(5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3}{2m-1}=\frac{4-5m}{1-2m} \\ \frac{3}{2m-1}=\frac{5m-4}{1-2m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3=5m-4 \\ 3=4-5m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{7}{5} \\ m=\frac{1}{5} \end{array}\right.$

Do $m>\frac{1}{2}$ nên chỉ có $m=\frac{7}{5}$ thỏa mãn điều kiện

Vậy giá trị cần tìm là $m=\frac{7}{5}$

Nhận xét: Phương pháp thế thường sẽ được áp dụng dễ dàng hơn.

Một điều cần chú ý nữa ở bài toán này đó là việc biến đổi tương đương phương trình sau:

$$x = |y| \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right. \end{cases}$$

Rất nhiều bạn quên mất điều kiện $x \geq 0$ khi gặp phương trình này, từ đó ra sai kết quả bài toán.

Một số bài toán tương tự cho các bạn tự tìm lời giải:

Bài 1: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x - y = 1 \end{cases}$

Tìm số nguyên m sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất mà x và y đều là số nguyên.

Bài 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y = 3 - m \\ 2x + y = 3(m+2) \end{cases}$

Tìm nghiệm (x;y) của hệ phương trình. Từ đó tìm giá trị của tham số m để biểu thức $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 1.5: Tìm k để ba đường thẳng: $3x + 2y = 4; 2x - y = k$ và $x + 2y = 3$ đồng quy.

Phân tích: Ta thấy ba đường thẳng đồng quy khi chúng cùng đi qua một điểm duy nhất. Ở đây ta đã biết rõ được phương trình đường thẳng của hai đường do đó ta có thể tìm được giao điểm của chúng. Để ba đường thẳng đồng quy thì chắc chắn đường thẳng còn lại cũng phải đi qua điểm này. Với ý tưởng này, ta hoàn toàn có thể tìm ra giá trị của k thỏa mãn.

Lời giải:

Gọi $M(m;n)$ là giao điểm của hai đường thẳng $3x + 2y = 4$ và $x + 2y = 3$

Ta được: $\begin{cases} 3m + 2n = 4 \\ m + 2n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 2n - (m + 2n) = 4 - 3 \\ m + 2n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 1 \\ m + 2n = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{2} \\ 2n + \dfrac{1}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{2} \\ n = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Suy ra $M\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{4}\right)$

Để 3 đường thẳng đồng quy thì đường thẳng $2x - y = k$ phải đi qua điểm $M\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{4}\right)$, hay ta có:

$$2.\frac{1}{2} - \frac{5}{4} = m \Leftrightarrow m = \frac{-1}{4}$$

Vậy $m = \dfrac{-1}{4}$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nhận xét: Ta có một số bài toán tương tự như sau:

Bài toán: Tìm m để ba đường thẳng sau đồng quy:

a) $2x-y=m; x-y=2m;$ $\quad$ $\text{mx}-(m-1)y=2m-1$

b) $mx+y=m^2+1;$ $\quad$ $(m+2)x-(3m+5)y=m-5;$

$(2-m)x-2y=-m^2+2m-2$

Gợi ý: Với các bài toán này, ta sẽ chọn ra trước hai phương trình đơn giản hơn để tìm giao điểm của chúng. Có thể giao điểm này sẽ chứa tham số m, tuy nhiên sau khi tìm được giao điểm rồi thì ta hoàn toàn có thể thay vào đường thẳng còn lại để giải phương trình chỉ chứa m.

Ví dụ 1.6: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx+4y=10-m \\ x+my=4 \end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $m=\sqrt{2}$

b) Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

c) Xác định các giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) sao cho $x>0; y>0$

d) Với giá trị nguyên nào của m thì hệ có nghiệm (x;y) với x,y là các số nguyên dương.

Phân tích: Đây là một bài toán tổng hợp các kiến thức đã được nêu bên trên. Ta sẽ vận dụng những kiến thức đã biết vào từng phần để giải bài toán này

Lời giải:

a) Với $m=\sqrt{2}$ ta được hệ :

$$\begin{cases} \sqrt{2}x+4y=10-\sqrt{2} \\ x+\sqrt{2}y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x+4y=10-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x+2y=4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y-2y=10-\sqrt{2}-4\sqrt{2} \\ x+\sqrt{2}y=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y=10-5\sqrt{2} \\ x+\sqrt{2}y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{10-5\sqrt{2}}{2} \\ x+\dfrac{10\sqrt{2}-10}{2}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{10-5\sqrt{2}}{2} \\ x=9-5\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x;y)=\left(9-5\sqrt{2};\dfrac{10-5\sqrt{2}}{2}\right)$

b) Ta có :

$$\begin{cases} mx+4y=10-m \\ x+my=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(4-my)+4y=10-m \\ x=4-my \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-m^2)y=10-5m \quad (1) \\ x=4-my \end{cases}$$

+) Nếu $4-m^2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 2$ thì ta được:

$$(1) \Leftrightarrow y=\frac{10-5m}{4-m^2}=\frac{5(2-m)}{(2-m)(2+m)}=\frac{5}{m+2}$$

$$\Rightarrow x=4-my=4-\frac{5m}{m+2}=\frac{8-m}{m+2}$$

Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là $\left(x;y\right)=\left(\frac{8-m}{m+2};\frac{5}{m+2}\right)$

+) Nếu $m=2$, thay vào (1) ta được: $0.y=0$ có vô số nghiệm thực y thỏa mãn

$\Rightarrow x=4-my=4-2y$

Khi đó hệ có vô số nghiệm $\left(x;y\right)=\left(4-2k;k\right)$ với mọi $k\in R$

+) Nếu $m=-2$, thay vào (1) ta được: $0.y=20$, phương trình vô nghiệm

$\Rightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm

Vậy:

_ Nếu $m\neq\pm2$ thì hệ có nghiệm duy nhất là $\left(x;y\right)=\left(\frac{8-m}{m+2};\frac{5}{m+2}\right)$

_ Nếu $m=2$ thì hệ có vô số nghiệm $\left(x;y\right)=\left(4-2k;k\right)$ với mọi $k\in R$

_ Nếu $m=-2$ thì hệ vô nghiệm

c) Do hệ có nghiệm duy nhất nên $m\neq\pm2$

Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là $\left(x;y\right)=\left(\frac{8-m}{m+2};\frac{5}{m+2}\right)$

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{8-m}{m+2}>0\\\frac{5}{m+2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8-m>0\\m+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<8\\m>-2\end{cases}\Leftrightarrow-2<m<8$$

Mà m là số nguyên khác ±2 nên ta được các giá trị thỏa mãn của m là:

-1; 0; 1; 3; 4; 5; 6; 7

Vậy $m\in\left\{-1;0;1;3;4;5;6;7\right\}$

d) Nếu $m=-2$ thì hệ vô số nghiệm, không thỏa mãn đề bài

Nếu $m=2$ thì hệ có vô số nghiệm $\left(x;y\right)=\left(4-2k;k\right)$ với mọi $k\in\mathbb{R}$, nên tồn tại nghiệm không nguyên, do đó không thỏa mãn đề bài.

Vậy $m\neq\pm2$, khi đó hệ có nghiệm duy nhất là $\left(x;y\right)=\left(\frac{8-m}{m+2};\frac{5}{m+2}\right)$

Ta có: y nguyên dương $\Leftrightarrow m+2$ là ước nguyên dương của 5

$\Leftrightarrow m+2\in\left\{1;5\right\}\Leftrightarrow m\in\left\{-1;3\right\}$

Với $m=-1\Rightarrow x=9$ thỏa mãn

Với $m=3\Rightarrow x=1$ thỏa mãn

Vậy tập các giá trị nguyên của m thỏa mãn là: $\left\{-1;3\right\}$

Nhận xét: Ta có một số bài toán tổng hợp tương tự khác:

Bài 1: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(m-1)x-my=3m-1\\2x-y=m+5\end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình theo m

b) Với giá trị nguyên nào của m thì hai đường thẳng của hệ cắt nhau tại một điểm nằm trong góc phần tư thứ IV của hệ tọa độ Oxy.

c) Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) sao cho $P=x^2+y^2-5$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x+my=9\\mx-3y=4\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m=3$

b) Với giá trị nào của m để hệ có nghiệm $(-1;3)$

c) Chứng tỏ rằng hệ phương trình luôn luôn có nghiệm duy nhất với mọi m

d) Với giá trị nào của m để hệ có nghiệm (x;y) thỏa mãn hệ thức:

$$x-3y=\frac{28}{m^2+3}-3$$

II. Giải một số hệ phương trình quy về hệ bậc nhất:

1. Phương trình đặt ẩn phụ

Một số hệ phương trình thoạt nhìn thì ta có vẻ thấy nó phức tạp, nhưng khi ta đã nhìn thấy điểm giống nhau giữa các phương trình trong hệ thì ta có thể đặt ẩn phụ để có thể đưa hệ phương trình về dạng dễ dàng hơn. Ta có một số ví dụ sau:

Ví dụ 2.1.1: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}\dfrac{15}{x}-\dfrac{7}{y}=9\\\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}=35\end{cases}$

b) $\begin{cases}\dfrac{3}{x+y}+\dfrac{2}{y-x}=8\\\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{3}{x-y}=-1\end{cases}$

Phân tích: Đối với phần a, ta nhận thấy rằng các ẩn số đã bị đưa xuống dưới mẫu và không còn là hệ bậc nhất đơn thuần nữa. Tuy nhiên cả hai phương trình thì ta đều nhận thấy rằng các ẩn số đều ở chung một dạng là $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$, do đó ta có thể đưa hệ về dạng bậc hai ẩn bằng cách đặt ẩn phụ: $u=\frac{1}{x};v=\frac{1}{y}$. Khi đó hệ tương đương với: $\begin{cases}15u-7v=9\\4u+9v=35\end{cases}$

Từ đây ta có thể dễ dàng giải hệ bằng các quy tắc đã biết.

Đối với phần b, ta cũng nhận thấy có sự tương đồng với phần a, nhưng lại có sự khác nhau giữa $\dfrac{1}{y-x}$ và $\dfrac{1}{x-y}$ nên có thể khiến ta hơi bối rối ban đầu. Thật ra hai phân thức này là đối của nhau nên ta hoàn toàn có thể đặt ẩn phụ tương tự như phần a với $u=\dfrac{1}{x+y};v=\dfrac{1}{y-x}$ và được hệ tương đương:

$$\begin{cases}3u+2v=8\\u-3v=-1\end{cases}$$

Sau đây là lời giải chi tiết của hai phần

Lời giải:

a) Điều kiện xác định: $x\neq 0; y\neq 0$

Đặt $u=\dfrac{1}{x};v=\dfrac{1}{y}$, ta có hệ tương đương:

$$\begin{cases}15u-7v=9\\4u+9v=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}60u-28v=36\\60u+135v=525\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}135v+28v=525-36\\4u+9v=35\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}163v=489\\4u+9v=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=3\\4u+27=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=3\\u=2\end{cases}$$

Trả lại biến x, y ta được : $\begin{cases}\dfrac{1}{y}=3\\\dfrac{1}{x}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{3}\\x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$(thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$

b) Điều kiện xác định : $x\neq y; x\neq -y$

Đặt $u=\dfrac{1}{x+y};v=\dfrac{1}{y-x}\Rightarrow\dfrac{3}{x-y}=-3v$, khi đó ta có hệ tương đương:

$$\begin{cases}3u+2v=8\\u-3v=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(3v-1)+2v=8\\u=3v-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11v=11\\u=3v-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=1\\u=3.1-1=2\end{cases}$$

Trả lại biến x, y ta được:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{y-x}=1\\\dfrac{1}{x+y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-x=1\\x+y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+1\\x+x+1=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+1\\2x=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-1}{4} + 1 = \dfrac{3}{4} \\ x = \dfrac{-1}{4} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ có nghiệm là: $(x; y) = \left(\dfrac{-1}{4}; \dfrac{3}{4}\right)$

Nhận xét:

Phương pháp này thường sẽ dễ dàng nhìn ra và đặt ẩn phụ. Tuy nhiên điều đầu tiên ta cần làm đối với giải hệ phương trình luôn luôn là tìm điều kiện xác định của các biến. Đây là điều mà rất nhiều bạn quên, làm cho mình mất điểm một cách đáng tiếc.

Khi đặt ẩn phụ, các bạn cũng nên chú ý đến các điều kiện của ẩn phụ này.

Ta có thể thấy rõ hơn qua ví dụ sau:

Ví dụ 2.1.2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\left(x^2 - 2x\right) + \sqrt{y+1} = 0 \\ 3\left(x^2 - 2x\right) - 2\sqrt{y+1} + 7 = 0 \end{cases}$

Phân tích: Ta có thể dễ dàng nhận ra phương pháp đặt ẩn phụ đối với bài toán này. Tuy nhiên khi đặt ẩn phụ, ta có một chú ý là $v = \sqrt{y+1}$ thì ta được $v \geq 0$. Đây chính là điều kiện của ẩn phụ mà ta nên thêm vào khi giải để có một lời giải hoàn chỉnh.

Lời giải:

Điều kiện xác định: $y \geq -1$

Đặt $u = x^2 - 2x; v = \sqrt{y+1} \Rightarrow v \geq 0$

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2u + v = 0 \\ 3u - 2v + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -2u \\ 3u - 2(-2u) + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -2u \\ 7u = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 \\ u = -1 \end{cases} \text{(thỏa mãn)}$$

Trả lại biến ta được:

$$\begin{cases} x^2 - 2x = -1 \\ \sqrt{y+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x; y) = (1; 3)$

Nhận xét:

Phương pháp đặt ẩn phụ này còn áp dụng cho các phương trình bậc cao hơn, chúng ta chỉ cần để ý đến những biểu thức giống nhau ở cả hai phương trình rồi từ đó đặt ra ẩn phụ để đưa hệ về dạng đơn giản hơn.

Ví dụ 2.1.3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=xy+\dfrac{1}{xy} \end{cases}$

Phân tích: Nhìn vào hệ trên, ta thấy rằng phương trình thứ 2 có $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)$, từ đó ta ghép phương trình đầu thành $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{9}{2}$, từ đó , ta thấy rằng $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=xy+\dfrac{1}{xy}+2$ nên ta có thể biểu diễn vế phải của phương trình thứ hai theo $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)$ và $\left(y+\dfrac{1}{x}\right)$. Từ đó ta nghĩ đến cách đặt $a=x+\dfrac{1}{y}$ và $b=y+\dfrac{1}{x}$

Ta được lời giải như sau:

Lời giải:

Đặt $a=x+\dfrac{1}{y}$ và $b=y+\dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow ab=\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=xy+\dfrac{1}{xy}+2 \Rightarrow xy+\dfrac{1}{xy}=ab-2$

Khi đó thay vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}a=ab-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b=9 \\ -4ab+6a+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=9-2a \\ -2a(9-2a)+6a+9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b=9-2a \\ 4a^2-12a+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=9-2a \\ (2a-3)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=3 \end{cases}$$

Trả về biến x, y ta được:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \\ y+\dfrac{1}{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-\dfrac{3}{2}y+1=0 \\ xy-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(xy-\dfrac{3}{2}y+1\right)-(xy-3x+1)=0 \\ xy-3x+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3}{2}y+3x=0 \\ xy-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ 2x^2-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ 2x^2-2x-x+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ (x-1)(2x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Thử lại ta thấy bộ số (1; 2) và $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ thỏa mãn hệ phương trình

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $(x;y) \in \left\{(1;2);\left(\dfrac{1}{2};1\right)\right\}$

Nhận xét: Nhiều khi ta không thể thấy ngay được ẩn phụ cần đặt từ bài toán, mà ta cần phải tinh ý biến đổi nó đi. Qua bài toán này, ta cũng cần chú ý đến các đẳng thức:

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right) = xy + \frac{1}{xy} + 2$$

để có thể áp dụng vào các bài toán sau này.

Ta có một số bài toán cũng sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ:

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{x}{y} = 3 \\ x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases}$

2. Phương pháp thế

Ý tưởng khi áp dụng phương pháp này đối với các hệ phương trình tổng quát cũng vẫn giống như đối với hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:

_ Lấy phương trình này rút y theo x (hoặc rút x theo y) rồi thế vào phương trình kia.

_ Sau khi thế ta sẽ được một phương trình một ẩn số. Áp dụng các phương pháp đã biết để giải phương trình này, từ đó kết luận nghiệm của hệ.

Ví dụ 2.2.1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + 2y^2 = 5 \\ 3x^2 - 5y^2 + 2x = 28 \end{cases}$

Phân tích: Ta có thể thấy biến y ở cả hai phương trình đều chỉ ở dạng bình phương, do đó ta có thể tính y^2 theo x ở phương trình đầu: $y^2 = \dfrac{5-x}{2}$ rồi sau đó thay vào phương trình sau để giải phương trình bậc hai tìm ra nghiệm x, và trở lại tìm nghiệm y.

Chú ý rằng $y^2 = 5 - x \geq 0$ để có thể loại nghiệm của phương trình ẩn x thu được.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{cases} x+2y^2=5 \\ 3x^2-5y^2+2x=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\dfrac{5-x}{2} \\ 3x^2-5.\dfrac{5-x}{2}+2x=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\dfrac{5-x}{2} \quad (1) \\ 6x^2+9x-81=0 \quad (2) \end{cases}$$

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 2x^2+3x-27=0 \Leftrightarrow (2x^2-6x)+(9x-27)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x+9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{-9}{2} \end{array}\right.$$

Nếu $x=3 \Rightarrow y^2=\dfrac{5-3}{2}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$

Nếu $x=\dfrac{-9}{2} \Rightarrow y^2=\dfrac{5+\dfrac{9}{2}}{2}=\dfrac{19}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\sqrt{19}}{2} \\ y=\dfrac{-\sqrt{19}}{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là:

$$S=\left\{(3;1),(3;-1),\left(\frac{-9}{2};\frac{\sqrt{19}}{2}\right),\left(\frac{-9}{2};\frac{-\sqrt{19}}{2}\right)\right\}$$

Nhận xét: Nếu như ta chỉ nhìn thấy phương trình đầu là phương trình bậc nhất đối với ẩn x, và từ đó rút x ra theo y để thay vào phương trình sau, thì ta vẫn có thể giải được phương trình mới thu được, nhưng đó là một phương trình trùng phương bậc bốn dài dòng, không thể ngắn gọn như cách trên.

Thật vậy, phương pháp này là phương pháp dễ nhất để đưa một hệ phương trình hai ẩn về việc giải một phương trình một ẩn, và có thể nói rằng phương pháp này áp dụng được cho rất nhiều bài toán. Có ưu điểm như vậy, nhưng nhược điểm của nó là giải phương trình một ẩn mới thu được cũng không hề dễ dàng.

Ví dụ 2.2.2: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2=3x-y \\ y^2=3y-x \end{cases}$

Phân tích: Ta thấy rằng từ phương trình thứ nhất, ta hoàn toàn có thể tính được y theo x, từ đó thay vào phương trình thứ hai để được phương trình bậc 4 một ẩn x. Việc còn lại của ta chỉ là giải phương trình này, khi biết một nghiệm dễ nhìn ra là $(x;y)=(0;0)$

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} x^2=3x-y \\ y^2=3y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-x^2 \quad (1) \\ (3x-x^2)^2-3(3x-x^2)+x=0 \quad (2) \end{cases}$

Từ (2) ta được : $9x^2-6x^3+x^4-9x+3x^2+x=0 \Leftrightarrow x^4-6x^3+12x^2-8x=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^3-6x^2+12x-8\right)=0 \Leftrightarrow x\left(x-2\right)^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

+ Với $x=0$ ta được: $y=3.0-0^2=0$

+ Với $x=2$ ta được: $y=3.2-2^2=2$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là: $S=\left\{\left(0;0\right);\left(2;2\right)\right\}$

Nhận xét: Như ta thấy, hướng đi và hướng suy nghĩ của phương pháp này rất đơn giản. Phần khó nhất chỉ nằm ở việc giải phương trình bậc nhất thu được. Hệ phương trình trên còn thuộc loại hệ phương trình đối xứng loại II mà ta sẽ biết cách giải tổng quát hơn ở phần sau.

3. Hệ phương trình đối xứng loại I

Hệ phương trình đối xứng loại một là hệ phương trình gồm hai phương trình 2 ẩn x, y mà vai trò của x, y trong mỗi phương trình là như nhau, hay nói cách khác, khi hoán đổi vị trí x, y cho nhau thì cả hai phương trình đều vẫn được chính nó.

Ví dụ: $\begin{cases} a\left(x+y\right)+bxy=c \\ x^2+y^2=d \end{cases}$

Cách giải:

+ Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$

+ Biến đổi hệ đã cho về hệ theo S và P bằng các phép biến đổi phương trình đối xứng.

+ Giải hệ và tìm S, P.

+ Áp dụng định lí Viet đảo ta được x, y là hai nghiệm của phương trình:

$X^2-SX+P=0$ với điều kiện $\Delta=S^2-4P\geq 0$

Một số phép biến đổi phương trình đối xứng về phương trình của S và P:

- $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$
- $\left(x_1-x_2\right)^2=\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2$
- $x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)$
- $x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2x_2^2=\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]^2-2\left(x_1x_2\right)^2$
- $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$
- $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$
- $\left(x_1-a\right)\left(x_2-a\right)=x_1x_2-a\left(x_1+x_2\right)+a^2$

- $\dfrac{1}{x_1-a}+\dfrac{1}{x_2-a}=\dfrac{x_1+x_2-2a}{(x_1-a)(x_2-a)}=\dfrac{x_1+x_2-2a}{x_1x_2-a(x_1+x_2)+a^2}$

Ví dụ 2.3.1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+2x+2y=6\\x+y+xy=3\end{cases}$

Phân tích: Hai phương trình trong hệ đều bao gồm các biểu thức đối xứng, nên ta có thể dễ dàng đưa về hệ phương trình với biến mới là $S=x+y$ và $P=xy$ từ đó tìm nghiệm S, P và áp dụng định lí Viet để tìm nghiệm x, y ban đầu.

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases}x^2+y^2+2x+2y=6\\x+y+xy=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy+2(x+y)=6\\(x+y)+xy=3\end{cases}$

Đặt $S=x+y,P=xy$, ta thu được hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases}S^2-2P+2S=6\\S+P=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S^2-2(3-S)+2S=6\\P=3-S\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}S^2+4S-12=0\\P=3-S\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(S-2)(S+6)=0\\P=3-S\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}S=2\\P=1\end{cases}\\\begin{cases}S=-6\\P=9\end{cases}\end{array}\right.$$

Nếu $S=2$ và $P=1$ thì x,y là nghiệm của phương trình:

$$t^2-2t+1=0\Leftrightarrow(t+1)^2=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$$

Nếu $S=-6$ và $P=9$ thì x,y là nghiệm của phương trình:

$$t^2+6t+9=0\Leftrightarrow(t+3)^2=0\Leftrightarrow t=-3\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-3\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)\in\{(1;1),(-3;-3)\}$

Ví dụ 2.3.2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{x^2}+y^2+\dfrac{1}{y^2}=9\\x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5\end{cases}$

Phân tích: Ta vẫn có thể dễ dàng nhìn ra được hệ phương trình này là hệ phương trình đối xứng loại I, do đó vẫn với lối suy nghĩ thông thường, ta sẽ đưa hệ về hệ của S và P.

Chú ý biến đổi: $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\dfrac{S^2-2P}{P^2}$

Tuy nhiên, nếu ta cứ áp dụng luôn, ta sẽ dẫn đến một hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+y)^2-2xy+\dfrac{(x+y)^2-2xy}{x^2y^2}=9\\ x+y+\dfrac{x+y}{xy}=5\end{cases}$$

Kể cả khi chuyển qua S và P thì nó vẫn khá khó khăn để làm tiếp. Do đó ta cần xem xét bài toán sâu hơn.

Để ý rằng với rất nhiều bài, khi xuất hiện biểu thức $x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}$ thì ta có một cách đặt ẩn phụ giúp làm đơn giản bài toán là: $a=x+\dfrac{1}{x};b=y+\dfrac{1}{y}$. Khi đó, ta hoàn toàn có thể tính được:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2;y^2+\frac{1}{y^2}=b^2-2$$

Hệ của ta đã hoàn toàn trở thành hệ của a và b. Bài toán trở nên đơn giản hơn rất nhiều.

Lời giải:

Điều kiện xác định : $\begin{cases}x\neq 0\\ y\neq 0\end{cases}$

Đặt: $\begin{cases}a=x+\dfrac{1}{x}\\ b=y+\dfrac{1}{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2-2=x^2+\dfrac{1}{x^2}\\ b^2-2=y^2+\dfrac{1}{y^2}\end{cases}$

Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases}a^2-2+b^2-2=9\\ a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=13\\ a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2-2ab=13\\ a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5^2-2ab=13\\ a+b=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\ ab=\dfrac{5^2-13}{2}=6\end{cases}$$

Áp dụng định lí Viet đảo ta được a, b là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=3\end{array}\right.$$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}a=2;b=3\\ a=3;b=2\end{array}\right.$

+ Với $a=2;b=3$, trả lại biến ta được:

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}=2\\ y+\dfrac{1}{y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1=0\\ y^2-3y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

+ Với $a=3;b=2$, ta được: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=3 \\ y+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1=0 \\ y^2-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ y=1 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là:

$$(x;y)\in\left\{\left(1;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right);\left(1;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};1\right);\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};1\right)\right\}$$

Nhận xét: Đối với cách đặt này, ta có một chú ý là $|a|\ge 2$ và $|b|\ge 2$.Thật vậy:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\ge 4\Rightarrow |a|=\left|x+\frac{1}{x}\right|\ge 2$$

Điều này có thể áp dụng vào việc giảm bớt các trường hợp nghiệm cần xét khi làm bài.

Ví dụ 2.3.3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)^2+6(x-1)y+4y^2=20 \quad (1) \\ x^2+(2y+1)^2=2 \quad (2) \end{cases}$

Phân tích: Thoạt nhìn qua, ta thấy đây là một hệ phương trình không có gì đặc biệt cả. Tuy nhiên nếu ta để ý đến việc $2y+1$ được đặt trong ngoặc ở phương trình (2), ta sẽ thử đặt $t=2y+1$ để đưa phương trình (2) về dạng đối xứng. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$(x-1)^2+6(x-1)\left(\frac{t-1}{2}\right)+(t-1)^2=20\Leftrightarrow (x-1)^2+3(x-1)(t-1)+(t-1)^2=20$$

và may mắn là ta lại được phương trình đối xứng tiếp. Và từ đây ta đã có thể áp dụng phương pháp tổng quát để giải hệ phương trình đối xứng loại 1 này.

Lời giải:

Đặt $t=2y+1\Rightarrow y=\dfrac{t-1}{2}$ ta được hệ phương trình ban đầu tương đương với:

$$\begin{cases} (x-1)^2+3(x-1)(t-1)+(t-1)^2=20 \\ x^2+t^2=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-2x+1+3xt-3(x+t)+3+t^2-2t+1=20 \\ x^2+t^2=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+t^2+3xt-5(x+t)-15=0 \\ x^2+t^2=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2+3xt-5(x+t)-15=0 \\ (x+t)^2-2xt=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 3xt-5(x+t)-13=0 \\ (x+t)^2-2xt=2 \end{cases}$$

Đặt $S=x+t$ và $P=xt$ ta được:

$$\begin{cases} 3P - 5S - 13 = 0 \\ S^2 - 2P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{5S+13}{3} \\ S^2 - 2.\dfrac{5S+13}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{5S+13}{3} \\ 3S^2 - 10S - 32 = 0 \end{cases}$$

Ta có :

$$3S^2 - 10S - 32 = 0 \Leftrightarrow \left(3S^2 + 6S\right) - \left(16S + 32\right) = 0 \Leftrightarrow \left(S+2\right)\left(3S - 16\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = -2 \\ S = \dfrac{16}{3} \end{array}\right.$$

+) Nếu $S = -2 \Rightarrow P = \dfrac{5.\left(-2\right)+13}{3} = 1$

Áp dụng định lí Viet, ta được x, t là nghiệm của phương trình:

$$X^2 + 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(X+1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow X = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{-1-1}{2} = -1 \end{cases}$$

+) Nếu $S = \dfrac{16}{3} \Rightarrow P = \dfrac{5.\dfrac{16}{3} + 13}{3} = \dfrac{119}{9}$

Tuy nhiên ta có: $S^2 - 4P = \left(x+t\right)^2 - 4xt = \left(x-t\right)^2 \geq 0$

Mà $\left(\dfrac{16}{3}\right)^2 - 4.\dfrac{119}{9} = \dfrac{-220}{9} < 0$ nên trường hợp này vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(-1;-1\right)$

Nhận xét: Đối với phương pháp này, sau khi đặt ẩn phụ S, P, ta cần nhớ đến bất đẳng thức $S^2 - 4P \geq 0$, nhờ đó ta có thể loại bớt trường hợp sau khi đã tìm ra được các nghiệm S, P của hệ phương trình.

Ta có một số bài toán tương tự:

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 19 \\ x^2 + y^2 + xy = 133 \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+2} = 2 \\ x^2 + x + xy + y^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases}$

Ví dụ 2.3.4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + xy + y = m+1 \\ x^2y + y^2x = m \end{cases}$

a) Giải hệ khi $m = 2$

b) Tìm m để hệ có ít nhất một nghiệm (x;y) dương.

Phân tích: Ta có thể nhìn ngay ra đây là một hệ phương trình đối xứng loại I. Do đó ta vẫn nghĩ đến việc đặt ẩn phụ như trường hợp tông quát. Và ta sẽ dễ dàng làm được phần a.

Đối với phần b, ta thấy rằng hệ có nghiệm (x;y) dương và ta đang có cặp số S, P nên nghĩ đến việc sử dụng hệ quả của định lí Viet để làm phần này. Thật vậy điều kiện để hệ có nghiệm (x;y) dương là $\begin{cases} S^2 - 4P \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

Sau khi giải hệ điều kiện kia theo tham số m thì ta sẽ được các giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} x + xy + y = m + 1 \\ x^2y + y^2x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = m + 1 \\ xy(x + y) = m \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, điều kiện: $S^2 - 4P \geq 0$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} S + P = m + 1 \\ SP = m \end{cases} (*)$

a) Khi $m = 2$ ta được : $\begin{cases} S + P = 3 \\ SP = 2 \end{cases}$. Suy ra S, P là hai nghiệm của phương trình:

$X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 1; P = 2 \\ S = 2; P = 1 \end{array} \right.$

+ Nếu $S = 1; P = 2$, ta thấy $S^2 - 4P = -7 < 0$ không thỏa mãn $\Rightarrow$ Loại.

+ Nếu $\begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}$. Trả lại biến ta được: $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$, suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1;1)$

b) Từ (*) ta được S, P là hai nghiệm của phương trình:

$x^2 - (m + 1)x + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = m \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 1; P = m \\ S = m; P = 1 \end{array} \right.$

+ Với $\begin{cases} S = 1 \\ P = m \end{cases}$, ta có: $S^2 - 4P = 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = m \end{cases} \Rightarrow x, y$ là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - x + m = 0$

Phương trình trên có nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4m \geq 0 \\ S = 1 > 0 \\ P = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{4} \quad (1)$

+ Với $\begin{cases} S = m \\ P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình: $x^2 - mx + 1 = 0$.

Phương trình trên có nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 \geq 0 \\ S = m > 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2 \quad (2)$

Kết hợp (1) và (2) ta được tập giá trị của m thỏa mãn là: $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [2; +\infty)$

Nhận xét: Bài toán trên không khó. Nó chỉ là sự kết hợp giữa hai bài toán khác nhau, giữa định lí Viet với hệ phương trình đối xứng. Nếu đã nắm rõ cả hai thì bài toán trên không hề là trở ngại với ta.

Một số bài toán dạng tương tự:

Bài 1: Tìm a để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = a \\ x + y - \sqrt{xy} = a \end{cases}$

Bài 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = m \end{cases}$

a) Giải hệ khi $m = 12$

b) Tìm m để hệ có nghiệm

Bài 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2a + 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$

Tìm a để hệ có nghiệm (x;y) thỏa mãn x.y nhỏ nhất.

4. Hệ phương trình đối xứng loại II

Hệ phương trình đối xứng loại hai là hệ phương trình 2 ẩn x, y mà trong đó hệ có hai phương trình đối xứng nhau, tức là nếu đổi chỗ x cho y thì hai phương trình trong hệ đổi chỗ cho nhau.

Ví dụ: $\begin{cases} ax^2 + by^2 + cx + dy = m \\ ay^2 + bx^2 + cy + dx = m \end{cases}$

Để ý rằng nếu ta cho $x = y$ thì hai phương trình của hệ trở thành như nhau, hay hệ phương trình đối xứng lọai hai luôn có một nghiệm $x = y$. Đây chính là đặc điểm mấu chốt của phương pháp giải hệ này.

Cách giải:

+ Trừ từng vế của 2 phương trình cho nhau. (Có thể chọn lấy phương trình đầu trừ phương trình sau, hoặc ngược lại, nên chọn sao cho đẳng thức mới thu được đẹp hơn)

+ Phân tích phương trình thu được thành nhân tử, chú ý rằng nó luôn có nhân tử $(x - y)$

+ Giải phương trình vừa được phân tích, rồi kết hợp với một trong hai phương trình ban đầu của hệ để tìm ra nghiệm cuối cùng.

Ví dụ 2.4.1: Giải phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2y = 4x + 3 \\ y^2 + 2x = 4y + 3 \end{cases}$

Phân tích: Ta thấy hệ phương trình trên hoàn toàn là hệ đối xứng loại II, nên ta sẽ áp dụng phương pháp tổng quát để giải.

Lời giải:

Trừ từng vế của hai phương trình cho nhau ta được:

$$x^2 - y^2 + 2(y-x) = 4(x-y) \Leftrightarrow (x-y)(x+y) - 6(x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x+y=6 \end{array}\right.$$

+) Nếu $x = y$, thay vào phương trình đầu ta được:

$$x^2 + 2x = 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x) - (3x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x = y = -1 \\ x = y = 3 \end{array}\right.$

+) Nếu $x + y = 6 \Leftrightarrow y = 6 - x$, thay vào phương trình đầu ta được:

$$x^2 + 2(6-x) = 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Suy ra $\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 - 3 = 3 \end{cases}$

Thử lại ta thấy các nghiệm trên thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $\{(-1;-1),(3;3)\}$

Nhận xét: Ta có thể viết lại lời giải trên bằng cách biến đổi tương đương dùng các kí hiệu của hệ phương trình như sau:

Ta có $\left[\begin{array}{l} x = y \\ x+y=6 \end{array}\right.$. Do đó hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ x^2 + 2x = 4x + 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 6 - x \\ x^2 + 2(6-x) = 4x + 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ (x+1)(x-3) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 6 - x \\ (x-3)^2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = -1 \\ x = y = 3 \end{array}\right. \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Từ đó ta cũng có được kết luận như đối với lời giải trên.

Lời giải này ít dùng từ ngữ hơn, và là phép biến đổi tương đương nên ta không cần phải kiểm tra lại nghiệm cuối cùng. Tuy nhiên nó chỉ có thể áp dụng cho các hệ phương trình đơn giản như ví dụ trên.

Ta có một số bài toán cơ bản tương tự:

Bài toán: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y^2 = 3y - x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y = \dfrac{4y}{x} \\ y - 3x = \dfrac{4x}{y} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2y = \dfrac{y^2+1}{x^2} \\ 2x = \dfrac{x^2+1}{y^2} \end{cases}$

Ví dụ 2.4.2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 \end{cases}$

Phân tích: Ta dễ dàng nhận ra được hệ phương trình này là hệ phương trình đối xứng loại II, tuy nhiên khi ta trừ từng vế của hai phương trình thì ta vẫn chưa thể thấy ngay được nhân tử $(x-y)$ xuất hiện ở đâu. Thật vậy, ta cần nhớ đến cách trục căn thức đối với phân thức chứa căn ở mẫu. Ở đây ta sẽ sử dụng việc nhân với liên hợp để tạo ra nhân tử $(x-y)$.

Ta có lời giải chi tiết như sau.

Lời giải:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \dfrac{-3}{2} \le x \le 4 \\ \dfrac{-3}{2} \le y \le 4 \end{cases}$

Lấy từng vế phương trình thứ nhất trừ phương trình thứ hai ta được:

$$\left(\sqrt{2x+3} - \sqrt{2y+3}\right) + \left(\sqrt{4-y} + \sqrt{4-x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{2x+3} - \sqrt{2y+3}\right)\left(\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}\right)}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}} + \frac{\left(\sqrt{4-y} - \sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{4-y} + \sqrt{4-x}\right)}{\sqrt{4-y} + \sqrt{4-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+3)-(2y+3)}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}} + \frac{(4-y)-(4-x)}{\sqrt{4-y} + \sqrt{4-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-2y}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}} + \frac{x-y}{\sqrt{4-y} + \sqrt{4-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{2}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}} + \frac{1}{\sqrt{4-y} + \sqrt{4-x}}\right) = 0 \quad (1)$$

Mà ta có $\dfrac{2}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4-y} + \sqrt{4-x}} > 0$ với mọi x, y thỏa mãn điều kiện xác định suy ra:

$(1) \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

Thay $x = y$ vào phương trình đầu ta được:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x} = 4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x}\right)^2 = 16$$

$\Leftrightarrow 2x+3+4-x+2\sqrt{(2x+3)(4-x)}=16 \Leftrightarrow x+7+2\sqrt{-2x^2+5x+12}=16$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2+5x+12}=9-x \Leftrightarrow \begin{cases} 9-x\geq 0 \\ 4\left(-2x^2+5x+12\right)=(9-x)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 9 \\ 9x^2-38x+33=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{11}{9} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là: $S=\left\{(3;3);\left(\dfrac{11}{9};\dfrac{11}{9}\right)\right\}$

Nhận xét: Đối với nhiều bài toán, việc phân tích ra nhân tử $(x-y)$ đầu tiên rất dễ dàng, nhưng việc giải phần nhân tử thừa ra còn lại mới khó khăn. Tuy nhiên mọi việc đều có hướng giải quyết của nó. Tất cả đều sẽ trở nên dễ dàng khi các bạn thuần phục các phương pháp làm bài.

Sau đây là một số bài toán áp dụng:

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} 4x-y=3(1) \\ x-3y=-2(2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có: $y=4x-3$

Thay $y=4x-3$ vào phương trình (2) ta có:

$x-3.(4x-3)=5 \Leftrightarrow x-12x+9=-2 \Leftrightarrow -11x=-11 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$

Vậy (1;1) là nghiệm của hệ phương trình

b. $\begin{cases} x-2y=4(1) \\ 4x+3y=5(2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có: $x=4+2y$

Thay $x=4+2y$ vào phương trình (2) ta có:

$4.(4+2y)+3y=5 \Leftrightarrow 16+8y+3y=5 \Leftrightarrow 11y=11 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=6$

Vậy (1;6) là nghiệm của hệ phương trình.

c. $\begin{cases} 2x-5y=5 \\ 3x+2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5+5y}{2} \\ 3.\dfrac{5+5y}{2}+2y=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5+5y}{2} \\ 15+15y+4y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5+5y}{2} \\ 19y=-19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5+5y}{2} \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy (0;-1) là nghiệm của hệ phương trình.

d. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{3}\\ x+y-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x\\ x+y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x\\ 4x=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x\\ x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=6\end{cases}$

Vậy (2;6) là nghiệm của hệ phương trình.

e. $\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{4}y=\dfrac{19}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}x=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}y\\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{4}y=\dfrac{19}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4-2y}{3}\\ \dfrac{2}{3}.\dfrac{4-2y}{3}-\dfrac{1}{4}y=\dfrac{19}{12}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4-2y}{3}\\ \dfrac{8-4y}{9}-\dfrac{1}{4}y=\dfrac{19}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4-2y}{3}\\ \dfrac{32-16y}{36}-\dfrac{9y}{36}=\dfrac{19}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4-2y}{3}\\ 32-25y=57\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4-2y}{3}\\ 25y=-25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4-2y}{3}\\ y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$

Vậy (2;-1) là nghiệm của hệ phương trình.

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases}x-2y=3\\ 3x+2y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+3x+2y=8\\ x-2y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=8\\ x-2y=3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ 2-2y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Vậy $\left(2;-\dfrac{1}{2}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình.

b. $\begin{cases}5x-2y=6\\ 5x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+y-(5x-2y)=-3\\ 5x+y=3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3y=-3\\ 5x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ 5x+-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ x=\dfrac{4}{5}\end{cases}$

Vậy $\left(\dfrac{4}{5};-1\right)$ là nghiệm của hệ phương trình.

c. $\begin{cases}3x-2y=4\\ 2x+y=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=4\\ 4x+2y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=7\\ 4x+2y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 4.1+2y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Vậy $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình.

d. $\begin{cases}0,1x+0,2y=0,3\\3x+2y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\3x+2y=5\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y-(x+2y)=2\\x+2y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=2\\x+2y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Vậy (1;1) là nghiệm của hệ phương trình

e. $\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}y=\dfrac{7}{4}\\2x-5y=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=7\\2x-5y=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y-(2x-5y)=7-(-9)\\2x+3y=7\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}8y=16\\2x+3y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\2x+3.2=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Vậy $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Bài 3: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases}(3x+2)(2y-2)=6xy\\(4x+5)(y-1)=4xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6xy-6x+4y-4=6xy\\4xy-4x+5y-5=4xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-4y=-4\\4x-5y=-5\end{cases}$

Giải phương trình bằng phương pháp thế, ta được: $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

Vậy (0;1) là nghiệm của hệ phương trình.

b. $\begin{cases}2(x+y)+(x-y)=3\\x+y+4(x-y)=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y+x-y=3\\x+y+4x-4y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+y=3\\5x-3y=5\end{cases}$

Giải phương trình bằng phương pháp thế, ta được: $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

Vậy (1;0) là nghiệm của hệ phương trình.

c. $\begin{cases}x^2-4x+3=0\\3x-2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.\\3x-2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\3x-2y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=3\\3x-2y=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy (1;1),(3;4) là nghiệm của hệ phương trình

d. $\begin{cases}x^2+4x-5=0\,(1)\\x^2+xy+y^2=3\,(2)\end{cases}$

Giải phương trình (1) ta được: $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-5\end{array}\right.$

+) $x=1$

Thay vào phương trình (2) ta có: $y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -2 \end{array}\right.$

+) $x = -5$

Thay vào phương trình (2) ta có: $y^2 - 5y + 22 = 0$ (phương trình vô nghiệm)

Vậy $(1;1),(1;-2)$ là nghiệm của hệ phương trình

e. $\begin{cases} (x+20)(y-2) = xy \\ (x-10)(y-1) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - 2x + 20y - 40 = xy \\ xy - x - 10y + 10 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 20y = 40 \\ -x - 10y = -10 \end{cases}$

Giải phương trình bằng phương pháp cộng đại số, ta được: $\begin{cases} x = -5 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy $\left(-5;\dfrac{3}{2}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Bài 4: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = 2 \end{cases} (I)$ Điều kiện xác định: $x \neq 0; y \neq 0$

Đặt $\dfrac{1}{x} = a; \dfrac{1}{y} = b$, hệ phương trình (I) trở thành: $\begin{cases} a + b = \dfrac{5}{6} \\ 3a + 2b = 2 \end{cases} (II)$

Giải hệ phương trình (II) bằng phương pháp thế, ta được: $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy (2;3) là nghiệm của hệ phương trình (I)

b. $\begin{cases} \dfrac{2}{x+3y} + \dfrac{1}{y+3x} = 3 \\ \dfrac{4}{x+3y} - \dfrac{3}{y+3x} = 1 \end{cases} (I)$ Điều kiện xác định: $x \neq 3y; y \neq 3x$

Đặt: $\dfrac{1}{x+3y} = a; \dfrac{1}{y+3x} = b$

Hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 4a - 3b = 1 \end{cases} (II)$

Giải hệ phương trình (II) bằng phương pháp thế, ta được:

$\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x+3y}=1\\\dfrac{1}{y+3x}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=1\\y+3x=1\end{cases}(III)$

Giải hệ phương trình (III) bằng phương pháp thế, ta được:

$\begin{cases}x=\dfrac{1}{4}\\y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình (I)

c. $\begin{cases}\dfrac{3x}{x+1}-\dfrac{2}{y+3}=4\\\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{3}{y+3}=6\end{cases}(I)$ Điều kiện xác định: $x\neq-1; y\neq-3$

Đặt $\dfrac{x}{x+1}=a;\dfrac{1}{y+3}=b$

Hệ phương trình đã cho trở thành: $(II)\begin{cases}3a-2b=4\\2a-3b=6\end{cases}$

Giải hệ phương trình (II) bằng phương pháp thế, ta được:

$\begin{cases}a=0\\b=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}=0\\\dfrac{1}{y+3}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-\dfrac{7}{2}\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy $\left(0;-\dfrac{7}{2}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình (I).

d. $m\begin{cases}x^2+y^2=20\\3x^2-4y^2=32\end{cases}(I)$

Đặt $x^2=a; y^2=b$

Khi đó hệ phương trình (I) đã cho trở thành: $\begin{cases}a+b=20\\3a-4b=32\end{cases}(II)$

Giải hệ phương trình (II) bằng phương pháp thế, ta được:

$\begin{cases}a=16\\b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=16\\y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-4\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}y=2\\y=-2\end{array}\right.\end{cases}$

Vậy $(4;2),(4;-2),(-4;2),(-4;-2)$ là nghiệm của hệ phương trình (I)

e. $\begin{cases}3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=5\\7\sqrt{x}-\sqrt{y}=6\end{cases}(I)$

Điều kiện xác định: $x\ge 0; y\ge 0$

Đặt $\sqrt{x}=a;\sqrt{y}=b$

Hệ phương trình (I) đã cho trở thành: $\begin{cases}3a+2b=5\\7a-b=6\end{cases}(II)$

Giải hệ phương trình (II) bằng phương pháp thế, ta được:

$\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=1\\\sqrt{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$(thỏa mãn)

Vậy (1;1) là nghiệm của hệ phương trình (I)

f. $\begin{cases}|x|+5|y|=7\\4|x|-2|y|=6\end{cases}(I)$ Đặt $|x|=a;|y|=b\,(a\ge 0;b\ge 0)$

Hệ phương trình (I) trở thành: $\begin{cases}a+5b=7\\4a-2b=6\end{cases}(II)$

Giải hệ phương trình (II) bằng phương pháp thế, ta được:

$\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$(thỏa mãn) $\Rightarrow\begin{cases}|x|=2\\|y|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-1\end{array}\right.\end{cases}$

Vậy $(2;1),(2;-1),(-2;1),(-2;-1)$ là nghiệm của hệ phương trình (I)

g. $\begin{cases}3(x^2-2x)+\sqrt{y+2}=-2\\2(x^2-2x)-3\sqrt{y+2}=-5\end{cases}(I)$ Điều kiện xác định: $y\ge -2$

Đặt $x^2-2x=a;\sqrt{y+2}=b\,(b\ge 0)$

Hệ phương trình (I) trở thành: $\begin{cases}3a+b=-2\\2a-3b=-5\end{cases}(II)$

Giải hệ phương trình (II) bằng phương pháp thế, ta được:

$\begin{cases}a=-1\\b=1(\text{thoa man})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-2x=-1\\\sqrt{y+2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1=0\\y+2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$

Vậy (1;-1) là nghiệm của hệ phương trình (I)

h. $\begin{cases} 5|x-1|-3|y-2|=12 \\ 2\sqrt{4x^2-8x+4}+5\sqrt{y^2-4y+4}=11 \end{cases} (I)$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 5|x-1|-3|y-2|=12 \\ 2\sqrt{4(x-1)^2}+5\sqrt{(y-2)^2}=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5|x-1|-3|y-2|=8 \\ 4|x-1|+5|y-2|=11 \end{cases}$$

Đặt $|x-1|=a;|y-2|=b$ (ĐK $\geq -;b\geq 0$)

Hệ phương trình (I) trở thành: $\begin{cases} 5a-3b=8 \\ 4a+5b=11 \end{cases} (II)$

Giải hệ phương trình (II) bằng phương pháp thế, ta được:

$$\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} (\text{thoa man}) \Rightarrow \begin{cases} |x-1|=3 \\ |y-2|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-1=3 \\ x-1=-3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y-2=1 \\ y-2=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $(4;3),(4;1),(-2;3),(-2;1)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Bài 5: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases} (I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=5 \\ (x+y)^2-xy=7 \end{cases}$ Đặt $x+y=S; xy=P$

Khi đó hệ (I) trở thành: $\begin{cases} S+P=5 \\ S^2-P=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=5-S \\ S^2-(5-S)=7 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=5-S \\ S^2+S-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=5-S \\ \left[\begin{array}{l} S=3 \\ S=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S=3 \\ P=2 \end{cases} \\ \begin{cases} S=-4 \\ P=9 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=3 \\ x.y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-4 \\ x.y=9 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$* \begin{cases} x+y=3 \\ x.y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y^2-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$* \begin{cases} x+y=-4 \\ x.y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4-y \\ (-4-y).y=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4-y \\ y^2+4y+9=0 (\text{phuong trinh vo nghiem}) \end{cases}$$

Vậy (1;2),(2;1) là nghiệm của hệ phương trình.

b. $\begin{cases} xy = x + y + 17 \\ x^2 + y^2 = 65 \end{cases} (I) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = x + y + 17 \\ (x + y)^2 - 2xy = 65 \end{cases}$

Đặt $S = x + y; P = x.y$

Khi đó, hệ phương trình trở thành (I) trở thành:

$$\begin{cases} P = S + 17 \\ S^2 - 2P = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S + 17 \\ S^2 - 2S - 99 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S + 17 \\ \left[\begin{array}{l} S = 11 \\ S = -9 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = 11 \\ P = 28 \end{cases} \\ \begin{cases} S = -9 \\ P = 8 \end{cases} \end{array} \right.$$

* $\begin{cases} x + y = 11 \\ x.y = 28 \end{cases}$

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình $t^2 - 11t + 28$ có $\Delta = 11^2 - 4.28 = 9$

Do đó phương trình có hai nghiệm $t_1 = 7; t_2 = 4$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases} \end{array} \right.$$

* $\begin{cases} x + y = -9 \\ x.y = 8 \end{cases}$

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình $t^2 + 9t + 8 = 0$ có $\Delta = 9^2 - 3.8 = 4$

Do đó phương trình có hai nghiệm $t_3 = -1; t_4 = -8 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = -8 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -8 \\ y = -1 \end{cases} \end{array} \right.$

Vậy $(-1;-8),(-8;-1),(7;4),(4;7)$ là nghiệm của hệ phương trình.

c. $\begin{cases} xy(x+2)(y+2) = 9 \\ x^2 + y^2 + 2(x+y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+2)(y+2) = 9 \\ x(x+2) + y(y+2) = 6 \end{cases}$

Đặt $x(x+2) = a; y(y+2) = b$

Khi đó, hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} a.b = 9 \\ a + b = 6 \end{cases}$

Suy ra a, b là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow (t-3)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+2) = 3 \\ y(y+2) = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3=0 \\ y^2+2y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-3 \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $(1;1),(1;-3),(-3;1),(-3;-3)$ là nghiệm của hệ phương trình.

d. $\begin{cases} x^2+y^2=52 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{12} \end{cases}$ Điều kiện xác định: $x, y \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=52 \\ \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{5}{12} \end{cases}$$

Đặt $x+y=S; x.y=P$

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} S^2-2P=52 \\ \dfrac{S}{P}=\dfrac{5}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2-2P=52 \\ P=\dfrac{12S}{5} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2-\dfrac{24S}{5}-52=0 \\ P=\dfrac{12S}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} S=10 \\ S=-\dfrac{26}{5} \end{array}\right. \\ P=\dfrac{12S}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S=10 \\ P=24 \end{cases} \\ \begin{cases} S=-\dfrac{26}{5} \\ P=-\dfrac{312}{25} \end{cases} \end{array}\right.$$

* $\begin{cases} S=10 \\ P=24 \end{cases}$

Do đó x; y là nghiệm của phương trình $t^2-10t+24=0$

Ta có $\Delta=10^2-4.24=4$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $t_1=6; t_2=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

* $\begin{cases} S=-\dfrac{26}{5} \\ P=-\dfrac{312}{25} \end{cases}$

Tương tự trường hợp trên, ta được: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{-13+\sqrt{481}}{5}\\ y=\dfrac{-13-\sqrt{481}}{5}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{-13-\sqrt{481}}{5}\\ y=\dfrac{-13+\sqrt{481}}{5}\end{cases}\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy $(6;4),(4;6),\left(\dfrac{-13-\sqrt{481}}{5};\dfrac{-13+\sqrt{481}}{5}\right),\left(\dfrac{-13+\sqrt{481}}{5};\dfrac{-13-\sqrt{481}}{5}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình.

e. $\begin{cases}x+\dfrac{1}{x+y}=3\\ \dfrac{x}{x+y}=2\end{cases}$ Điều kiện xác định : $x\neq -y$

Đặt $\dfrac{1}{x+y}=a$. Khi đó, hệ phương trình trở thành: $\begin{cases}x+a=3\\ x.a=2\end{cases}$

x, a là nghiệm của phương trình $t^2-3t+2=0$ là phương trình bậc hai có:

$\Delta=3^2-4.2=1$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt $t_1=1;t_2=2$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ a=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ a=1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ \dfrac{1}{1+y}=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ \dfrac{1}{2+y}=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy $\left(1;-\dfrac{1}{2}\right),(2;-1)$ là nghiệm của hệ phương trình.

PHẦN II. HÌNH HỌC

BÀI 1: TOÁN TÍNH TOÁN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– Nếu một hình H đã cho được chia thành nhiều hình $H_1; H_2; ...; H_n$ không có điểm trong chung thì: $S_{H_2} = S_{H_1} + S_{H_2} + ... + S_{H_n}$.

– $S_{(O;R)} = \pi R^2, \mathrm{S_{quạt}} = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{lR}{2}$.

– $C_{(O;R)} = 2\pi R = \pi d, l_{cung} = \dfrac{\pi Rn}{180}$.

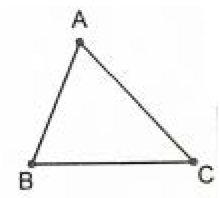
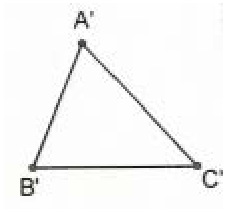
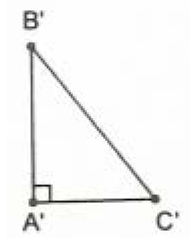
– Tỉ số lượng giác của góc nhọn.

– Hệ thức lượng trong tam giác vuông.

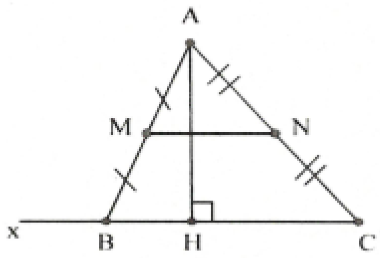
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Từ thực tế bài toán cho ta vận dụng hợp lí các kiến thức đã học để tính toán. Thông thường là:

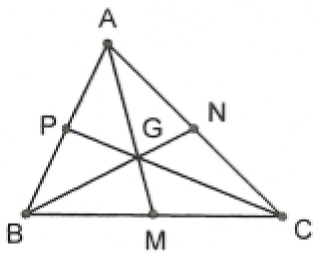
1. **Các trường hợp bằng nhau của tam giác:**

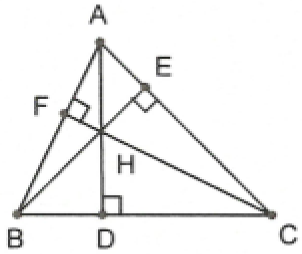
TAM GIÁC		TAM GIÁC VUÔNG	
			
ΔABC và $\Delta A'B'C'$		ΔABC và $\Delta A'B'C'$ vuông tại $\widehat{A}$ và $\widehat{A'}$.	
$\begin{cases} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ CA = C'A' \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \left(c.c.c\right)$		$\begin{cases} BC = B'C' \\ CA = C'A' \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).	
$\begin{cases} AB = A'B' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ CA = C'A' \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \left(c.g.c\right)$		$\begin{cases} AB = A'B' \\ CA = C'A' \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$	
$\begin{cases} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \left(g.c.g\right)$		$\begin{cases} AB = A'B' \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$ $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$	$\begin{cases} BC = B'C' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{cases}$ $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$

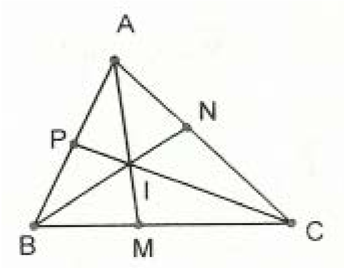
2. **Một số tính chất trong tam giác:**

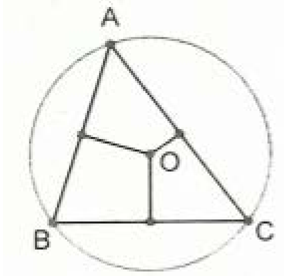
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^0;\ \widehat{ABx}=\widehat{A}+\widehat{C}$
MN là đường trung bình.
$\Rightarrow MN//BC,\ MN=\dfrac{1}{2}BC$
$AB-AC<BC<AB+AC$
$\widehat{C}<\widehat{B}\Leftrightarrow AB<AC$</td>
</tr>
</table>

3. Tính chất các đường trong tam giác:

<table>
<tr>
<td>

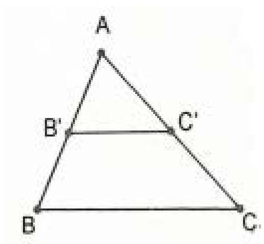
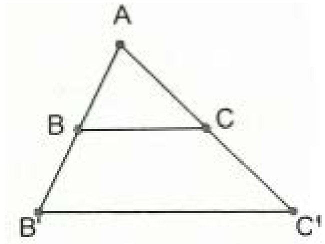
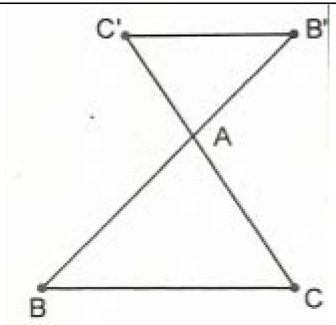
Ba đường trung tuyến AM, BN, CP của ΔABC đồng quy tại điểm G.
Điểm G gọi là trọng tâm của $\Delta ABC,\ AG=\dfrac{2}{3}AM,\ GM=\dfrac{1}{3}AM$.</td>
<td>

Ba đường cao AD, BE, CF của ΔABC đồng quy tại điểm H.
Điểm H gọi là trực tâm của ΔABC.</td>
</tr>
<tr>
<td>

Ba đường phân giác của ΔABC đồng quy tại điểm I.
Điểm I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.</td>
<td>

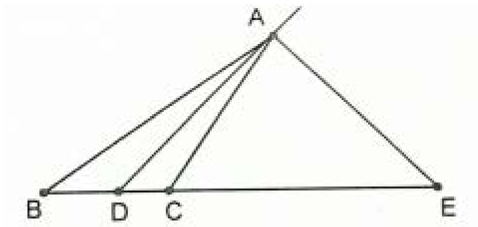
Ba đường trung trực của ΔABC đồng quy tại điểm O.
Điểm O gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.</td>
</tr>
</table>

4. Định lí Ta – lét trong tam giác:

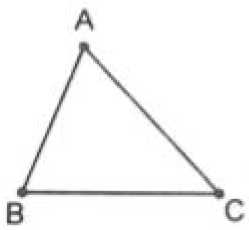
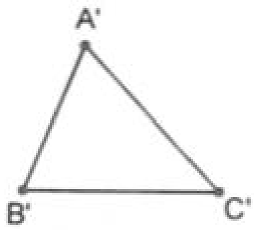
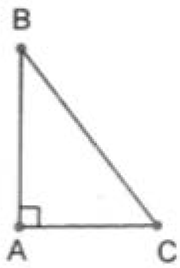
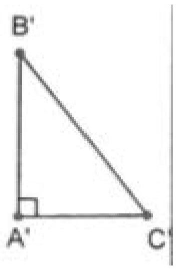
		

- $\Delta ABC;\, B'C'//BC \Leftrightarrow \dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$.
- Hệ quả: $\Delta ABC;\, B'C'//BC \Leftrightarrow \dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{AC'}{AC}$.

5. Tính chất đường phân giác của tam giác:

	ΔABC với AD là phân giác góc trong tại đỉnh A, AE là phân giác góc ngoài tại đỉnh A. Ta có: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}; \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{AC}$.

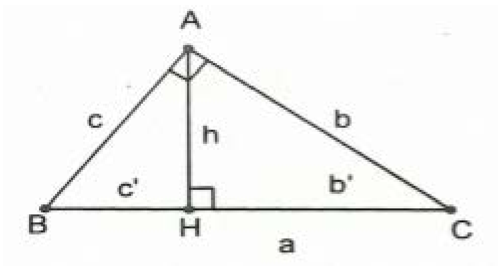
6. Các trường hợp đồng dạng của tam giác:

TAM GIÁC		TAM GIÁC VUÔNG	
			
ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có		ΔABC và $\Delta A'B'C'$ vuông tại $\widehat{A}$ và $\widehat{A'}$ có	
a) $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$.		$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$	
b) $\begin{cases} \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$		$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC}, \widehat{B'} = \widehat{B}$ $\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$	
c) $\begin{cases} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$		$\begin{cases} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$	

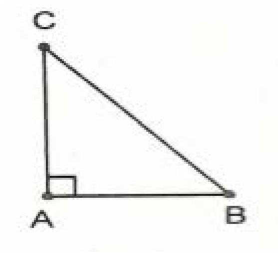
$h; h'$ là các đường cao tương ứng. $m; m'$ là các trung tuyến tương ứng. $l; l'$ là các phân giác tương ứng, P, P' là các chu vi. S, S' là các diện tích. k là tỉ số đồng dạng của hai tam giác. Ta có: $\frac{h'}{h} = \frac{l'}{l} = \frac{m'}{m} = \frac{P'}{P} = k; \frac{S'}{S} = k^2$.

7. Hệ thức lượng trong tam giác vuông:

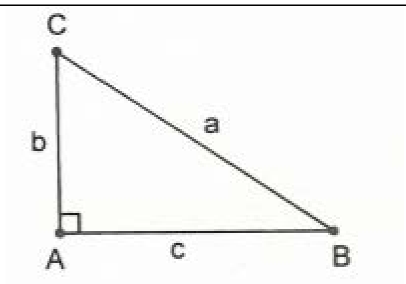
a) Các hệ thức lượng trong tam giác vuông:

	ΔABC vuông tại A, $AH \perp BC$. Ta có: • $b^2 = ab'; c^2 = ac'$. • $h^2 = b'c'$. • $a.h = b.c$. • $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. • $a^2 = b^2 + c^2$.

b) Tỉ số lượng giác của góc nhọn:

	ΔABC vuông tại A, $\widehat{B} = \alpha$. Ta có: $\sin\alpha = \frac{AC}{BC}; \cos\alpha = \frac{AB}{BC}; \tan\alpha = \frac{AC}{AB}; \cot\alpha = \frac{AB}{AC}$.

c) Các hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông:

	ΔABC vuông tại A. Ta có: $b = a\sin B = a\cos C = c\tan B = c\cot C;$ $c = a\sin C = a\cos B = b\tan C = b\cot B.$

d) Các tính chất của tỉ số lượng giác của góc nhọn:

- Nếu $\alpha + \beta = 90^0$ thì $\sin\alpha = \cos\beta; \cos\alpha = \sin\beta; \tan\alpha = \cot\beta; \cot\alpha = \tan\beta$.

- $0 < \sin\alpha < 1; 0 < \cos\alpha < 1; \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$

  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \tan\alpha.\cot\alpha = 1.$

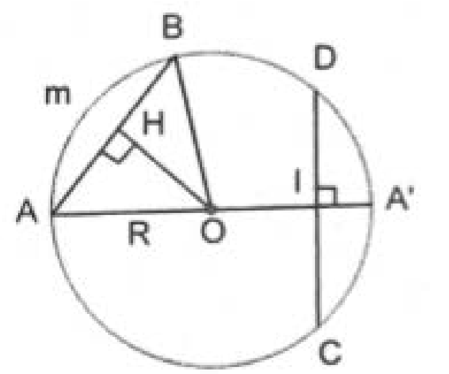
8. Công thức tính diện tích của tam giác và một số tứ giác đặc biệt:

- Diện tích tam giác $S = \dfrac{1}{2}a.h$ (a là cạnh đáy, h là chiều cao tương ứng).
- Diện tích hình bình hành: $S = a.h$ (a là cạnh đáy, h là chiều cao tương ứng).
- Diện tích hình chữ nhật: $S = a.b$ ($a;b$ là chiều dài, chiều rộng).
- Diện tích hình vuông: $S = a^2$ (a là cạnh).
- Diện tích hình thoi, diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S = \dfrac{1}{2}d.d'$ (trong đó $d;d'$ là các đường chéo).
- Diện tích hình thang: $S = \dfrac{1}{2}(a+b).h$ ($a;b$ là hai đáy, h là chiều cao).

Chú ý: Để tính diện tích đa giác nói chung ta tìm cách chia đa giác thành các thành phần là các tam giác hoặc các đa giác đặc biệt như trên.

9. Đường tròn, các mối quan hệ, các kiến thức liên quan đến đường tròn.

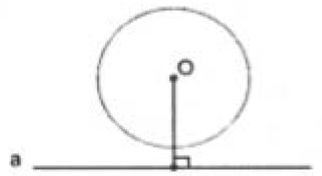
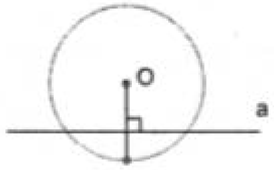
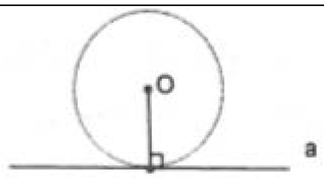
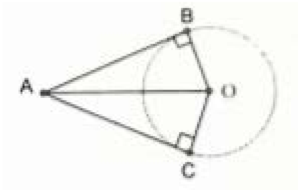
a) Đường tròn:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

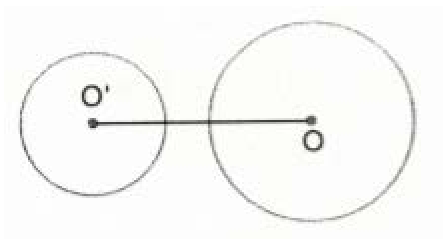
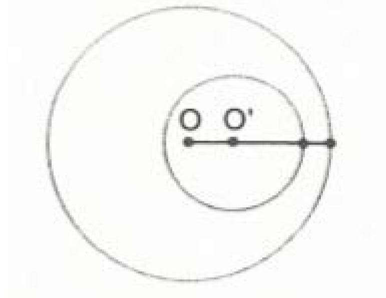
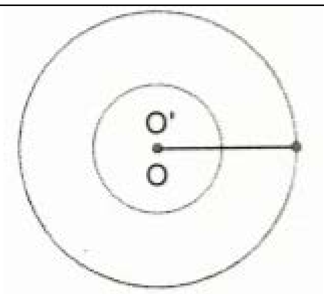
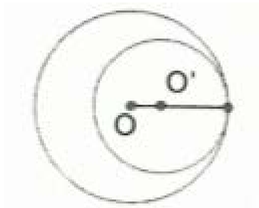
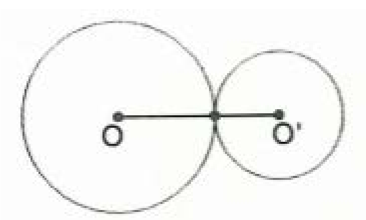
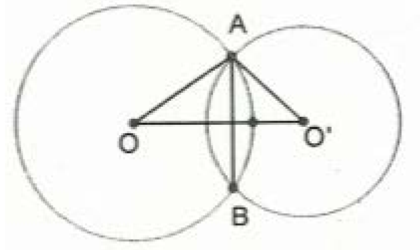
- $(O;R)$ là tập hợp các điểm cách O một khoảng R. O là tâm đối xứng, đường kính AA' là trục đối xứng.
- $AA' > AB$ (dây), $AA' \le CD \Leftrightarrow \begin{cases} \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \\ OH \ge OI \end{cases}$.
- $AA' \perp CD \Leftrightarrow ID = IC \Leftrightarrow \overset{\frown}{CA'} = \overset{\frown}{DA'}$.
- $\widehat{AOB} = sđ\,\overset{\frown}{AmB} = n^0$.
- $C_{(O)} = \pi d = 2\pi R; S_{(O)} = \pi R^2$.
- $S_{(qOAB)} = \dfrac{\pi R^2 n^0}{360^0} = \dfrac{lr}{2}, \left(l = \dfrac{\pi R n}{180}\right)$.

</td>
</tr>
</table>

b) Đường tròn và đường thẳng: d là khoảng cách từ O đến $a; R$ là bán kính đường tròn.

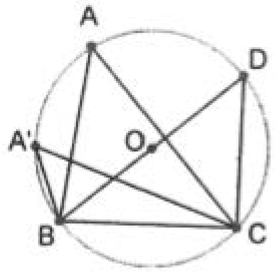
<table>
<tr>
<td>
Đường tròn và đường thẳng không cắt nhau: $d > R$.</td>
<td>
Đường tròn và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm: $d < R$.</td>
<td>
Đường tròn và đường thẳng tiếp xúc nhau: $d = R; a$ là tiếp tuyến $\Leftrightarrow OH \perp a, H \in (O)$.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">AB, AC là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O).
$\Rightarrow AB = AC$
$\widehat{BAO} = \widehat{CAO}, \widehat{BOA} = \widehat{COA}$</td>
</tr>
</table>

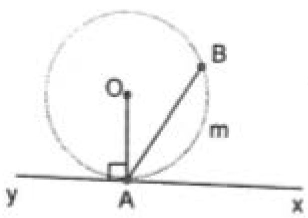
c) **Đường tròn và đường tròn:** $(O;R)$ và $(O';R')$.

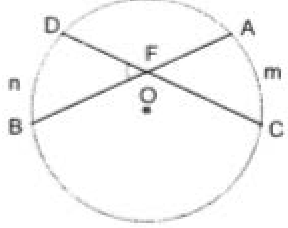
<table>
<tr>
<td>
Đường tròn (O) và (O') không giao nhau: $OO' > R + R'$.</td>
<td>
Đường tròn (O) chứa đường tròn (O'): $OO' < R - R'$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
Hai đường tròn đồng tâm: $O \equiv O'$.</td>
<td>
Đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong: $OO' = R - R'$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
Đường tròn (O) và (O') tiếp xúc</td>
<td>
Đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và</td>
</tr>
</table>

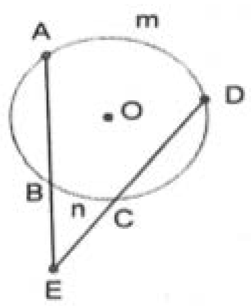
ngoài: $OO' = R + R'$.	B: OO' là trung trực của AB: $R - R' < OO' < R + R'$.

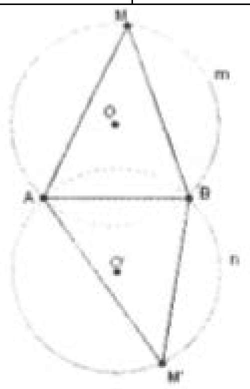
d) Đường tròn và góc:

<table>
<tr>
<td>

$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{BC},$
$\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{BCD} = 90^0;$
$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}.$</td>
<td>

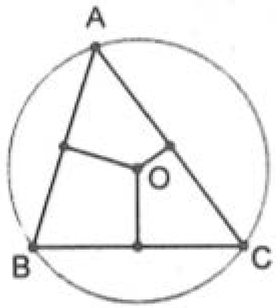
$\widehat{xAB} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{AmB}$</td>
<td>

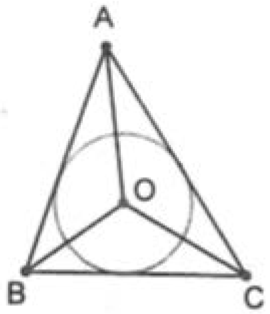
$\widehat{AFC} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{AmD} + sđ\,\overset{\frown}{BnD}\right)$</td>
</tr>
<tr>
<td>

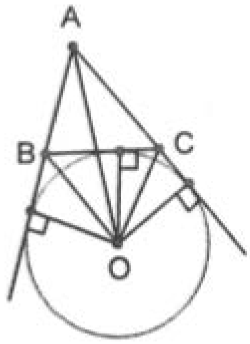
$\widehat{AED} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{AmD} - sđ\,\overset{\frown}{BnC}\right)$</td>
<td colspan="2">

Với đoạn thẳng AB và góc α cho trước $\left(0 < \alpha < 180^0\right)$ thì quỹ tích các điểm thỏa mãn $\widehat{AMB} = \alpha$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB.</td>
</tr>
</table>

e) Đường tròn và tam giác:

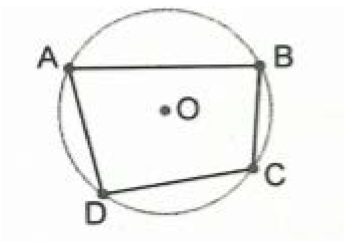
<table>
<tr>
<td>


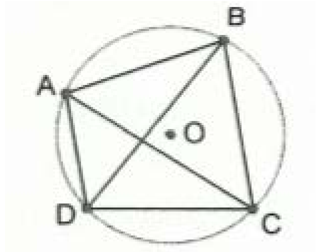
Tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là giao điểm ba đường trung trực.
</td>
<td>


Tâm O của đường tròn nội tiếp ΔABC là giao điểm ba đường phân giác trong của ΔABC.
</td>
<td>


Tâm O của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của đường phân giác góc A với hai phân giác góc ngoài tại B và C.
</td>
</tr>
</table>

f) Tứ giác nội tiếp:

<table>
<tr>
<td>


$\widehat{BAD}+\widehat{BCD}=180^0 \Rightarrow ABCD$ là tứ giác nội tiếp.
</td>
<td>


$\widehat{DAC}=\widehat{DBC}$.

$\Rightarrow ABCD$ là tứ giác nội tiếp.
</td>
</tr>
</table>

C. BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác $ABC, \angle B = 60^0, \angle C = 30^0$. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các hình tròn đường kính BC, CA, AB.

a) Chứng minh rằng $S_1 = S_2 + S_3$.

b) Chứng minh rằng $S_2 = 3S_3$.

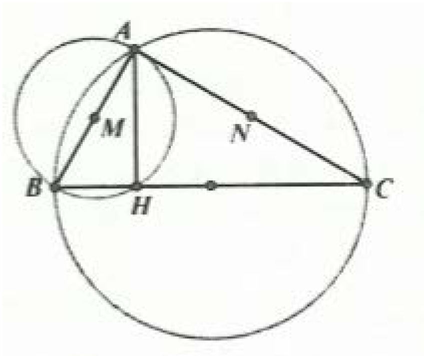
c) Cho $AB = 4cm$. Tính diện tích hình giới hạn bởi hình tròn đường kính AB và hình tròn đường kính AC.

Lời giải:

a) $S_1 = \pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \pi\frac{BC^2}{4}, S_2 = \pi\left(\frac{CA}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}CA^2, S_3 = \pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}AB^2$

$\Rightarrow S_2 + S_3 = \frac{\pi}{4}\left(CA^2 + AB^2\right)$

Áp dụng định lí Pitago, ta có: $CA^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow S_2 + S_3 = S_1$.



b) $CA = AB\tan\widehat{ABC} = AB\tan 60^0 = AB\sqrt{3}$

$S_2 = \dfrac{\pi}{4}CA^2 = \dfrac{\pi}{4}\left(AB\sqrt{3}\right)^2 = \dfrac{3\pi}{4}AB^2 \Rightarrow S_2 = 3S_3$

c) Kẻ đường cao AH, ta có H thuộc đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và $AC; S_4, S_5$ lần lượt là diện tích hình viên phân MAH của đường tròn đường kính AB và diện tích hình viên phân NAH của đường tròn đường kính $AC; S$ là diện tích hình bị giới hạn bởi hình tròn đường kính AB và hình trong đường kính AC.

Ta có: $S = S_4 - S_{AMH} + S_5 - S_{ANH}$.

$\widehat{AMH} = 2\widehat{ABH}$ (liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm).

$\widehat{ABH} = 60^0 \Rightarrow \widehat{AMH} = 120^0$.

$\widehat{ANH} = 2\widehat{ACH}$ (liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm).

$\widehat{ABH} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ACH} = 90^0 - 60^0 = 30^0 \Rightarrow \widehat{ACH} = 30^0$.

Ta có:

$AB = 4cm \Rightarrow MA = MB = 2cm,\ AC = 4\sqrt{3}cm \Rightarrow NA = NC = 2\sqrt{3}cm$

$S_4 = \dfrac{\pi.2^2.120}{360} = \dfrac{4\pi}{3},\ S_5 = \dfrac{\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2.60}{360} = 2\pi$

$BH = AB\cos\widehat{ABH} = 4\cos 60^0 = 2,\ AH = AB\sin\widehat{ABH} = 4\sin 60^0 = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{ABH} = \dfrac{1}{2}BH.AH = \dfrac{1}{2}.2.2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(cm^2\right) \Rightarrow S_{AMH} = \dfrac{1}{2}S_{ABH} = \sqrt{3}\left(cm^2\right)$

$CH = AC\cos\widehat{ACH} = 4\sqrt{3}\cos 30^0 = 6$

$\Rightarrow S_{ACH} = \dfrac{1}{2}BH.AH = \dfrac{1}{2}.6.2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\left(cm^2\right) \Rightarrow S_{ANH} = \dfrac{1}{2}S_{ACH} = 3\sqrt{3}\left(cm^2\right)$

$\Rightarrow S = S_4 - S_{AMH} + S_5 - S_{ANH} = \dfrac{10\pi}{3} - 4\sqrt{3}\left(cm^2\right)$

Bài 2: Cho đường tròn $(O;R)$, các tiếp tuyến AB và AC kẻ từ điểm A tới đường tròn vuông với nhau tại A.

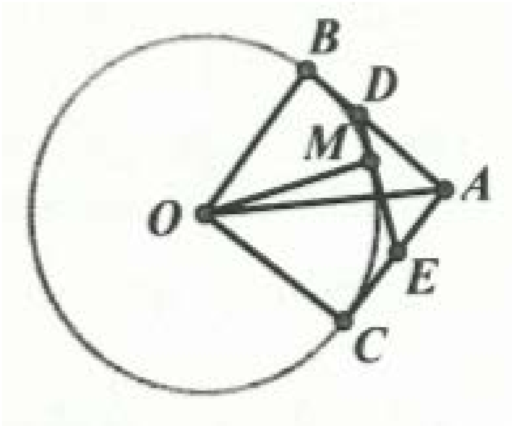
a) Gọi M là điểm bất kì thuộc cung nhỏ BC. Qua M vẽ tiếp tuyến với đường tròn, nó cắt 2 tiếp tuyến AB và AC lần lượt ở D và E. Tính chu vi ΔADE.

b) Tính $\widehat{DOE}$.

c) Tính diện tích hình giới hạn bởi các đoạn thẳng AB, AC và cung nhỏ BC.

Lời giải:

a) Ta có $AB \perp AC$ tại A (giả thiết) mà $AB \perp OB$ tại B, $AC \perp OC$ tại C (AB, AC là tiếp tuyến (O)) nên



$\widehat{OBA} = \widehat{BAC} = \widehat{OCA} = 90^0$.

$\Rightarrow ABOC$ là hình chữ nhật (tứ giác có ba góc vuông)

Mà $OB = OC = R$.

Nên tứ giác $ABOC$ là hình vuông (hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau).

Ta có: $DB = DM$; $EM = EC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Do đó: $DE = DM + ME = DB + EC$.

Ta có:

$P_{ADE} = DE + AD + AE = DB + EC + AD + AE$.

$P_{ADE} = AB + AC = 2AB = 2OB = 2R$ ($ABOC$ là hình vuông).

b) Ta có: OD là phân giác $\widehat{BOM}$ (D là giao điểm của 2 tiếp tuyến DB và DM), OE là phân giác $\widehat{MOC}$ (E là giao điểm 2 tiếp tuyến EM và EC)

Do đó: $\widehat{DOE} = \widehat{DOM} + \widehat{MOE} = \dfrac{\widehat{BOM}}{2} + \dfrac{\widehat{MOC}}{2} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2} = 45^0$.

c) $S_{quatBOC} = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi R^2 90}{360} = \dfrac{\pi R^2}{4}$

$S_{OABC} = OB^2 = R^2$

S$_{\text{cần tìm}}$ $= S_{OABC} - S_{quatBOC} = R^2 - \begin{cases} \dfrac{1}{x} = -1 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = 8 \end{cases}$

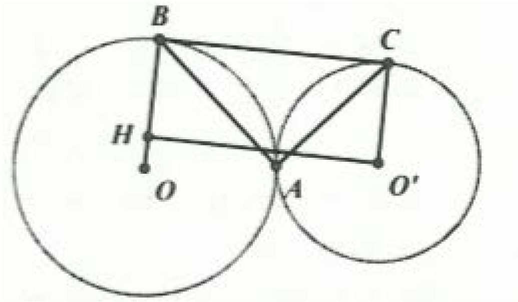
Bài 3: Cho 2 đường tròn $(O;3cm)$ và $(O';2cm)$ tiếp xúc ngoài tại A, vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC, B thuộc đường tròn $(O;3cm)$, C thuộc đường tròn $(O';2cm)$.

a) Tính $l_{AB}; l_{AC}$.

b) Tính diện tích hình giới hạn bởi BC và các cung nhỏ AB, AC của 2 đường tròn (lấy $\pi \approx 3,14$).

Lời giải:

a) Vẽ $O'H \perp OB$ tại H.



Ta có: $\cos\widehat{O}=\dfrac{OH}{OO'}=\dfrac{1}{5}=0,2\Rightarrow\widehat{O}\approx 78^0$

$$l_{AB}=\frac{\pi Rn}{180}=\frac{\pi.3.78}{180}\approx 4,082\left(cm\right)$$

$$l_{AB}=\frac{\pi Rn}{180}=\frac{\pi.2.102}{180}\approx 3,559\left(cm\right)$$

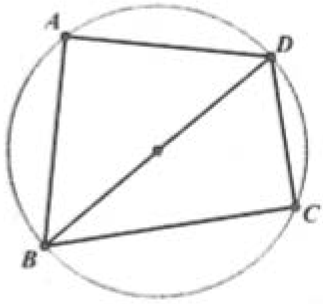
b) Gọi S là diện tích hình giới hạn bởi BC và các cung nhỏ AB,AC của 2 đường tròn, ta có: $S=S_{OBCO'}-\left(S_{quatOBAO}+S_{quatO'CAO'}\right)$.

Bài 4: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\left(O;R\right)$. $AB=AD, BD=2R, \widehat{ABC}=75^0$. Tính diện tích của tứ giác $ABCD$ và độ dài cung CD không chứa A,B.

Lời giải:

Ta có: $\widehat{BAD}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $AB=AD$ (giả thiết)

$\Rightarrow\Delta ABD$ vuông cân tại A.



$\Rightarrow\widehat{ABD}=45^0, AB=AD=BD\sin 45^0=2R\dfrac{\sqrt{2}}{2}=R\sqrt{2}$.

$AB\perp AD\Rightarrow S_{ABD}=\dfrac{1}{2}AB.AD=\dfrac{1}{2}R\sqrt{2}.R\sqrt{2}=R^2$

Mặt khác $\widehat{ABC}=75^0$ (giả thiết).

$\Rightarrow\widehat{DBC}=\widehat{ABC}-\widehat{ABD}=75^0-45^0=30^0$

$\Rightarrow BC=BD\cos\widehat{DBC}=2R\cos 30^0=R\sqrt{3}$

$BC\perp CD\Rightarrow S_{BCD}=\dfrac{1}{2}BC.CD=\dfrac{1}{2}R\sqrt{3}.R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2$

$S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}=R^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}R^2$

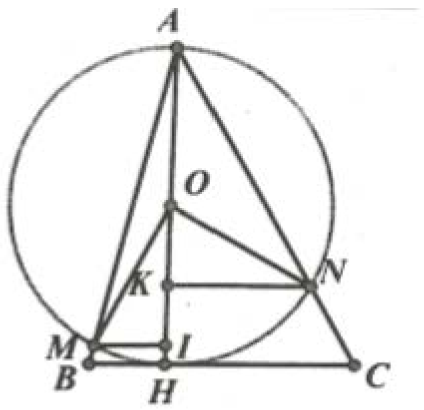
Ta có: $\widehat{DOC}=2\widehat{DBC}$ (liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm).

$\widehat{DBC}=30^0\Rightarrow\widehat{DOC}=60^0$.

Độ dài cung CD không chứa A,B là $l=\dfrac{2\pi R.60}{360}=\dfrac{\pi R}{3}$.

Bài 5: Cho tam giác nhọn ABC, kẻ đường cao AH và đường tròn tâm O đường kính AH. Tính diện tích hình giới hạn bởi tam giác ABC và hình tròn đường kính AH biết rằng $AH=4cm, \widehat{ABC}=75^0, \widehat{ACB}=60^0$.

Lời giải:



Gọi M,N lần lượt là giao điểm của (O) với AB và AC (M,N khác A).

Ta có: $\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=180^0$ (tổng ba góc trong một tam giác).

$\Rightarrow \widehat{BAC}=180^0-\widehat{ABC}-\widehat{ACB}=180^0-75^0-60^0=45^0$.

$\widehat{MON}=2\widehat{BAC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm).

$\Rightarrow \widehat{MON}=90^0$.

Gọi S_1 là diện tích hình viên phân OMN của hình tròn tâm O, S_2 là diện tích hình giới hạn bởi tam giác ABC và hình tròn đường kính AH: $S_2=S_1+S_{AOM}+S_{AON}$.

$$AH=4cm\Rightarrow OM=ON=OA=2cm\Rightarrow S_1=\frac{\pi.2^2.90}{360}=\pi\left(cm^2\right).$$

Xét các tam giác vuông ABH và ACH, ta có:

$\widehat{BAH}=90^0-\widehat{ABH}=90^0-75^0=15^0\Rightarrow \widehat{MAH}=15^0$

$\widehat{CAH}=90^0-\widehat{ACH}=90^0-60^0=30^0\Rightarrow \widehat{NAH}=30^0$

Gọi I,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M,N lên AH.

$$MI=OM\sin\widehat{MOI}=2\sin 30^0=1(cm)\Rightarrow S_{AOM}=\frac{1}{2}MI.OA=\frac{1}{2}.1.2=1\left(cm^2\right)$$

$$NK=ON\sin\widehat{NOK}=2\sin 60^0=\sqrt{3}(cm)\Rightarrow S_{AON}=\frac{1}{2}NI.OA=\sqrt{3}\left(cm^2\right)$$

$$S_2=S_1+S_{AOM}+S_{AON}=\pi+1+\sqrt{3}\left(cm^2\right)$$

Bài 6: Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp $(O;R)$. Biết rằng $AB=a$.

a) Tính diện tích hình phẳng nằm trong hình tròn $(O;R)$ và nằm ngoài hình chữ nhật $ABCD$.

b) Giả sử $a=R$. Tính diện tích hình phẳng nằm trong hình tròn $(O;R)$ và thuộc nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB, không chứa điểm C.

Lời giải:

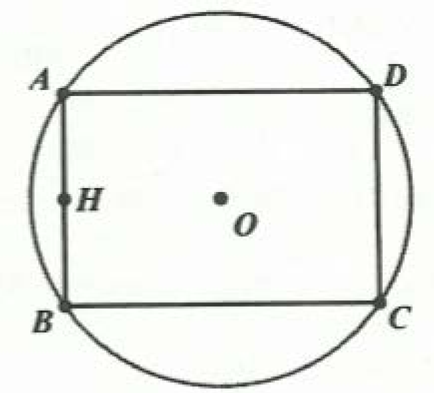
a) Xét tam giác ABC: $AB^2+AD^2=BD^2\Rightarrow AD^2=BD^2-AB^2$.

Vì $BD=2R$, $AB=a$ nên $AD^2=4R^2-a^2\Rightarrow AD=\sqrt{4R^2-a^2}\Rightarrow S_{ABCD}=AB.AD=a\sqrt{4R^2-a^2}$.

Diện tích hình phẳng trong hình tròn $(O;R)$ và thuộc nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB, không chứa điểm C: $S=\pi R^2-a\sqrt{4R^2-a^2}$.

b) Ta có: $AB=OA=OB=R\Rightarrow \Delta AOB$ đều $\Rightarrow \widehat{OAB}=60^0$.

Diện tích hình viên phân OAB là $S_1=\dfrac{\pi R^2 60}{360}=\dfrac{\pi R^2}{6}$.



Ta tính diện tích hình tam giác đều OAB:

Gọi H là trung điểm của AB. Vì tam giác ABO đều nên $OH \perp AB$.

Xét tam giác vuông OAH : $OA^2 = OH^2 + HA^2$.

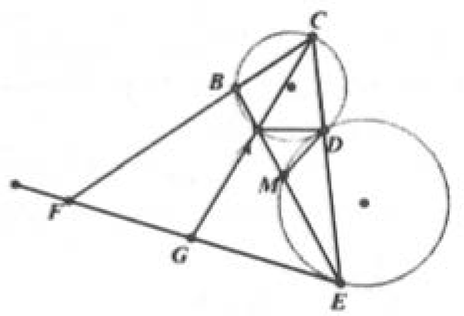
$\Rightarrow OH^2 = OA^2 - HA^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$S_{OAB} = \frac{1}{2}AB.OH = \frac{1}{2}R.\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

Hình phẳng nằm trong hình tròn $(O;R)$ và thuộc nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB, không chứa điểm C có diện tích là $S = S_1 - S_{OAB} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)R^2}{12}$.

Bài 7: Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt trên một đường tròn sao cho hai đoạn AB, CD cắt nhau tại E. Trên đoạn BE lấy điểm M khác B và E. Tiếp tuyến tại E của đường tròn ngoại tiếp tam giác DEM cắt BC và AC tại F, G. Tính tỉ số $\frac{EG}{EF}$ theo $t = \frac{AM}{AB}$.

Lời giải:



Ta có: $\widehat{ECF} = \widehat{EAD}, \widehat{CEF} = \widehat{GED} = \widehat{EMD}$

$\Rightarrow \Delta ECF \backsim \Delta MAD \Rightarrow \frac{EF}{MD} = \frac{CE}{MA} \quad (1)$

Lại có: $\widehat{GCE} = \widehat{MBD}, \widehat{CEF} = \widehat{EMD} \Rightarrow \widehat{CEG} = \widehat{BMD}$

$\Delta BMD \backsim \Delta CEG\ (g.g) \Rightarrow \frac{EG}{MD} = \frac{CE}{BM} \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{EG}{EF} = \frac{MA}{BM} = \frac{MA}{AB - AM} = \frac{t}{1-t}$.

Bài 8 (Lớp 10 chuyên Đại học Sư phạm TP.HCM 2012 – 2013): Cho tam giác ABC vuông tại $A\left(AB < AC\right)$, có đường cao AH và O là trung điểm của BC. Đường tròn tâm I đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M và N.

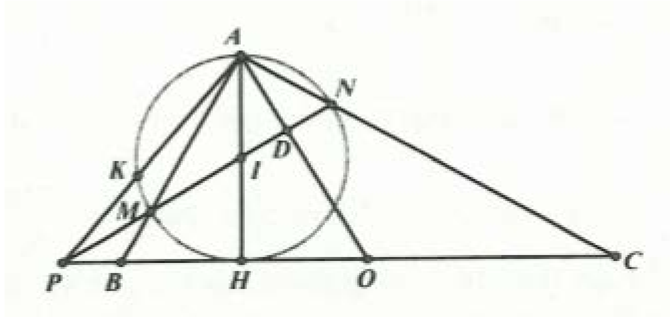
1. Chứng minh rằng:
   a) $AM.AB = AN.AC$.
   b) Tứ giác $BMNC$ nội tiếp.
2. Gọi D là giao điểm của OA và MN. Chứng minh rằng:
   a) Tứ giác $ODIH$ nội tiếp.
   b) $\frac{1}{AD} = \frac{1}{HB} + \frac{1}{HC}$.
3. Gọi P là giao điểm của đường thẳng MN và đường thẳng BC. Đường thẳng AP cắt đường tròn đường kính AH tại điểm K (khác A). Tính $\widehat{BKC}$.

4. Cho $AB = 6; AC = 8$. Hãy tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN.

Lời giải:

1) a) Ta có: $\widehat{AMH} = \widehat{ANH} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

ΔHAB vuông tại H, HM là đường cao $\Rightarrow AH^2 = AM.AB$.



Tương tự: $AH^2 = AN.AC$.

Do đó: $AM.AB = AN.AC$.

b) Xét ΔANM và ΔABC:

$\widehat{MAN}$ chung, $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB}$ (vì $AM.AB = AN.AC$).

Do đó: $\Delta ANM \sim \Delta ABC$.

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ABC} \Rightarrow$ Tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

2) a) $\widehat{MAN} = 90^0 \Rightarrow MN$ là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}\left(= \dfrac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{AB}\right)$.

Mà $\widehat{AMN} = \widehat{ACB}$ (tứ giác $BMNC$ nội tiếp).

Do đó $\widehat{AIN} = \widehat{AOB} \Rightarrow$ Tứ giác $ODIH$ nội tiếp.

b) Xét ΔAID và ΔAOH có $\widehat{IAD}$ chung, $\widehat{AID} = \widehat{AOH}$

$\Rightarrow \Delta AID \sim \Delta AOH\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{AD}{AH} \Rightarrow AD.AO = AI.AH$.

Mà $AI = \dfrac{1}{2}AH,\ AO = \dfrac{1}{2}BC$.

ΔABC vuông tại A, AH là đường cao $\Rightarrow AH^2 = HB.HC$.

Do đó $HB.HC = AD.BC \Rightarrow \dfrac{1}{AD} = \dfrac{BC}{HB.HC} \Rightarrow \dfrac{1}{AD} = \dfrac{HC+HB}{HB.HC} \Rightarrow \dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{HB} + \dfrac{1}{HC}$.

3) Ta có: $\widehat{PKM} = \widehat{ANM}$ (tứ giác $ANMK$ nội tiếp), $\widehat{ANM} = \widehat{MBC}$ (tứ giác $MNCB$ nội tiếp).

$\Rightarrow \widehat{PKB} = \widehat{PMB}$. Mà $\widehat{PMB} = \widehat{BCN}$ nên $\widehat{PKB} = \widehat{BCN} \Rightarrow$ Tứ giác $BKAC$ nội tiếp.

Do đó $\widehat{BKC} = \widehat{BAC} = 90^0$.

4) ΔABC vuông tại A, AH là đường cao $\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

Và $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{6^2} + \dfrac{1}{8^2}; BC^2 = 6^2 + 8^2$.

Nên $AH = 4,8$ và $BC = 10$.

Gọi J là tâm đường tròn $(BMN) \Rightarrow J$ là tâm đường tròn $(BMNC)$.

$\Rightarrow JI \perp MN, JO \perp BC$. Do đó $AI // JO, JI // OA$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $IAOJ$ là hình bình hành.

$\Rightarrow OJ = AI = \dfrac{AH}{2} = 2,4$.

ΔOBJ vuông tại $O \Rightarrow JB^2 = OB^2 + OJ^2 = 5^2 + 2,4^2 = \dfrac{769}{25} \Rightarrow JB = \dfrac{\sqrt{769}}{5}$.

Vậy bán kính của đường tròn (BMN) là $\dfrac{\sqrt{769}}{5}$.

Bài 9 (Lớp 10 Trường phổ thông Năng khiếu Đại học Quốc gia TP.HCM 2012 – 2013). Cho hình thang $ABCD\,(AB//CD)$ nội tiếp đường tròn (C) tâm O, bán kính R và có $\widehat{DAB} = 105^0, \widehat{ACD} = 30^0$.

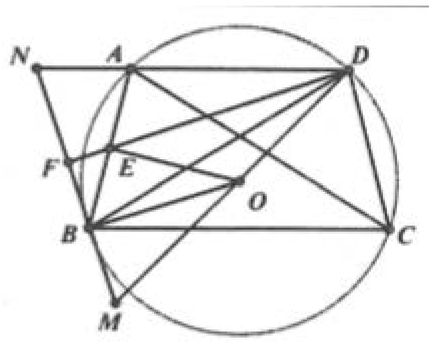
a) Tính $\dfrac{DB}{DC}$ và tính AB theo R.

b) Tiếp tuyến của (C) tại B cắt các đường thẳng DO, DA lần lượt tại M, N. Tính $\dfrac{MN}{MD}$.

c) Gọi E là trung điểm của AB, tia DE cắt MN tại F. Tính $\dfrac{BF}{BC}$.

Lời giải:

a) Hình thang $ABCD\,(AB//CD)$ nội tiếp đường tròn (C) nên là hình thang cân. Do đó $AD = BC, AC = BD, \widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 105^0, \widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 75^0$.



Mà $\widehat{ACD} = 30^0$ nên $\widehat{ACB} = 75^0 - 30^0 = 45^0$.

ΔACD có $\widehat{DAC} + \widehat{ADC} + \widehat{ACD} = 180^0$.

Nên $\widehat{DAC} = 75^0$. Do đó ΔCAD cân tại $C \Rightarrow AC = DC$. Nên $DB = DC\,(= AC)$.

Vậy $\dfrac{DB}{DC} = 1$.

$\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$ nên $\widehat{AOB} = 90^0$.

ΔOAB vuông tại $O \Rightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2$.

$AB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$.

Vậy $AB = \sqrt{2}R$.

b) Ta có: $\widehat{ACD} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOD} \Rightarrow \widehat{AOD} = 2\widehat{ACD} = 2.30^0 = 60^0$

ΔOAD cân tại $O\left(OA=OD=R\right)$ có:

$\widehat{AOD}=60^0\Rightarrow \Delta OAD$ đều $\Rightarrow AD=OD=R, \widehat{ADO}=\widehat{AOD}=60^0$.

Ta có: $AO\perp OB, MN\perp OB\Rightarrow AO//MN\Rightarrow \widehat{DMN}=\widehat{AOD}=60^0$.

ΔDMN có $\widehat{ADO}=60^0; \widehat{DMN}=60^0$.

Do đó ΔDMN đều $\Rightarrow MN=MD=DN$.

Vậy $\dfrac{MN}{MD}=1$.

c) ΔOAB vuông tại O, OE là đường trung tuyến $\Rightarrow OE=AE=BE$.

Xét ΔADE và ΔODE có $AD=OD\left(=R\right), AE=OE, DE$ (cạnh chung).

Do đó $\Delta ADE=\Delta ODE\left(c.c.c\right)\Rightarrow \widehat{ADE}=\widehat{ODE}$.

ΔDMN đều có DE là đường phân giác nên cũng là đường cao.

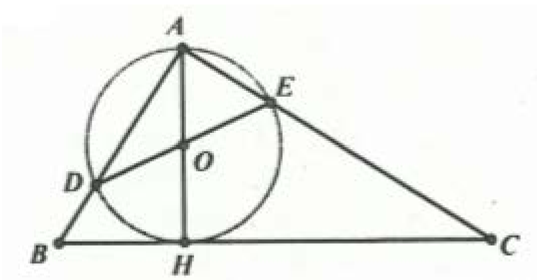
Ta có: $\widehat{EBF}=\widehat{ACB}=45^0$. Nên $BF=\cos\widehat{EBF}=\dfrac{\sqrt{2}R}{2}\cos 45^0=\dfrac{\sqrt{2}R}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{R}{2}$.

Mà $BD=AD=R$. Do đó $\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{\frac{R}{2}}{R}=\dfrac{1}{2}$. Vậy $\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{1}{2}$.

Bài 10 (Lớp 10 Chuyên Môn Chung Tỉnh Đồng Nai 2012 – 2013): Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính AH, đường tròn này cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại D và E.

1) Chứng minh tứ giác $BDEC$ là nội tiếp được đường tròn.
2) Chứng minh 3 điểm D,O,E thẳng hàng.
3) Cho biết $AB=3cm, BC=5cm$. Tính diện tích tứ giác $BDEC$.

Lời giải:



1) Ta có: $\widehat{AHE}=\widehat{ACH}$ (cùng phụ $\widehat{CHE}$).

Và $\widehat{AHE}=\widehat{ADE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AE).

Do đó $\widehat{ADE}=\widehat{ACH}$.

Vậy tứ giác $BDEC$ nội tiếp.

2) Ta có: $\widehat{DAE}=90^0\left(gt\right)$.

$\Rightarrow DE$ là đường kính của đường tròn $\left(O\right)$.

Vậy 3 điểm D,O,E thẳng hàng.

ΔABC vuông tại $A\Rightarrow AB^2+AC^2=BC^2$ (định lí Pitago).

Do đó: $3^2+AC^2=5^2\Rightarrow AC^2=16\Rightarrow AC=4$.

ΔABC vuông tại A, AH là đường cao:

$\Rightarrow AH.BC = AB.AC \Leftrightarrow AH.5 = 3.4 \Rightarrow AH = \dfrac{12}{5} \Rightarrow DE = AH = \dfrac{12}{5}$.

Xét ΔAED và ΔABC có: $\widehat{DAE}$ (chung), $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ (cm trên).

Do đó: $\Delta AED \sim \Delta ABC\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{DE}{BC}\right)^2 = \dfrac{144}{625}$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}.3.4 = 6$.

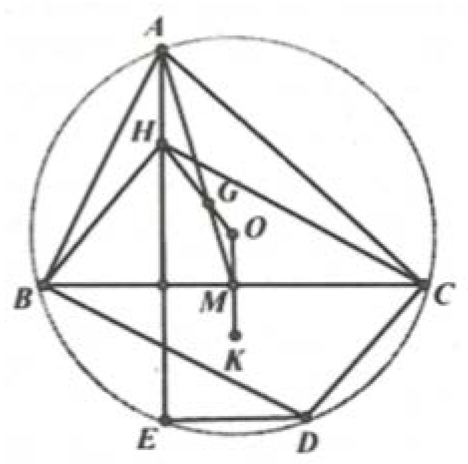
Nên $S_{AED} = \dfrac{144}{625}S_{ABC} = \dfrac{144}{625}.6 = \dfrac{864}{625}$.

$S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} = 6 - \dfrac{864}{625} = 4,6176\left(cm^2\right)$.

Bài 11 (Lớp 10 THPT Tỉnh Khánh Hòa 2011 – 2012): Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và H là trực tâm. Vẽ hình bình hành $BHCD$. Đường thẳng đi qua D và song song BC cắt đường thẳng AH tại E.

1) Chứng minh A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.
2) Chứng minh $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$.
3) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M là trung điểm BC, đường thẳng AM cắt OH tại G. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.
4) Giả sử $OD = a$. Hãy tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC theo a.

Lời giải:



1) Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành (gt)

$\Rightarrow BH//DC, DB//CH$.

Ta có $BH \perp AC$ (H là trực tâm ΔABC).

$BH//DC$

$\Rightarrow DC \perp AC \Rightarrow \widehat{ACD} = 90^0$.

Mặt khác có $CH \perp AB$ (H là trực tâm của ΔABC), $CH//BD$.

$\Rightarrow AB \perp BD, \widehat{ABD} = 90^0$.

Ta có: $\widehat{ACD} + \widehat{ABD} = 90^0 + 90^0 = 180^0$.

Do đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

$\Rightarrow A, B, C, D$ cùng thuộc một đường tròn. (1)

Tứ giác $AEDC$ có: $\widehat{AED} + \widehat{ACD} = 90^0 + 90^0 = 180^0$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEDC$ nội tiếp.

$\Rightarrow A, E, D, C$ cùng thuộc một đường tròn. (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A, B, C, D, E$ cùng thuộc một đường tròn.

Xét đường tròn (O) có $DE//BC\,(gt) \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{DC}$.

Vậy $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$.

2) Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành có M là trung điểm của BC (gt).

$\Rightarrow M$ là trung điểm của HD.

ΔAHD có AM, HO là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G.

$\Rightarrow G$ là trọng tâm $\Delta AHD \Rightarrow G$ thuộc đoạn thẳng AM và $AG = \dfrac{2}{3}AM$.

Xét ΔABC có AM là đường trung tuyến, G thuộc đoạn thẳng AM, $AG = \dfrac{2}{3}AM$.

Do đó G là trọng tâm ΔABC.

3) Gọi K là điểm đối xứng của O qua M. Ta có M là trung điểm của OK.

Mà M là trung điểm của BC (gt).

Do đó $BOCK$ là hình bình hành $\Rightarrow KB = OC, KC = OB$.

Ta có: $OM = \dfrac{1}{2}OK$ (M là trung điểm OK)

Mặt khác OM là đường trung bình của $\Delta AHD \Rightarrow OM = \dfrac{1}{2}AH$.

Nên $OK = AH$. Mà $AH \perp BC, OK \perp BC \Rightarrow AH//OK$.

Tứ giác $HAOK$ có $AH//OK, AH = OK \Rightarrow$ Tứ giác $HAOK$ là hình bình hành.

$\Rightarrow KH = OA$. Mà $OA = OB = OC = OA = OD = a$.

Ta có $KB = KH = KC = a$.

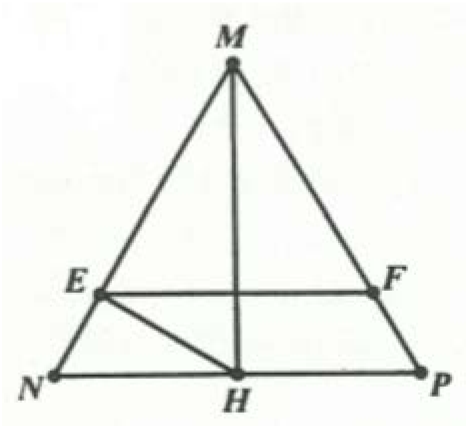
Do đó đường trong ngoại tiếp ΔBHC có tâm là K, bán kính là a.

Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp ΔBHC là $2\pi a$ (đvđd).

Bài 12 (Lớp 10 THPT Tỉnh Đồng Tháp 2012 – 2013):

1. Cho tam giác MNP cân tại M, đường cao $MH\,(H \in NP)$. Từ H kẻ $HE \perp NM\,(E \in NM)$.
   a) Biết $MN = 25cm, HN = 15cm$. Tính MH, ME.
   b) Đường thẳng đi qua E và song song với NP cắt cạnh MP tại F. Tứ giác $NPFE$ là hình gì? Vì sao?
2. Cho tam giác $ABC\,(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính BC, vẽ AH vuông góc với $BC\,(H \in BC)$. Trên cung nhỏ AC lấy điểm D bất kì (D khác A và C), dây BD cắt AH tại E.
   a) Chứng minh tứ giác $DEHC$ là tứ giác nội tiếp.
   b) Chứng minh $AB^2 = BE.BD$.

Lời giải:



1) a) ΔHMN vuông tại $H \Rightarrow MH^2 + HN^2 = MN^2$ (Pitago)

$\Rightarrow MH^2 + 15^2 = 25^2$

$\Rightarrow MH^2 = 25^2 - 15^2 = 400 \Rightarrow MH = 20\,(cm)$

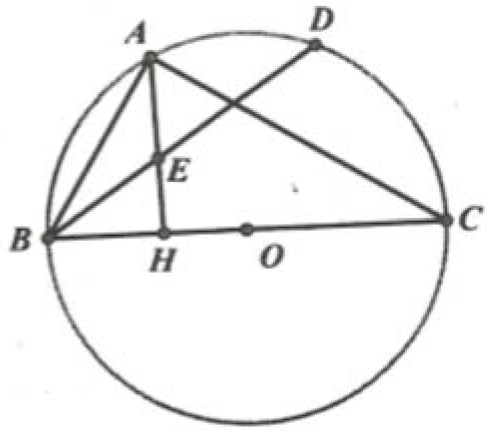
ΔHMN vuông tại H, HE là đường cao $\Rightarrow MH^2 = ME.MN$.

Do đó: $ME = \dfrac{MH^2}{MN} = \dfrac{20^2}{25} = 16\,(cm)$.

b) Tứ giác $NPFE$ có $EF\,//\,NP\,(gt) \Rightarrow NPFE$ là hình thang.

Mà $\widehat{ENP} = \widehat{FPN}$ (ΔMNP cân tại M).

Vậy tứ giác $NPFE$ là hình thang cân.



2) a) Ta có: $\widehat{EDC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Tứ giác $DEHC$ có: $\widehat{EDC} + \widehat{EHC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$.

Do đó tứ giác $DEHC$ nội tiếp.

b) Xét ΔHBE và ΔDBC có:

$\widehat{HBE}$ (chung); $\widehat{BHE} = \widehat{BDC}\left(= 90^0\right)$.

$\Rightarrow \Delta HBE \backsim \Delta DBC\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BH}{BD} \Rightarrow BE.BD = BH.BC$

Mặt khác $\widehat{BAC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

ΔABC vuông tại A, AH là đường cao $\Rightarrow AB^2 = BH.BC$.

Vậy $AB^2 = BE.BD\,(= BH.BC)$.

Bài 13 (Lớp 10 THPT Tỉnh Hải Phòng 2012 – 2013): Cho ΔABC có ba góc nhọn và $AB = AC$. Đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ cắt các cạnh BC, AC lần lượt tại I, K. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt AI tại D, H là giao điểm của AI và BK.

a) Chứng minh tứ giác $IHKC$ nội tiếp.

b) Chứng minh BC là tia phân giác của $\widehat{DBH}$ và tứ giác $BDCH$ là hình thoi.

c) Tính diện tích hình thoi $BDCH$ theo R trong trường hợp ΔABC đều.

Lời giải:

a) Ta có: $\widehat{AIB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

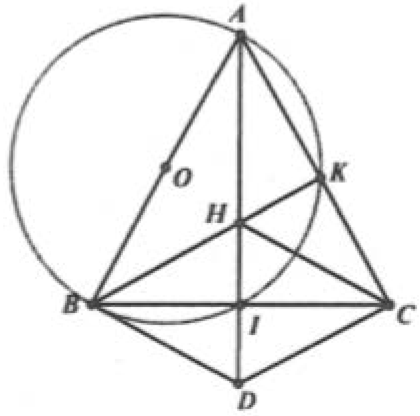
$\Rightarrow AI \perp BC \Rightarrow \widehat{HIC} = 90^0$.

Và $\widehat{AKB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow BK \perp AC \Rightarrow \widehat{HKC} = 90^0$.

Tứ giác $IHKC$ có $\widehat{HIC} + \widehat{HKC} = 180^0$.

Do đó tứ giác $IHKC$ nội tiếp.



b) Ta có ΔABC cân tại A (gt), AI là đường cao.

$\Rightarrow AI$ là tia phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{IAC}$.

Mà $\widehat{BAI} = \widehat{DBI}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

$\widehat{IAC} = \widehat{KBI}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung KI).

Do đó $\widehat{DBI} = \widehat{KBI}$. Vậy BC là tia phân giác của $\widehat{HBD}$.

ΔBHD có BI là đường phân giác và là đường cao nên ΔBHD cân tại $B \Rightarrow BI$ là đường trung tuyến $\Rightarrow IH = ID$.

Tứ giác $BDCH$ có I là trung điểm của BC, HD nên tứ giác $BDCH$ là hình bình hành.

Mà $HD \perp BC$. Vậy tứ giác $BHCD$ là hình thoi.

c) ΔABC đều $\Rightarrow AC = BC = AB = 2R, \widehat{ABI} = 60^0$.

ΔIAB vuông tại $I \Rightarrow AI = AB\sin\widehat{ABI} = 2R\sin 60^0 = \sqrt{3}R$.

H là trực tâm của $\Delta ABC\left(AI \perp BC, BK \perp AC\right)$ mà ΔABC đều.

Do đó H là trọng tâm ΔABC.

$\Rightarrow IH = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{\sqrt{3}R}{3}$; $HD = 2IH = \dfrac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Diện tích hình thoi $BDCH$ là: $\dfrac{1}{2}BC.HD = \dfrac{1}{2}.2R.\dfrac{2\sqrt{3}R}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}R^2}{3}$ (đvdt).

BÀI 2: HAI GÓC BẰNG NHAU

I. KIẾN THỨC:

- Tia phân giác của góc
- Hai góc đối đỉnh
- Các góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song
- Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác
- Tam giác cân
- Tính chất tia phân giác của một góc
- Hình thang cân
- Hình bình hành
- Hình chữ nhật
- Hình thoi
- Hình vuông
- Đa giác đều
- Tam giác đồng dạng
- Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau
- Góc với đường tròn

II. PHƯƠNG PHÁP:

Chứng minh hai góc này:

- Cùng bằng một góc thứ ba
- Là hai góc đối đỉnh
- Là hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau
- Là hai góc của một tam giác cân
- Là hai góc ở cùng một đáy của hình thang cân
- Là hai góc của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi
- Là hai góc của một đa giác đều
- Là hai góc (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung trong một đường tròn)

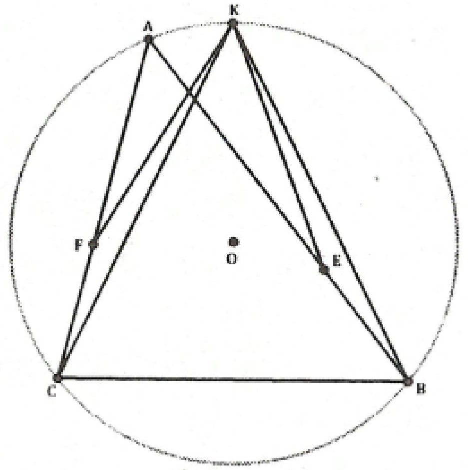
Ngoài ra còn có thể sử dụng tia phân giác của một góc, các góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song, dùng định lí về góc cùng bù hoặc cùng phụ với một góc thứ 3, dùng định lí về góc có cạnh tương ứng song song hoặc vuông góc.

3. BÀI TẬP:

Bài 1: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp $(O;R)(AB < AC)$. Trên các cạnh AB và AC lấy các điểm E, F sao cho $BE = CF$. Gọi K là điểm chính giữa của cung lớn BC. Chứng minh $\widehat{EKF} = \widehat{BKC}$

Lời giải:

Xét ΔEBK và ΔFCK có:



$\widehat{EBK} = \widehat{FCK}$ (cùng chắn cung AK)

$BE = CF$ (gt)

$BK = CK$ (Vì K là điểm chính giữa cung BC)

Do đó $\Delta EBK = \Delta FCK$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{EKB} = \widehat{FKC} \Rightarrow \widehat{EKB} + \widehat{BKF} = \widehat{FKC} + \widehat{BKF}$

$\Rightarrow \widehat{EKF} = \widehat{BKC}$

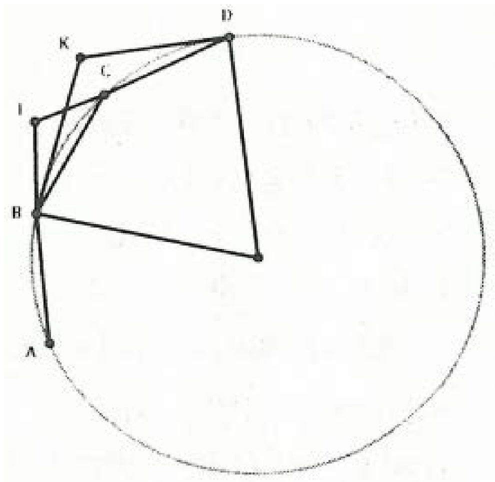
Bài 2: Trên đường tròn $(O;R)$, vẽ ba dây cung liên tiếp bằng nhau AB, BC, CD mỗi dây có độ dài nhỏ hơn R. Các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại I, các tiếp tuyến của đường tròn tại B , D cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

a. $\widehat{BIC} = \widehat{BKD}$

b. $\widehat{KBC} = \widehat{DBC}$

Lời giải:

a. Ta có $AB = BC = CD \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} (1)$



Mặt khác $\widehat{BIC} = \dfrac{sd\overset{\frown}{AmD} - sd\overset{\frown}{BC}}{2} (2)$

(góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn)

$\widehat{BKD} = \dfrac{sd\overset{\frown}{BAD} - sd\overset{\frown}{BCD}}{2}$

$= \dfrac{sd\left(\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{AmD}\right) - sd\left(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}\right)}{2}$ (3)

(góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow \widehat{BKD} = \dfrac{sd\overset{\frown}{AmD} - sd\overset{\frown}{BC}}{2} (4)$

Từ (2) và (4) $\Rightarrow \widehat{BIC} = \widehat{BKD}$

b. Ta có: $\widehat{KBC} = \dfrac{sd\overset{\frown}{BC}}{2}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) (5)

$\widehat{CBD} = \dfrac{sd\overset{\frown}{CD}}{2}$ (góc nội tiếp) (6)

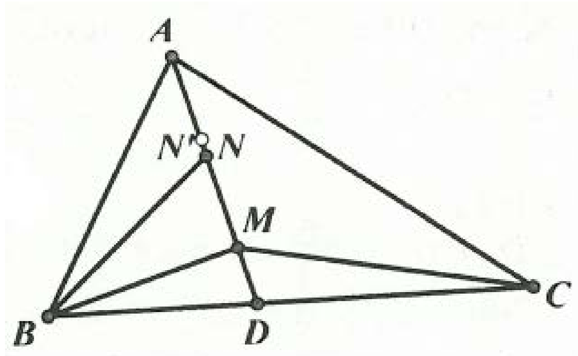
Từ (1), (5) và (6) $\Rightarrow \widehat{KBC} = \widehat{CBD}$

Bài 3: Cho tam giác ABC, AD là phân giác trong của góc A. Trên AD lấy M, N sao cho $\widehat{MBA} = \widehat{NBD}$. Chứng minh rằng: $\widehat{MCA} = \widehat{NCD}$.

Lời giải:

Áp dụng bài 4 cho tam giác ABD ta có:

$\dfrac{AM.AN}{DM.DN}=\left(\dfrac{AB}{DB}\right)^2(1)$



Gọi N' là điểm trên AD sao cho $\widehat{ACM}=\widehat{N'CD}$

Áp dụng bài 4 cho tam giác ACD ta có:

$\dfrac{AM.AN'}{DM.DN'}=\left(\dfrac{AC}{DC}\right)^2(2)$

Mặt khác theo tính chất đường phân giác ta có: $\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{DC}$

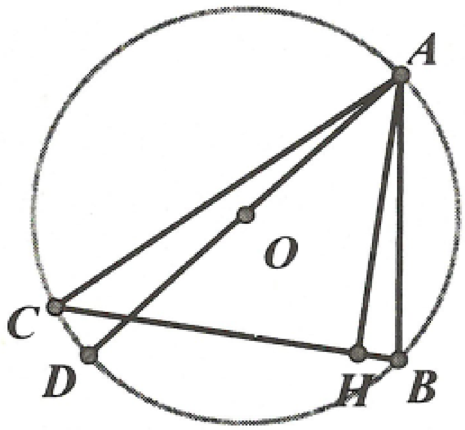
Nên từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{AN}{DN}=AN'/DN'$

Do M và N' cùng thuộc đoạn AD nên N trùng N'. Vậy $\widehat{ACM}=\widehat{NCD}$.

Bài 4: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn. Kẻ đường cao AH của tam giác và đường kính AD của đường tròn. Chứng minh rằng $\widehat{BAH}=\widehat{DAC}$.

Lời giải:

Ta có $\widehat{ACD}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)



$\Rightarrow \widehat{DAC}=90°-\widehat{ADC}$

Lại có $AH\perp BC$

$\Rightarrow \widehat{BAH}=90°-\widehat{ABH}=90°-\widehat{ABC}$.

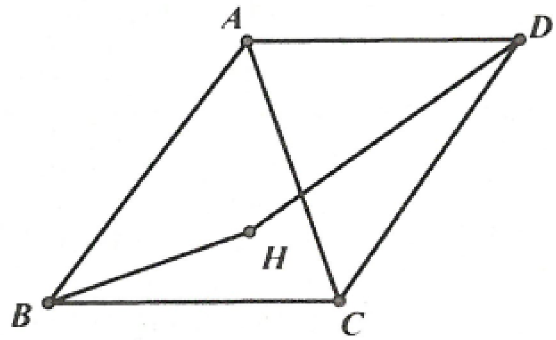
Mặt khác $\widehat{ADC}=\widehat{ABC}$

(hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{DAC}$

Bài 5: Cho tam giác ABC nhọn có H là trực tâm. Dựng hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng $\widehat{ABH}=\widehat{ADH}$

Bình luận: Sử dụng tính chất tứ giác nội tiếp và đường tròn để chứng minh đẳng thức về góc.



Lời giải:

Ta có $CD//AB\Rightarrow CD\perp CH$,

mặt khác $AD\perp AH$

$\Rightarrow$ Tứ giác ADCH nội tiếp

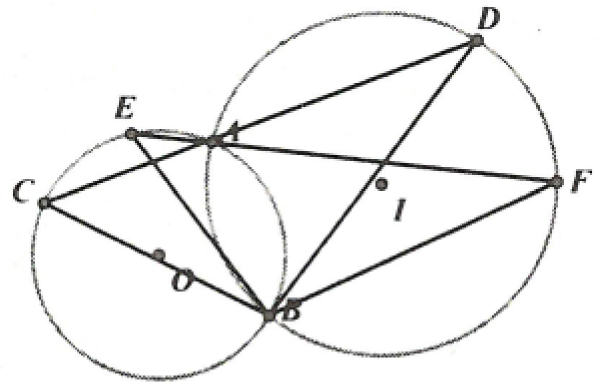
$\Rightarrow \widehat{ADH}=\widehat{ACH}$

Ta lại có $\widehat{ABH}=\widehat{ACH}=90°-\widehat{A}\Rightarrow \widehat{ABH}=\widehat{ADH}$

Bài 6: Cho hai đường tròn (O) và (I) cắt nhau tại A, B. Qua A kẻ hai đường thẳng phân biệt, đường thẳng thứ nhất lần lượt cắt (O) và (I) tại C và (D), đường thẳng thứ hai lần lượt cắt (O) và (I) tại E và F. Chứng minh rằng $\widehat{CBD}=\widehat{EBF}$

Lời giải:

<u>Cách 1:</u>



Theo tính chất góc nội tiếp ta có:

$\widehat{DBF}=\widehat{DAF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DF trong đường tròn (I))

$\widehat{CBE}=\widehat{CAE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CE trong đường tròn (O))

$\widehat{DAF}=\widehat{CAE}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{DAF}=\widehat{CBE}$.

Từ đây, ta có $\widehat{CBD}=\widehat{EBF}$

<u>Cách 2:</u>

Xét hai tam giác CBD và EBF có:

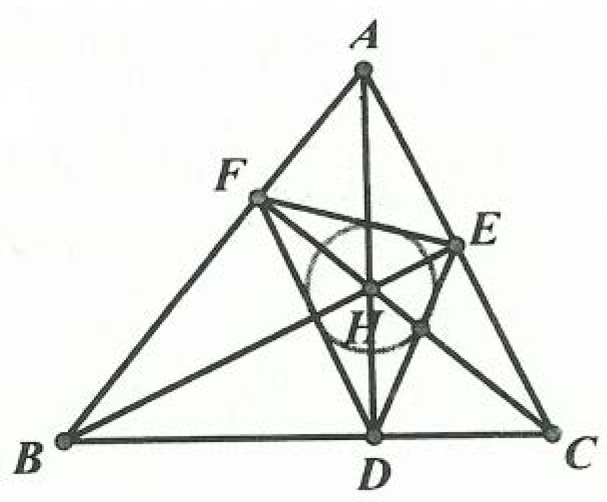
$\widehat{ACB}=\widehat{AEB}$ (hai góc nối tiếp cùng chắn cung AB trong đường tròn (O))

$\widehat{AKB}=\widehat{CKD}$ (hai góc nối tiếp cùng chắn cung AB trong đường tròn (I))

$\Rightarrow \Delta CBD \sim \Delta EBF \Rightarrow \widehat{ADE}=\widehat{ABC}(g.g) \Rightarrow \widehat{CBD}=\widehat{EBF}$

Bài 7: Cho tam giác nhọn ABC. Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Lời giải:



Ta chứng minh $\widehat{HDE}=\widehat{HDF}$

Tứ giác BDHF nội tiếp đường tròn vì có

$\widehat{BFH}=\widehat{BDH}=90^\circ \Rightarrow \widehat{HDF}=\widehat{HBF}$

Tứ giác CDHE nội tiếp đường tròn vì có

$\widehat{CDH}=\widehat{CEH}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HDE}=\widehat{HCE}$

Tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn vì có

$\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^\circ \Rightarrow \widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^\circ$

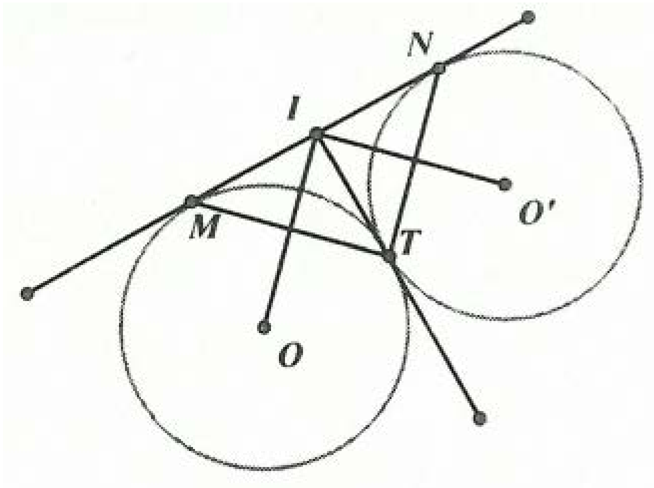
Từ các đẳng thức trên ta có $\widehat{HDE}=\widehat{HDF}$

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{HED} = \widehat{HEF}$

Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Bài 8: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại T. Giả sử MN là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (M thuộc (O), N thuộc (O')). Tiếp tuyến chung trong tại T cắt MN tại I. Chứng minh $\widehat{OIO'} = \widehat{MTN} = 90°$

Lời giải:



Ta có IM và IT là hai tiếp tuyến của (O),

suy ra IO là phân giác của góc TIM và $IM = IT$.

IN và IT là hai tiếp tuyến của (O'), suy ra IO' là phân giác của góc TIN và $IN = IT$.

Vì IO và IO' là hai tia phân giác của hai góc kề bù TIM và TIN nên

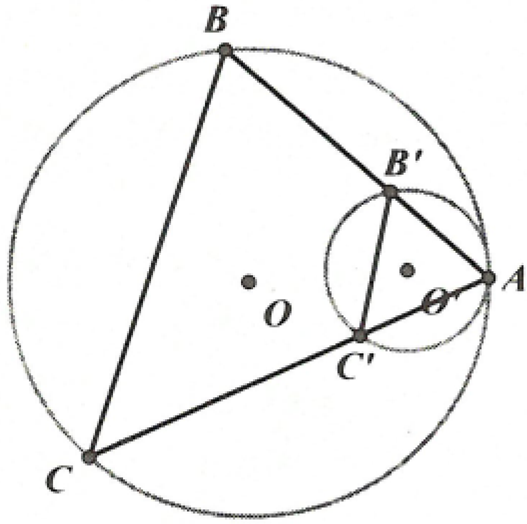
$IO \perp IO' \Rightarrow \widehat{OIO'} = 90°$

Ta có $IM = IN = IT$. Tam giác MIN có trung tuyến TI bằng một nửa cạnh MN nên tam giác vuông tại T.

Vậy $\widehat{MTN} = 90°$.

Bài 9: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Qua A, kẻ hai đường thẳng , đường thẳng thứ nhất cắt (O) và (O') lần lượt tại B và B', đường thẳng thứ hai cắt (O) và (O') lần lượt tại C và C' (các điểm B, C, B', C' khác A). Chứng minh rằng $\widehat{ABC} = \widehat{AB'C'}, BC//B'C'$

Lời giải:



Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AC không chứa điểm B, kẻ tia Ax tiếp xúc với hai đường tròn tại A. Với đường tròn (O), ta có:

$\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}$ (tính chất góc nội tiếp)

$\widehat{CAx} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây cung)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CAx}$

Với đường tròn (O'), ta có: $\angle AB'C' = \dfrac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{AC'}$ (Tính chất góc nội tiếp)

$\widehat{C'Ax} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{AC'}$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây cung)

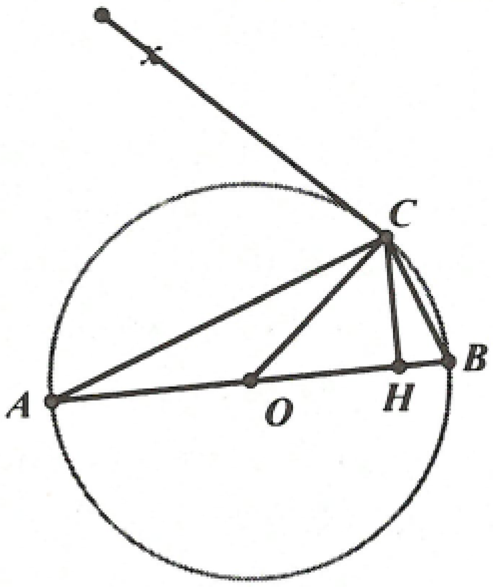
$\Rightarrow \widehat{CAx} = \widehat{C'Ax}$

Ta có $\widehat{CAx} = \widehat{C'Ax}$. Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{AB'C'}$, vì hai góc này ở vị trí đồng vị nên $BC // B'C'$

Bài 10: Cho đường tròn tâm O đường kính AB và C là một điểm nằm trên đường tròn (C khác A và B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Trên nửa mặt phẳng chứa điểm A có bờ là đường thẳng BC kẻ tia Cx tiếp xúc với đường tròn tại C. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{ACH} = \widehat{BCO}$ b) CA là tia phân giác góc HCx

Lời giải:



a) Ta có $\angle ACB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{CAH} + \widehat{CBO} = 90°$

$\widehat{AHC} = 90°$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{CAH} + \widehat{ACH} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{CBO}$ (hai góc cùng phụ với góc CAH thì bằng nhau)

Mặt khác, CO là trung tuyến ứng với cạnh huyền AB

$\Rightarrow CO = OB = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O.

$\Rightarrow \widehat{BCO} = \widehat{CBO} \Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{BCO}$ (tính chất bắc cầu).

b) Ta có $\widehat{ACx} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{AC}$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây cung)

$\widehat{CBO} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{AC}$ (tính chất góc nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{ACx} = \widehat{BCO}$, mà $\widehat{ACH} = \widehat{BCO} \Rightarrow \widehat{ACx} = \widehat{ACH}$

Vậy CA là tia phân giác góc HCx.

Bài 11: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ các đường cao BD và CE. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}, \widehat{AED} = \widehat{ACB}$ b) $DE \perp OA$

Lời giải:

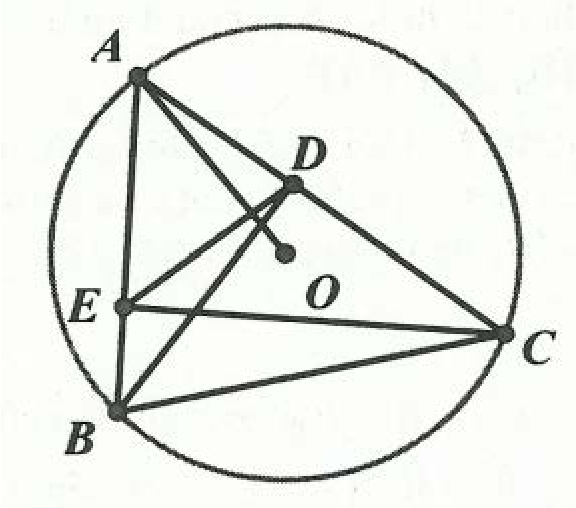
a) Ta có $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90°$ (giả thiết)

$\Rightarrow$ Tứ giác BEDC nội tiếp đường tròn

$\widehat{ADE} = \widehat{EBC}$ (tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC}$

$\widehat{AED}=\widehat{DCB}$ (tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{AED}=\widehat{ACB}$



b) Trên nửa mặt phẳng chứa điểm B có bờ là đường thẳng AC, kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A.

Ta có $\widehat{BAx}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AB}$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và 1 dây cung)

$\Rightarrow \widehat{MBI}=\widehat{MEC}$ (tính chất góc nội tiếp)

$\widehat{MBI}=\widehat{MEC}$, mặt khác $\widehat{AED}=\widehat{ACB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{AED}-\widehat{BAx}\Rightarrow DE//Ax$

Vì $Ax\perp OA$ (tính chất tiếp tuyến) nên $DE\perp OA$

b) Ta có $\widehat{ACx}=\frac{1}{2}sd\,\widehat{AC}$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây cung)

$\widehat{CBO}=\frac{1}{2}sd\,\widehat{AC}$ (tính chất góc nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{ACx}=\widehat{BCO}$, mà $\widehat{ACH}=\widehat{BCO}\Rightarrow \widehat{ACx}=\widehat{ACH}$.

Vậy CA là tia phân giác góc HCx.

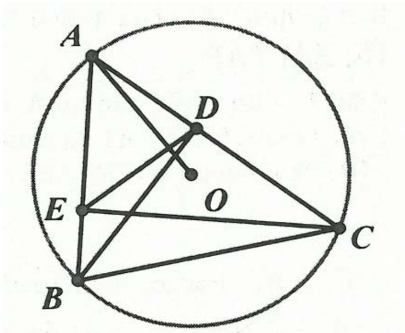
Bài 11: Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn tâm *O*. Kẻ các đường cao *BD* và *CE*. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ADE}=\widehat{ABC},\widehat{AED}=\widehat{ACB}$ b) $DE\perp OA$

Lời giải:

a) Ta có $\widehat{BDC}=\widehat{BEC}=90^o$ (giả thiết)

$\Rightarrow$ Tứ giác BEDC nội tiếp đường tròn



$\widehat{ADE}=\widehat{EBC}$ (tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{ADE}=\widehat{ABC}$

$\widehat{ADE}=\widehat{DCB}$ (tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{AED}=\widehat{ACB}$

b) Trên nửa mặt phẳng chứa điểm *B* có bờ là đường thẳng *AC*, kẻ tia *Ax* tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* tại *A*.

Ta có $\widehat{BAx}=\frac{1}{2}sd\,\widehat{AB}$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và 1 dây cung)

$\Rightarrow \widehat{MBI}=\widehat{MEC}$ (tính chất góc nội tiếp)

$\widehat{MBI}=\widehat{MEC}$, mặt khác $\widehat{AED}=\widehat{ACB}$(chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{AED}-\widehat{BAx}\Rightarrow DE//Ax$

Vì $Ax\perp OA$ (tính chất tiếp tuyến) nên $DE\perp OA$

BÀI 3: HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC:

- Hai đường thẳng song song
- Tiền đề ơ clit về đường thẳng song song
- Từ vuông góc đến song song
- Hình thang, hình thang cân
- Đường trung bình của tam giác, đường trung bình của hình thang
- Hình bình hành
- Hình chữ nhật
- Hình thoi
- Hình vuông

- Định lí đảo của định lí Talet

II. PHƯƠNG PHÁP:

Chứng minh hai đường thẳng:

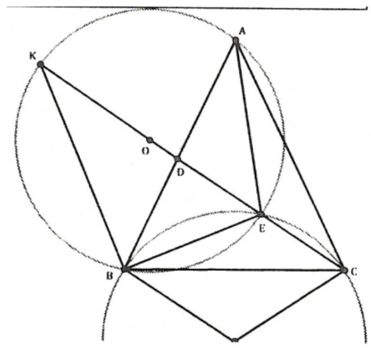
- Cùng song song với đường thẳng thứ ba
- Cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba
- Hai cạnh đáy của hình thang
- Hai cạnh đối của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông

Ngoài ra còn có thể sử dụng dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song, tiên đề ơ clít, đường trung bình của tam giác, đường trung bình của hình thang, định lí đảo của định lí Talet, chứng minh bằng phản chứng...

III. BÀI TẬP:

Bài 1: Cho *ΔABC* cân tại *A*, vẽ đường tròn *(I)* tiếp xúc với *AB* tại *B* và tiếp xúc với *AC* tại *C*. Gọi *D* là trung điểm *AB*. Tia *CD* cắt *(I)* ở *E* và cắt đường tròn *(O)* ngoại tiếp tam giác *ABE* ở *K*. Chứng minh rằng *BK // AC*.

Lời giải:



$\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$) (1)

$\widehat{B_1} = \widehat{K_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$) (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{C_1}$ mà $\widehat{K_1}$ và $\widehat{C_1}$, so le trong

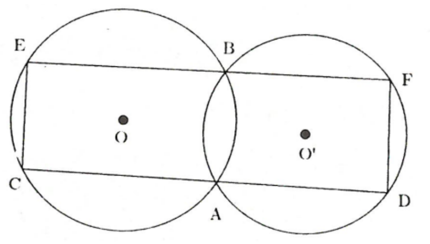
$\Rightarrow AK // BC \Rightarrow \widehat{DAK} = \widehat{DBC}$

$\Delta DAK = \Delta DBC (g-c-g) \Rightarrow DK = DC$

Do đó tứ giác *BACK* là hình bình hành $\Rightarrow AC // BK$

Bài 2: Cho hai đường tròn tâm *O* và tâm *O'* cắt nhau tại *A* và *B*. Đường thẳng qua *A* cắt đường tròn *(O)* tại *C* và đường tròn *(O')* tại *D*. Đường thẳng qua *B* cắt đường tròn *(O)* tại *E* và đường tròn *(O')* tại *F*. Chứng minh *CE // DF*.

Lời giải:



Ta có: $\widehat{ACE} + \widehat{ABE} = 180^o$

(*ABEC* là tứ giác nội tiếp) (1)

$\widehat{ADF} + \widehat{ABF} = 180^o$

(*ABFD* là tứ giác nội tiếp) (2)

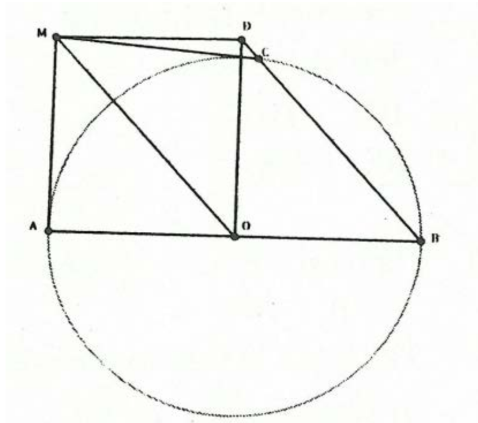
Mặt khác : $\widehat{ABE} + \widehat{ABF} = 180^o$ (2 góc kề bù) (3)

Từ (1) , (2) , (3) $\Rightarrow \widehat{ACE} + \widehat{ADF} = 180^o$ Hay $\widehat{ECD} + \widehat{CDF} = 180^o \Rightarrow CE // DF$

Bài 3: Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB,* tia tiếp tuyến *A*x. Trên tia *Ax* lấy điểm *M* vẽ tiếp tuyến *MC* (*C* là tiếp điểm). Đường thẳng vuông góc với *AB* tại *O* cắt *BC* tại *D*. Chứng minh *DM // AB*.

Lời giải:

Ta có *MA*, *MC* là hai tiếp tuyến của *(O)*



nên $\widehat{AOM}=\widehat{COM}=\frac{1}{2}\widehat{AOC}$ (1)

Mặt khác: $\widehat{B}=\frac{1}{2}\widehat{AOC}$ (hệ quả góc nội tiếp) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{AOM}=\widehat{B}$

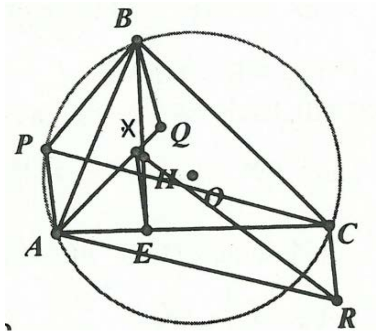
mà $\widehat{AOM}$ và $\widehat{B}$ đồng vị nên : $OM\,//\,BD$ (3)

Mặt khác $\Delta AOM=\Delta OBD(g-c-g)\Rightarrow OM=BD$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ *OBDM* là hình bình hành $\Rightarrow$ *DM // AB.*

Bài 4: Tam giác *ABC* có trực tâm *H*, đường cao *BE*. Điểm *P* trên đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Vẽ các hình bình hành *PAQB* và *PARC*. Giao điểm *AQ* và *HR* là *X*. Chứng minh rằng *EX* song song với *AP*.

Lời giải:



Ta có: $\widehat{ARC}=\widehat{APC}=\widehat{ABC}=180^o-\widehat{AHC}$

Tứ giác *AHCR* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AHX}=\widehat{ACR}=\widehat{CAP}$ (1)

Tương tự ta có: tứ giác *AHBQ* nội tiếp

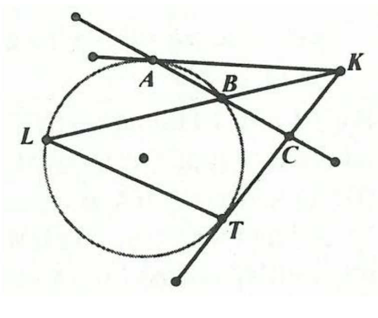
$\Rightarrow \widehat{XAH}=\widehat{QBH}=\widehat{QBA}+\widehat{ABH}=\widehat{CAB}+\widehat{ABH}=90^o$

$\Rightarrow \widehat{AXH}=90^o=\widehat{AEH}$ hay tứ giác *AXEH* nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{XEA}=\widehat{AHX}=\widehat{CAP}$ (theo (1)) $\Rightarrow EX\,//\,AP$

Bài 5: Cho *(O)* và *K* nằm ngoài *(O)* vẽ các tiếp tuyến *KA*, *KT* với *(O).* Một đường thẳng qua *A* cắt *(O)* tại *B*, cắt *KT* tại *C* sao cho *B* là trung điểm của *AC*, *KB* giao với *(O)* tại *L*. Chứng minh *LT* song song với *BC*.

Lời giải



Ta có $\Delta KAL \backsim \Delta AKB \Rightarrow \frac{AL}{AB}=\frac{KL}{KA}$

$\Delta KLT \backsim \Delta KTB \Rightarrow \frac{TL}{TB}=\frac{KL}{KT}$ và $KA=KT$

$\Rightarrow \frac{AL}{AB}=\frac{TL}{TB}\Rightarrow \frac{TL}{TB}=\frac{AL}{BC};ALT=TBC$

$\Rightarrow \Delta ALT \backsim \Delta CBT \Rightarrow \widehat{LAT}=\widehat{BCT}\Rightarrow \widehat{KTL}=\widehat{TCB}\Rightarrow LT\,//\,BC$

Bài 6: (Lớp 10 THPT Tỉnh Đắk Lắk 2012 - 2013) : Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn *O* (*AB* < *AC*). Hai tiếp tuyến tại *B* và *C* cắt nhau tại *M*, *AM* cắt đường tròn *(O)* tại điểm thứ hai *D*, *E* là trung điểm đoạn *AD*, *EC* cắt đường tròn *(O)* tại điểm thứ hai *F*. Chứng minh rằng :

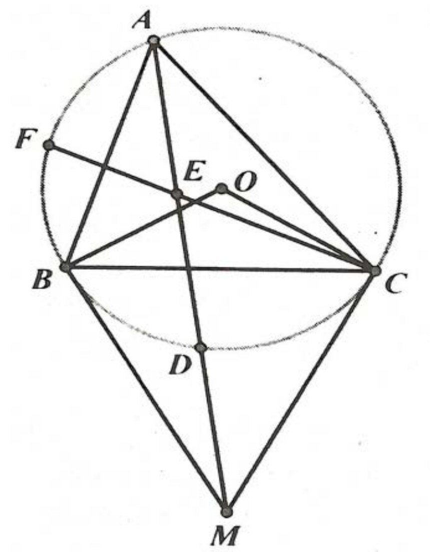
1. Tứ giác *OEBM* nội tiếp.

2. $MB^2=MA.MD$

3. $\widehat{BFC}=\widehat{MOC}$

4. $BF // AM$

Lời giải:



1. E là trung điểm dây cung AD và $AD \neq 2R$

$\Rightarrow OE \perp AD$

Ta có MB là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow MB \perp OB$

Vì $\widehat{OBM} = \widehat{OEM} \left(= 90^o\right)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OEBM$ nội tiếp

2. Xét ΔMBD và ΔMAB có:

$\widehat{BMD}$ (chung); $\widehat{MBD} = \widehat{MAB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \Delta MBD \backsim \Delta MAB\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{MD}{MB}$

Vậy $MB^2 = MA.MD$

3. MB, MC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) (gt)

OM là tia phân giác $\widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{MOC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$

Mặt khác $\widehat{BFC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$ (hệ quả góc nội tiếp) Vậy $\widehat{BFC} = \widehat{MOC}$

4. Ta có $\widehat{MEO} + \widehat{MOC} = 180^o$

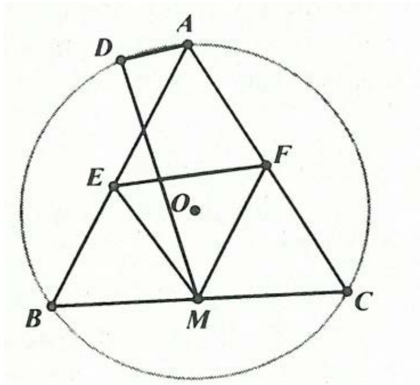
$\Rightarrow$ Tứ giác $MEOC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{MOC}$ Mà $\widehat{BFC} = \widehat{MOC}$ (câu 3). Do đó $\widehat{MEC} = \widehat{BFC}$

Ta có $\widehat{MEC}$ và $\widehat{BFC}$ là hai góc đồng vị

Vậy $BF // AM$.

Bài 7: **(Lớp 10 Chuyên THPT TP.HCM 2011 - 2012)** : Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn *(O)*. Từ điểm D trên cung nhỏ AB của đường tròn *(O)*, ta kẻ đường thẳng vuông góc với AD, đường thẳng này cắt cạnh BC tại M. Đường trung trực của DM cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F. Chứng minh $AEMF$ là hình bình hành.

Lời giải:



<u>**Cách 1**</u> :

Gọi N là giao điểm của DM và đường tròn *(O)*

$\widehat{ADN} = 90^o \Rightarrow AN$ là đường kính của *(O)*

Do đó N là điểm chính giữa cung BC.

Qua M vẽ đường thẳng song song với AC cắt AB ở S

Vẽ đường thẳng song song với AB cắt AC tại K.

Ta có tứ giác $ASMK$ là hình bình hành

Có $SM//AC \Rightarrow \widehat{BSM}=\widehat{BAC}, \widehat{SMB}=\widehat{ACB}$

Nên $\widehat{SMB}=\widehat{SBM}\left(=\widehat{ACB}\right) \Rightarrow \Delta SBM$ cân tại S $\Rightarrow SB=SM$

Mặt khác $\widehat{BDM}=\widehat{BAN}=\dfrac{1}{2}\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}\widehat{BSM}$

S là giao điểm của đường trung trực đoạn thẳng *BM* và cung chứa góc có số đo bằng $2\widehat{BDM}$ nên S là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDBM.

$\Rightarrow SD = SM$.

Chứng minh tương tự cũng có *KD* = *KM*.

Do đó *SK* là đường trung trực của đoạn thẳng *DM*

Nên $E \equiv S$, $F \equiv K$

Tứ giác *ASMK* là hình bình hành

Do đó tứ giác *AEMF* là hình bình hành.

<u>Cách 2</u>:

Gọi *N*, *I*, *K* lần lượt là giao điểm của *EF* với *BD*, *AM*, *DM*.

Ta có $AD \perp DM, NF \perp DM \Rightarrow AD//NF \Rightarrow \widehat{ADN}+\widehat{DNF}=180^o$

Mà $\widehat{ADN}+\widehat{ACB}=180^o$ (*ADBC* nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{DNF}=\widehat{ACB} \Rightarrow$ Tứ giác *BNFC* nội tiếp

ΔMAD có $NF//AD, KD=KM \Rightarrow IA=IM$

Ta có $\widehat{ANM}=\widehat{END}$ (đối xứng trục)

$\widehat{DNE}=\widehat{ACB}, \widehat{ACB}=\widehat{ABC}$ (ΔABC cân tại *A*)

$\Rightarrow \widehat{ENM}=\widehat{EBM} \Rightarrow$ Tứ giác *BNEM* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DNE}=\widehat{EMB}$

Nên $\Rightarrow \widehat{EMB}=\widehat{ACB} \Rightarrow ME//AC$

Xét ΔIEM và ΔIFA có $\widehat{EIM}=\widehat{FIA}$ (đối đỉnh), *IM* = *IA*

$\widehat{IME}=\widehat{IAF}\left(ME//AC\right)$

Do đó $\Delta IEM=\Delta IFA\left(g.c.g\right) \Rightarrow ME=AF$

Tứ giác *AEMF* có *ME // AF* và *ME* = *AF*

Vậy tứ giác *AEMF* là hình bình hành.

Bài 8: **(Lớp 10 Chuyên THPT TP.HCM 2011 - 2012)** : Cho tam giác *ABC* có hai đường phân giác trong *BD* và *CE*. *M* là một điểm bất kì trên đoạn *DE*. Gọi *H*, *K*, *L* lần lượt là hình chiếu của *M* trên các cạnh *BC*, *CA*, *AB*. Chứng minh *MH* = *MK* + *ML*.

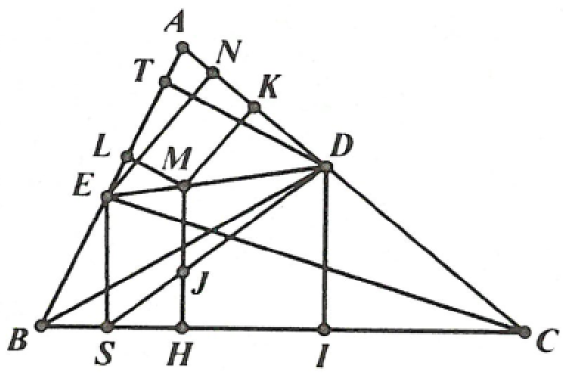
Lời giải:

Vẽ $ES \perp BC$ tại S.

Gọi J là giao điểm của DS và MH

Vẽ $EN \perp AC$. tại N, $DT \perp AB$ tại T, $DI \perp BC$ tại I

Ta có $ML // DT, MK // EN, ES // MH // DI$



Mà BD, CE là các đường phân giác của ΔABC. Nên $DT = DI$, $EN = ES$.

ΔDEN có $MK // EN \Rightarrow \dfrac{MK}{EN} = \dfrac{DM}{DE}$

ΔDES có $MJ // ES \Rightarrow \dfrac{MJ}{ES} = \dfrac{DM}{DE}$

Do vậy $\dfrac{MK}{EN} = \dfrac{MJ}{ES}\left(= \dfrac{DM}{DE}\right), EN = ES \Rightarrow MK = MJ$

ΔDET có $ML // DT \Rightarrow \dfrac{ML}{DT} = \dfrac{EM}{ED}$

ΔDES có $MJ // ES \Rightarrow \dfrac{EM}{ED} = \dfrac{SJ}{SD}$

ΔSDI có $JH // DI \Rightarrow \dfrac{SJ}{SD} = \dfrac{JH}{DI}$

Nên có $\dfrac{ML}{DT} = \dfrac{JH}{DI}, DT = DI \Rightarrow ML = JH$

Do vậy $MH = MJ + JH = MK + KL$

CHƯƠNG 5:
HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Kiến thức:

- Hai đường thẳng vuông góc
- Tính chất của tam giác cân
- Định lí Pitago
- Đường trung trực của đoạn thẳng
- Đường cao của tam giác
- Đối xứng trục
- Hình thoi
- Hình vuông
- Đường kính và dây của hình tròn
- Tiếp tuyến của hình tròn
- Hai đường tròn cắt nhau
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn
- Tứ giác nội tiếp

2. Phương pháp:

Chứng minh hai đường thẳng này :

- Cắt nhau và tạo thành một góc 90°
- Là hai tia phân giác của hai góc kề bù
- Là hai đường chéo của một hình thoi, hình vuông

Ngoài ra còn có thể sử dụng : tính chất của tam giác cân, định lí Pitago, đường trung trực của đoạn thẳng, đường cao của tam giác, đối xứng trục, đường kính và dây của đường tròn, dây cung chung và đoạn nối tâm của hai đường tròn cắt nhau, tiếp tuyến của đường tròn, góc nội tiếp, tứ giác nội tiếp, đường thẳng vuông góc với một tròn hai đường thẳng song song...

3. Bài tập:

Bài 1: Cho *ΔABC* cân tại *A* nội tiếp đường tròn *(O)* đường cao *AH*. Điểm *D* thuộc tia đối của tia *AB*, *CD* cắt đường tròn *(O)* tại *E*. Chứng minh : $AH \perp FD$

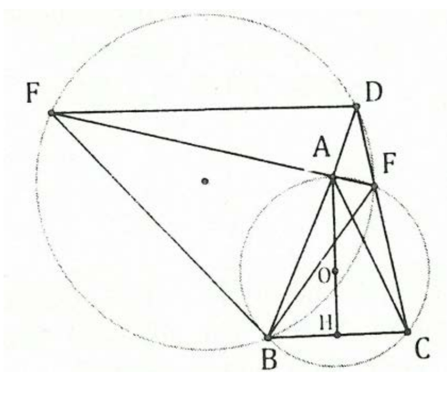
Lời giải:

Tứ giác *ABCE* nội tiếp nên :

$\widehat{AED} = \widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung *AB* của đường tròn *(O)*) (1)

ΔABC cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (2)

Ta lại có : $\widehat{ABF} = \widehat{ACB}$ (3)



Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{DEA}=\widehat{ABF}$

$\Rightarrow$ Tứ giác *DEBF* nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{FDB}=\widehat{AEB}$

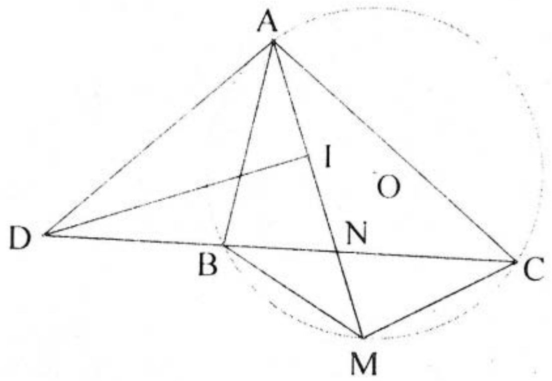
Mà $\widehat{AEB}=\widehat{ACB}=\widehat{ABC}$

$\Rightarrow \widehat{FDB}=\widehat{ABC}$ ở vị trí so le trong

$\Rightarrow FD//BC,$, vì $AH\perp BC$ nên $FD\perp AH$.

Bài 2: Cho *A*, *B*, *C* là ba điểm thuộc đường tròn *(O)*, sao cho tiếp tuyến tại *A* cắt tia *BC* tại *D*, tia phân giác *BAC* cắt đường tròn *(O)* ở *M*, tia phân giác của góc *ADB* cắt *AM* ở *I*. Chứng minh $DI\perp AM$.

Lời giải :



Gọi giao điểm của *AM* và *BC* là *N*, ta có :

$\widehat{AND}=\dfrac{sd\,\overset{\frown}{AC}+sd\,\overset{\frown}{BM}}{2}$ (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

Mà $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM}$ (vì AM là tia phân giác $\widehat{BAC}$) nên

$\widehat{AND}=\dfrac{sd\,\overset{\frown}{AC}+sd\,\overset{\frown}{CM}}{2}=\dfrac{sd\,\overset{\frown}{AM}}{2}$ (1)

Mặt khác $\widehat{NAD}=\dfrac{sd\,\overset{\frown}{AM}}{2}$ (2)

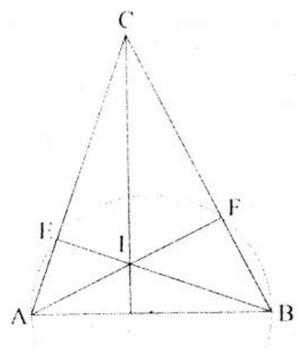
(góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{AND}=\widehat{NAD}\Rightarrow \Delta AND$ cân tại *D*,

Lại có *DI* là phân giác nên *DI* đồng thời là đường cao.

Do đó $DI\perp AM$.

Bài 3: Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn. Đường tròn đường kính *AB* cắt *CA*, *CB* lần lượt ở *E* và *F*. Gọi *I* là giao điểm của *AF* và *BE*. Chứng minh $CI\perp AB$.



Lời giải:

Ta có: $\widehat{AEB}=\widehat{AFB}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BE\perp AC, AF\perp BC$

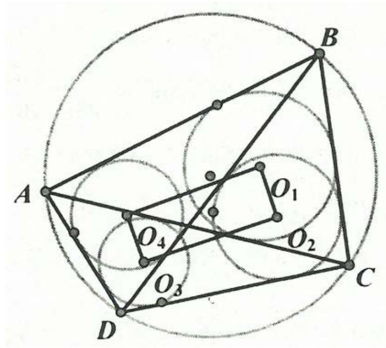
ΔABC có *I* là giao điểm hai đường cao *AF* và *BE* nên *I* là trực tâm của *ΔABC*, do đó $CI\perp AB$

Bài 4: Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp 1 đường tròn. Gọi O_1, O_2; O_3; O_4 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*, *BCD*, *CDA*, *DAB*. Chứng minh $O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật.

Lời giải:

Ta có:

$\widehat{AO_4B} = 90^o + \frac{1}{2}\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} + 90^o = \widehat{AO_1B}$



$\Rightarrow ABO_1O_4$ là tứ giác nội tiếp.

Tương tự O_1O_2CB; O_2O_3DC; O_3O_4AD nội tiếp. Do đó:

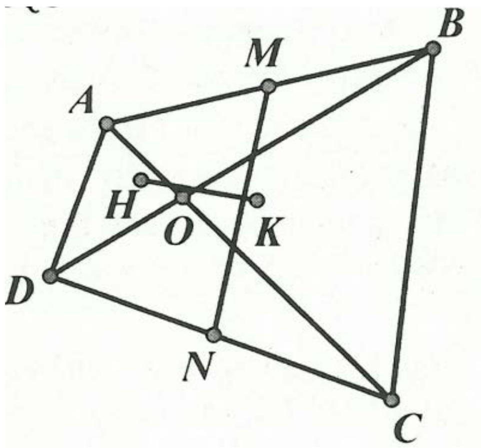
$$\widehat{O_4O_1O_2} = 360^o - \widehat{O_4O_1B} - \widehat{O_2O_1B}$$
$$= \widehat{BAO_4} + \widehat{BCO_2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\widehat{A} + \widehat{C}\right) = 90^o$$

Tương tự $\widehat{O_1O_4O_3} = \widehat{O_4O_3O_2} = \widehat{O_3O_2O_1} = 90^o$

Vậy $O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật.

Bài 5: Cho tứ giác *ABCD* có 2 đường chéo cắt nhau tại *O*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB, CD*. Các tam giác *OAD, OBC* có trực tâm lần lượt là *H, K*. Chứng minh *HK* vuông góc với *MN*

Lời giải:



Gọi *P, Q* lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác *OAD, OBD*.

Gọi *I* là trung điểm *AC*. Ta có:

$\widehat{APD} = 2\widehat{AOD} = 2\widehat{BOC} = \widehat{BQC} \Rightarrow \Delta APD \backsim \Delta BQC$

Do đó ta có: $\frac{PE}{QF} = \frac{AD}{BC}$

Với *E, F* lần lượt là trung điểm của *AD, BC*.

Mặt khác $HO = 2PE; KO = 2QF$

$\Rightarrow \frac{OH}{OK} = \frac{AD}{BC} = \frac{IN}{IM}$

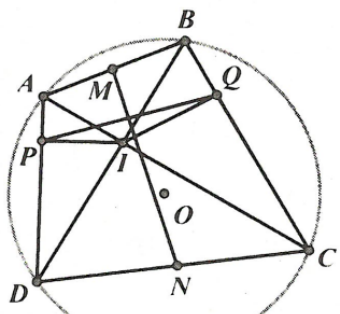
ΔIMN và *ΔOKH* có

$MI \perp OK, NI \perp OH, \frac{OH}{OK} = \frac{IN}{IM}$

Dễ dàng chứng minh được: $\widehat{OHK} = \widehat{MIN}$ nên cặp cạnh thứ ba cũng vuông góc với nhau.

Do đó *MN* vuông góc với *HK*.

Bài 6: Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp *(O)* và hai đường chéo cắt nhau tại *I*. Hạ *IP* vuông góc với *AD, IQ* vuông góc với *BC*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB, CD*. Chứng minh rằng *PQ* vuông góc với *MN*.



Lời giải:

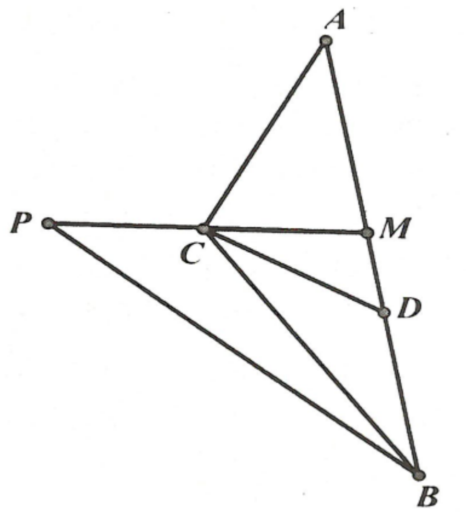
Gọi *J* là trung điểm của *AC*. Ta có:

$\Delta IAD \backsim \Delta IBC\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{IP}{IQ} = \frac{AD}{BC} = \frac{JN}{JM}$

Xét hai tam giác *IPQ* và *JNM* có:

$\frac{IP}{IQ} = \frac{JN}{JM}; JN \perp IP; JM \perp IQ$

Do đó ta có: *MN* vuông góc với *PQ*.



Bài 7: Cho tam giác *ABC* với trung tuyến *CM*. Điểm *D* thuộc đoạn *BM* sao cho *BD* = *2MD*. Biết rằng $\widehat{MCD} = \widehat{BCD}$. Chứng minh rằng $\widehat{ACD} = 90^o$

Lời giải

Tam giác *BCM* có: $\widehat{MCD} = \widehat{BCD}$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CM} = \frac{DB}{MD} = 2$$

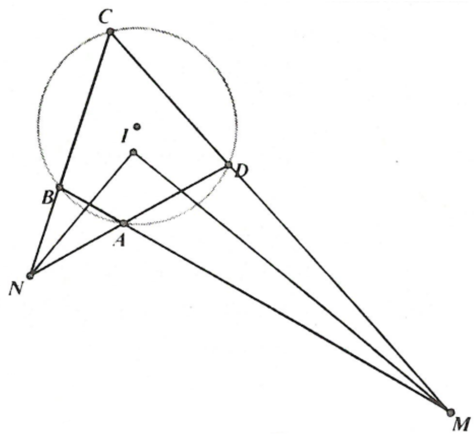
hay $BC = 2CM$

Gọi *P* là điểm đối xứng của *C* qua *M*.

Khi đó ta có: $PC = 2CM = BC \Rightarrow \Delta BCP$ cân tại *C* có *CD* là phân giác nên *CD* vuông góc với *BP*.

Vì *M* là trung điểm *AB* và *M* là trung điểm *CP* do đó: *BP//AC; CD* vuông góc *BP*.

Vậy *AC* vuông góc *CD* hay góc $\widehat{ACD} = 90^o$



Bài 8: Cho tứ giác *ABCD, AB* và *DC* cắt nhau tại *M, AD* và *CB* cắt nhau tại *N*. Chứng minh tứ giác *ABCD* nội tiếp khi và chỉ khi các phân giác của các góc *AMD* và *DNC* vuông góc với nhau.

Lời giải

Gọi *I* là giao điểm của phân giác góc *AMD* và *BNC*. Ta có:

$$\widehat{INM} + \widehat{IMN}$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{ANC} + \widehat{BNM} + \frac{1}{2}\widehat{AMD} + \widehat{BMN}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\widehat{ANC} + \widehat{AMD}\right) + 180^o - \widehat{B}$$

$$= \frac{1}{2}\left(180^o - \widehat{D} - \widehat{C} + 180^o - \widehat{A} - \widehat{D}\right) + 180^o - \widehat{B}$$

$$= 360^o - \left(\widehat{B} + \widehat{D}\right) - \frac{1}{2}\left(\widehat{A} + \widehat{C}\right) = \widehat{A} + \widehat{C} - \frac{1}{2}\left(\widehat{A} + \widehat{C}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{A} + \widehat{C}\right)$$

$\Rightarrow ABCD$ nội tiếp $\Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 180^o \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\widehat{A} + \widehat{C}\right) = 90^o$

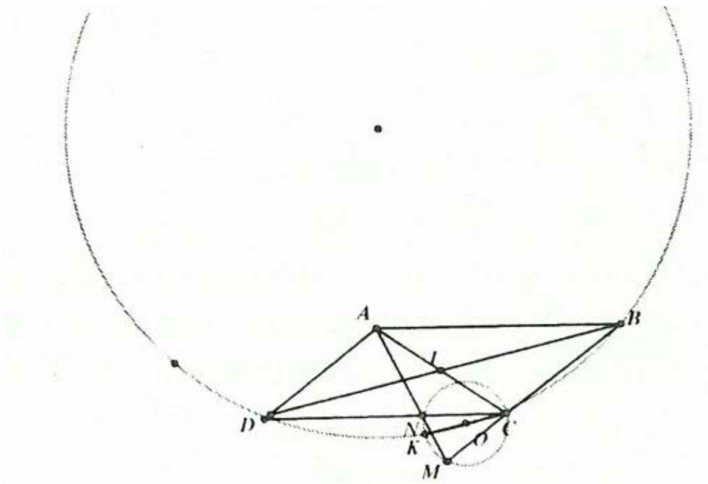
$$\Leftrightarrow \widehat{INM} + \widehat{IMN} = 90^o \Leftrightarrow \widehat{NIM} = 90^o$$

Vậy *ABCD* nội tiếp khi và chỉ khi phân giác góc *AMD* và *CND* vuông góc với nhau.

Bài 9: Đường phân giác góc *BAD* của hình bình hành *ABCD* cắt cạnh *BC* và đường thẳng *CD* lần lượt tại *M, N*. Chứng minh rằng:

1. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *CMN* thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác *BCD*

2. Nếu *K* là giao của đường tròn ngoại tiếp tam giác *CMN*, *BCD* (*K* khác *C*) thì $\widehat{AKC}=90^o$



Lời giải

1. Gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *CMN*.

Ta có: $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}=\widehat{M_1}\Rightarrow BA=BM\Rightarrow CD=BM$

Mà $\widehat{A_1}=\widehat{MNC};\widehat{A_2}=\widehat{M_2}\Rightarrow\widehat{M_1}=\widehat{MNC}$ hay $MN=NC$

Lại có: $\widehat{OCD}=\widehat{BCD}+\widehat{OCM}=\widehat{OCM}+\frac{\widehat{A}}{2}+\frac{\widehat{A}}{2}$

$$=\widehat{OCM}+\widehat{M_1}+\frac{1}{2}\widehat{BAD}=90^o+\frac{1}{2}\widehat{BAD}\ (\text{do}\ OC\perp MN);$$

$\widehat{BMO}=180^o-\widehat{OMC}=180^o-\widehat{OCM}=90^o+\frac{1}{2}\widehat{BAD}$

$\Rightarrow\widehat{OCD}=\widehat{BMO}\Rightarrow\Delta OMB=\Delta OCD(g.c.g)\Rightarrow\widehat{OBM}=\widehat{ODC}\Rightarrow O,C,D,B$ thuộc cùng 1 đường tròn.

2. Gọi *K* là giao của đường tròn đi qua 3 điểm *C, M, N* và đường tròn đi qua 3 điểm *B, C, D*, theo câu 1 ta có: $OD=OB,OC=OK\Rightarrow CK//BD$

$\Rightarrow$ Đường nối O với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD đi qua trung điểm của BD hay trung điểm của AC.

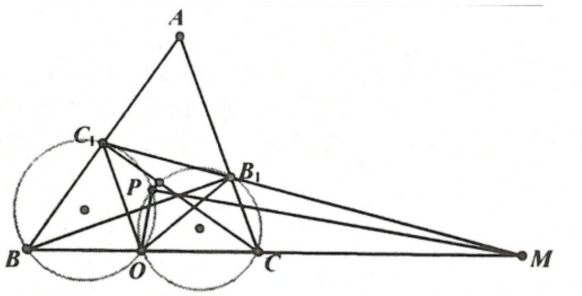
Ta có *OI // AK* và *OI* vuông góc với *KC* nên *AK* vuông góc với *KC*.

Vậy $\widehat{AKC} = 90^o$

Bài 10: Cho tam giác *ABC* đường cao *AD*. Gọi *E, F* là 2 điểm nằm trên đường thẳng qua *D* sao cho $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^o$. Gọi *M, N* lần lượt là các trung điểm của *BC* và *EF*. Chứng minh $\widehat{ANM} = 90^o$.

Lời giải:

Dựng hình chữ nhật *APBD* và *QADC*. Gọi *I* là trung điểm của *PQ*. Ta có *AEBD* nội tiếp



$\widehat{PEA} = \widehat{PBA} = \widehat{BAD} = \widehat{BED}$

hay $\widehat{PED} = \widehat{AEB} = 90^o$

Tương tự $\widehat{QFE} = 90^o \Rightarrow PE//QF$ hay *EPQF* là hình thang.

Mà *N* và *I* là trung điểm của *EF* và *PQ* $\Rightarrow NI//FQ; IM//QC$

$\Rightarrow \widehat{NIM} = \widehat{FQC} = \widehat{CDF} \Rightarrow NDIM$ nội tiếp được.

Suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{MIQ} = 90^o \Rightarrow \widehat{ANM} = 90^o$

Bài 11: Cho tam giác nhọn *ABC* có các đường cao BB_1; CC_1. Đường thẳng B_1C_1 cắt *BC* tại *M*. Gọi *O* là trung điểm của *BC*. Giả sử các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC_1; OCB_1 cắt nhau tại điểm thứ hai *P*. Chứng minh rằng góc *OPM* bằng 90°.

Lời giải:

Ta có tứ giác OPB_1C nội tiếp được nên:

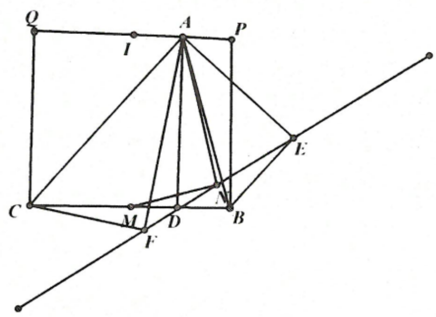
$$\widehat{OPC} = \widehat{OB_1C} = \widehat{OCB_1} = \widehat{AC_1B_1}$$
$$= \widehat{APB_1}; \widehat{POC} = 180^o - \widehat{PB_1C}$$
$$= \widehat{PB_1A}$$

$\Rightarrow \widehat{PCO} = \widehat{PAB_1} = \widehat{PCB_1} \Rightarrow PCMC_1$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{PMO} = \widehat{AC_1P} \Rightarrow \widehat{PMO} + \widehat{POM} = \widehat{PC_1C} + \widehat{AC_1P} = \widehat{AC_1C} = 90^o \Rightarrow \widehat{OPM} = 90^o$

Bài 12: Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn tâm *O*. Một đường tròn *(O₁)* qua *B* và *C* cắt cạnh *AB, AC* lần lượt tại *D* và *E*. Đường tròn (O_2) qua ba điểm *A, D; E* cắt *(O)* tại *K* $(K \neq A)$. Chứng minh rằng $\widehat{AKO_1} = 90^o$.

Lời giải:



Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm *BD*, *CE*. *KN* cắt *AB*, *(O_2)*; *(O)* lần lượt tại *S*, *P*, *Q*.

Ta có: $\widehat{KQC}=\widehat{KAC}=\widehat{EPQ}\Rightarrow EP//CQ$, mà N là trung điểm của EC nên N là trung điểm của PQ.

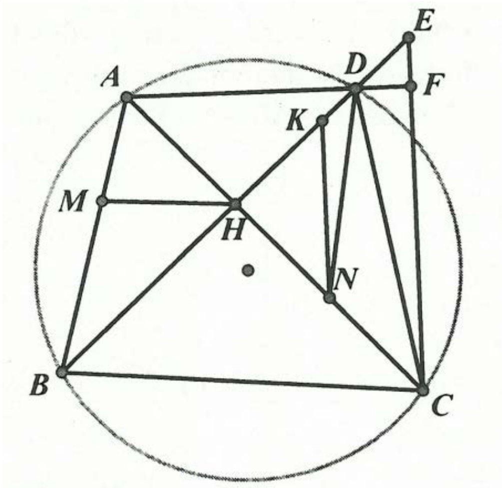
Ta thấy

$2SA.SM=SA.SD+SA.SB;$

$2SK.SN=SK.SP+SK.SQ$

Mà $SA.SD=SK.SP$ (*AKPD* nội tiếp);

$SA.SB=SK.SQ$ (*AKQB* nội tiếp)



$\Leftrightarrow SA.SM=SK.SN\Rightarrow AKNM$ nội tiếp hay *K* thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác *AMN*.

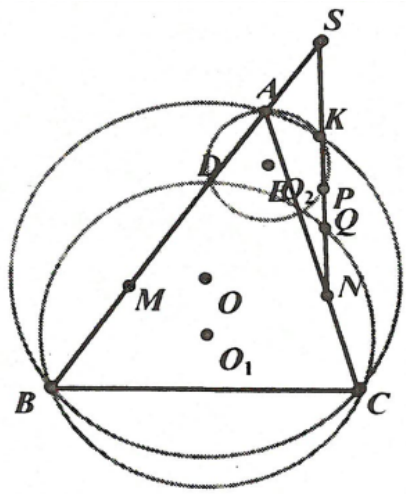
Mặt khác AMO_1N nội tiếp vì: $\widehat{AMO_1}=\widehat{ANO_1}=90^o$

Hay cũng có O_1 thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác *AMN*, suy ra $AKNO_1$ nội tiếp

$\Rightarrow\widehat{AKO_1}=\widehat{ANO_1}=90^o$

Bài 13: **(Lớp 10 THPT chuyên Tp.HCM 2012-2013)**: Cho tứ giác nội tiếp *ABCD* có *AC* vuông góc bới *BD* tại *H*. Gọi *M* là điểm trên cạnh *AB* sao cho $AM=\frac{1}{3}AB$ và *N* là trung điểm của *HC*. Chứng minh rằng đường thẳng *DN* vuông góc với đường thẳng *MH*.

Lời giải:



Trên tia *HD* lấy điểm *E* sao cho *HE = HB*.

Gọi *K* là trung điểm của đoạn thẳng *HE*.

Gọi *F* là giao điểm của *CE* và *AD*.

ΔCBE có *CH* vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến ($CH\perp BE, HE=HB$)

$\Rightarrow$ *ΔCBE* cân tại *C*.

$\Rightarrow$ *CH* là tia phân giác của *BCE*

$\Rightarrow\widehat{ACB}=\widehat{FCH}$

Mà $\widehat{ACB}=\widehat{FDH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung *AB*)

Ta có $\widehat{FCH}=\widehat{FDH}$ $\Rightarrow$ Tứ giác *DFHC* nội tiếp

$\Rightarrow\widehat{DFC}=\widehat{DHC}=90^o$

ΔHEC có $HN=HC, KH=KE$

$\Rightarrow$ KN là đường trung bình của tam giác *HEC* $\Rightarrow$ *KN // CE*

Mà $CE\perp AD\left(\widehat{DFC}=90^o\right)$ nên $KN\perp AD$

ΔAND có DH, KN là hai đường cao cắt nhau tại K

$\Rightarrow K$ là trực tâm của $\Delta AND \Rightarrow AK \perp DN$

ΔABK có $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{HK}{BK}\left(=\dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow AK // MH$ (định lý Ta lét đảo)

Ta có AK // MH và $AK \perp DN$. Vậy $DN \perp MH$.

CHƯƠNG 6
BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

1. Kiến thức :

- Dùng tính chất đồng quy của ba đường trung tuyến, ba đường trung trực, ba đường phân giác, ba đường cao trong một tam giác.
- Lợi dụng tính chất hai đường chéo của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

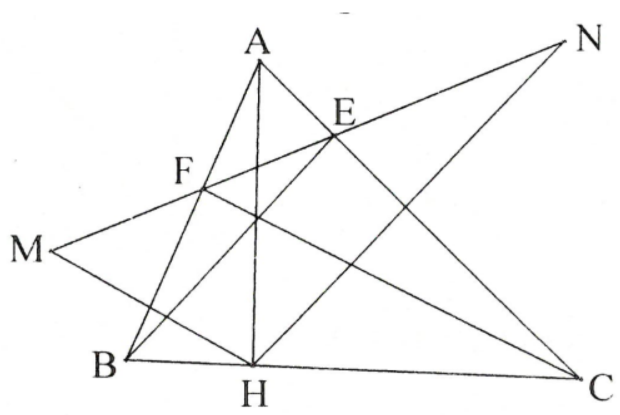
2. Phương pháp:

- Giao điểm của hai đường thẳng nằm trên đường thẳng còn lại.
- Chỉ ra một điểm thuộc cả ba đường thẳng.
- Vận dụng tính chất đông quy của ba đường cùng tên trong một tam giác.
- Vận dụng tính chất về đường chéo của hình bình hành.

3. Bài tập:

Bài 1: Cho tam giác nhọn *ABC*, đường cao *AH*. Gọi *M* là điểm đối xứng với *H* qua *AB*, *N* là điểm đối xứng với *H* qua *AC*. Gọi *F, E* theo thứ tự là giao điểm của *MN* với *AB, AC*. Chứng minh rằng *AH, BE, CF* đồng quy.

Lời giải:



Vì *N* đối xứng với *H* qua *AC* nên $\widehat{AHC} = \widehat{ANC} = 90^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác *AHCN* nội tiếp (*)

Vì *M* đối xứng với *H* qua *AB* nên $\widehat{AHF} = \widehat{AMN}$ (1)

Vì *N* đối xứng với *H* qua *AC, M* đối xứng với *H* qua *AB*

Nên $AM = AN \Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{AMN}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ANF} = \widehat{AHF} \Rightarrow AFHN$ nội tiếp (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ *A, F, H, N, C* cùng thuộc một đường tròn đường kính $AC \Rightarrow CF \perp AB$

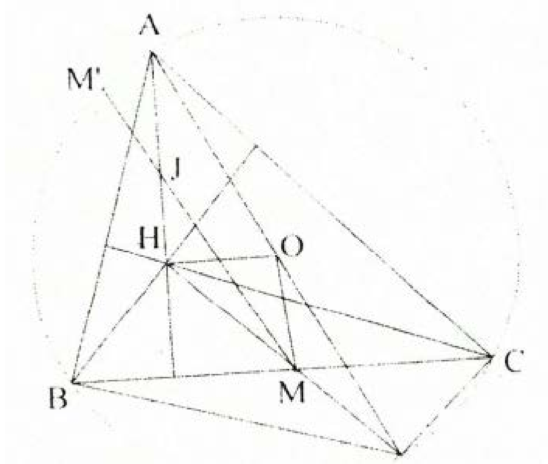
Tương tự ta có $BE \perp AC$

Do đó *AH, BE, CF* là 3 đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow$ *AH, BE, CF* đồng quy.

Bài 2: Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn *(O)*. Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của *BC, AC, AB*. Vẽ các đường thẳng *MM' // OA, NN' // OB, PP' // OC* với *M', N', P'* thuộc *(O)*. Chứng minh rằng các đường thẳng *MM', NN', PP'* đồng quy tại một điểm.

Lời giải :

Gọi *H* là trực tâm của ΔABC, kẻ đường kính *AOD*



Ta có tứ giác *HCDB* là hình bình hành (tứ giác có các cặp cạnh đối song song) vì *M* là trung điểm của *BC* nên *M* cũng là trung điểm của *HD*, suy ra *OM* là đường trung bình của ΔADH do đó $AH = 2OM$ (1)

Gọi *J* là giao điểm của *AH* và *MM'*.

Ta có tứ giác *AOMJ* là hình bình hành (tứ giác có các cặp cạnh đối song song), suy ra $AJ = OM$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2AJ = AH$ (3)

Từ (3) và (1) $\Rightarrow AJ = OM$.

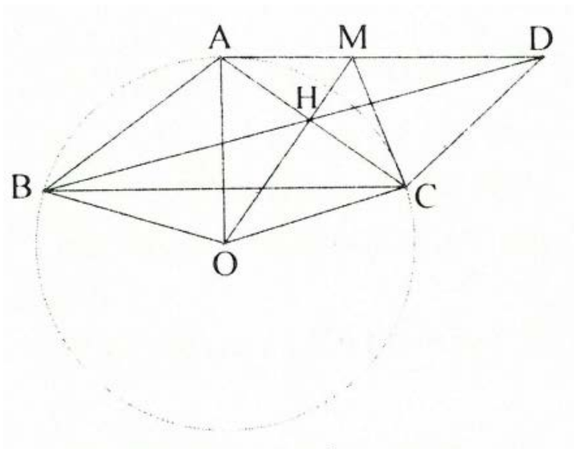
$\Rightarrow$ *JOMH* là hình bình hành $\Rightarrow$ *MM'* đi qua trung điểm của *OH*.

Chứng minh tương tự ta cũng có *NN', PP'* đi qua trung điểm của *OH*, hay nói cách khác *MM', NN', PP'* đồng quy tại một điểm.

Bài 3: Cho ΔABC cân tại *A* nội tiếp đường tròn *(O)*, vẽ hình bình hành *ABCD*. Tiếp tuyến tại *C* cắt đường thẳng *AD* tại *M*. Chứng minh rằng 3 đường thẳng *AC, BD, OM* đồng quy.

Lời giải:

Gọi *H* là giao điểm hai đường chéo *AC, BD* của hình bình hành *ABCD* (*)



Ta có: $AB = AC$ (ΔABC cân tại *A*) (1)

$OB = OC$ (bán kính của *(O)*) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ *OA* là đường trung trực của đoạn *BC*

$\Rightarrow OA \perp BC$ mà *AD // BC* nên $OA \perp AD \Rightarrow AD$ là tiếp tuyến của *(O)*

Mặt khác *MC* là tiếp tuyến của *(O)*.

Do đó $MA = MC$

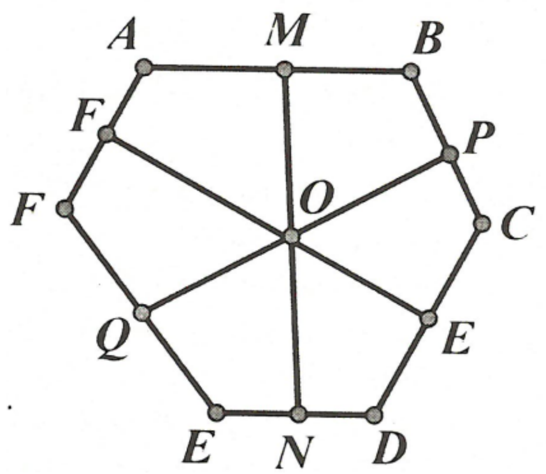
Vì $OA = OC$ (bán kính của *(O)*) nên *OM* là đường trung trực của đoạn $AC \Rightarrow OM$ đi qua *H* (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ *OM, AC, BD* đồng quy tại *H*.

Bài 4: Cho lục giác *ABCDEF* có các cặp cạnh đối song song. Gọi *M, N, P, Q; R, S* theo thứ tự là trung điểm của các cạnh *AB, DE, BC, EF, CD, FA*. Chứng minh các đường *MN, PQ, SR* đồng quy.

Lời giải:

Trường hợp 1: Nếu *AD, BE, CF* đồng quy tại 1 điểm *O*, ta có



$\frac{OB}{OE} = \frac{BA}{DE} = \frac{2BM}{2EQ} = \frac{BM}{EQ}$

Mặt khác $BM // EQ$ và *B, O, E* thẳng hàng.

Suy ra *M, O, Q* thẳng hàng.

Vậy *MQ* đi qua *O*.

Tương tự suy ra *MQ, NR, SP* cùng đi qua *O*. Do đó *MN, PQ, SR* đồng quy.

Trường hợp 2: Nếu *AD, BE, CF* không đồng quy, khi đó chúng cắt nhau tạo thành 1 tam giác *XYZ*.

Bởi một lập luận tương tự như trường hợp 1, ta có *MQ, NR, PS* lần lượt đi qua *X, Y, Z*.

Gọi *O* là giao của *MQ* và *NR* (*O* nằm trong tam giác *XYZ*).

Ta có $S_{OQD} = S_{OQE}; S_{XQD} = S_{XQE} \Rightarrow S_{OXE} = S_{OXD}$

Tương tự: $S_{OXA} = S_{OXB} \Rightarrow S_{OAD} = S_{OBE}$

$S_{OBE} = S_{OCF} \Rightarrow S_{OAD} = S_{OCF}$

Từ đó ta có *O* thuộc đường thẳng *SZP*. Thật vậy, nếu trái lại *O* không thuộc đường thẳng nói trên, coi *A, O, C* nằm về cùng phía đối với *PS*.

Khi đó: $S_{OASZ} > S_{OFSZ}$ mà $S_{ZAS} = S_{ZSF} \Rightarrow S_{OAZ} > S_{OFZ}$ $\quad (1)$

Tương tự: $S_{PDZ} = S_{OPCZ}$ mà $S_{ODP} = S_{OCP} \Rightarrow S_{OZD} > S_{OZC}$ $\quad (2)$

Từ (1) và (2) $S_{OAD} > S_{OCF}$ mâu thuẫn. Vậy *SP* cũng đi qua *O*. Do đó *MQ, NR, SP* đồng quy tại *O*.

Bài 5: Cho tam giác *ABC* và điểm *M* nằm trong tam giác sao cho:

$$\widehat{AMB} - \widehat{C} = \widehat{AMC} - \widehat{B}$$

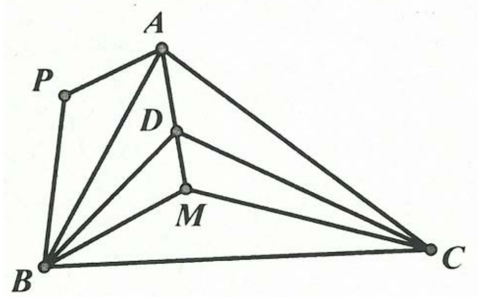
Chứng minh *AM* và các đường phân giác của các góc *ABM*; góc *ACM* đồng quy.

Lời giải:

Về phía ngoài tam giác *ABC* dựng tam giác *APB* đồng dạng với tam giác *AMC*.

Khi đó $\Delta APM \backsim \Delta ABC$

$\Rightarrow \widehat{APB} = \widehat{AMC}$ và



$\widehat{APM} = \widehat{ABC} \Leftrightarrow \widehat{BPM} = \widehat{APB} - \widehat{APM} = \widehat{AMC} - \widehat{ABC}$ $\;(1)$

Ta cũng có:

$\widehat{AMP} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{PMB} = \widehat{AMB} - \widehat{AMP} = \widehat{AMB} - \widehat{ACB}$ $\;(2)$

Từ (1) và (2) cùng với giả thiết ta có: $\widehat{BPM} = \widehat{PMB} \Rightarrow BP = BM$

Do $\Delta APB \backsim \Delta AMC$ nên:

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BP}=\dfrac{AC}{CM}$ hay $\dfrac{AB}{BM}=\dfrac{AC}{CM}$

Gọi *D* là chân đường phân giác góc *B* của tam giác *ABM*. Ta có:

$\dfrac{AB}{BP}=\dfrac{AC}{CM};\dfrac{AB}{BM}=\dfrac{AC}{CM}$

Gọi *D* là chân đường phân giác góc *B* của tam giác *ABM*. Ta có:

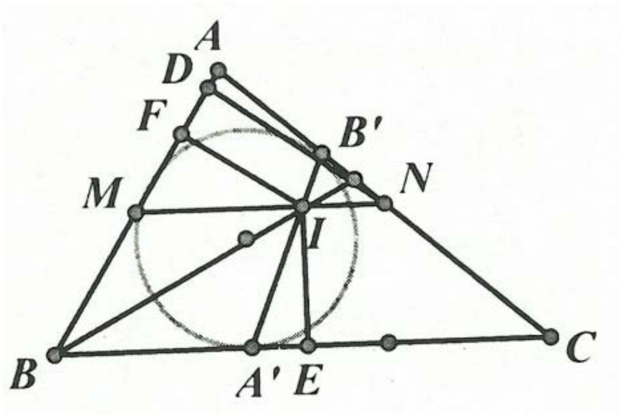
$\dfrac{AB}{BM}=\dfrac{DA}{DM}\Rightarrow\dfrac{AC}{CM}=\dfrac{DA}{DM}$

$\Rightarrow$ *CD* là phân giác góc *C* của tam giác *ACM*. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 6: Đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* tiếp xúc với *BC, AC* lần lượt tại *A', B'*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB, AC*. Chứng minh rằng *A'B', MN* và phân giác góc $\widehat{ABC}$ đồng quy.

Lời giải:

Ký hiệu a, b, c, h_a, h_b, h_c lần lượt là các cạnh đối diện với góc *A, B, C* các đường cao từ *A, B, C* của tam giác *ABC*, coi $a > c$. Gọi *I* là giao của *MN* và *A'B'*. Hạ đường *IE, IF, ND* lần lượt vuông góc với *BC, AB, AB*



Ta cần chứng minh *BI* là phân giác góc *ABC*. Nghĩa là:

$IE=IF\Leftrightarrow IF=\dfrac{1}{2}h_a$ (*)

Ta có: $NI=NB'=CB'-\text{CN}=\dfrac{a-c}{2}$

$$\frac{IF}{ND}=\frac{MI}{MN}=\frac{MN-NI}{MN}=\frac{\frac{a}{2}-\frac{a-c}{2}}{\frac{a}{2}}=\frac{c}{a}$$

$\Rightarrow\dfrac{IF}{ND}=\dfrac{c}{a}$

Mặt khác ta có: $\dfrac{ND}{h_c}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{IF}{h_c}=\dfrac{c}{2a}\Rightarrow IF=\dfrac{c.h_c}{2a}=\dfrac{1}{2}h_a$

Như vậy (*) được chứng minh. Ta suy ra kết luận của bài toán.

Bài 7: Cho hai đường tròn *(O)* và *(O')* cắt nhau tại *A* và *B*. Giả sử *CD, EF* là 2 tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này (*E, C* thuộc *(O)*); *D, F* thuộc *(O')*; *A* gần *CD* hơn *B*. Gọi d_1 là đường thẳng qua *A* tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEF* và d_2 là đường thẳng qua *B* tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác *BCD*. Chứng minh các đường thẳng d_1, d_2, *CD, EF* đồng quy.

Lời giải

Gọi *M* là điểm đối xứng của *B* qua *EF*. Ta có $\widehat{EMF}=\widehat{EBF}$

Mà $\widehat{EBF}+\widehat{EAF}=\widehat{EBF}+\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=\widehat{EBF}+\widehat{E_1}+\widehat{F_1}=180^o$

$\Rightarrow \widehat{EMF}+\widehat{EAF}=180^o$

$\Rightarrow$ *MEAF* nội tiếp một đường tròn *(S)*

Gọi *N* là giao của các tiếp tuyến tại *A*, *M* của *(S)* ta chứng minh *N*, *E*, *F* thẳng hàng. Thật vậy gọi *F'* là giao của *NE* với *(S)*

Ta có: $\Delta NAE \backsim \Delta NF'A\left(g.g\right)\Rightarrow \dfrac{AE}{AF'}=\dfrac{NA}{NF'}$ (1)

Tương tự: $\Rightarrow \dfrac{ME}{MF'}=\dfrac{NM}{NF'}=\dfrac{NA}{NF'}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AF'}=\dfrac{ME}{MF'}\Rightarrow \dfrac{AE}{ME}=\dfrac{AF'}{MF'}$ (*)

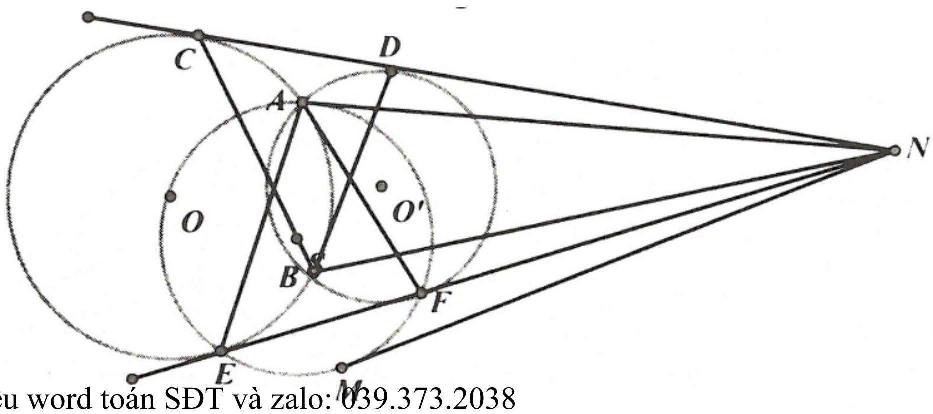
I là giao *AB* và *EF*. Ta có: $IE^2=IA.IB=IF^2\Rightarrow IE=IF$

Mà $\Delta IEB \backsim \Delta IAE\Rightarrow \dfrac{EB}{AE}=\dfrac{IF}{IA}=\dfrac{IE}{IA}$

Tương tự ta cũng có: $\dfrac{BF}{AF}=\dfrac{IF}{IA}\Rightarrow \dfrac{EB}{AE}=\dfrac{BF}{AF}$

$\Rightarrow \dfrac{ME}{AE}=\dfrac{MF}{AF}$ hay $\dfrac{AE}{ME}=\dfrac{AF}{MF}$ (**)

Từ (*) và (**) ta có:



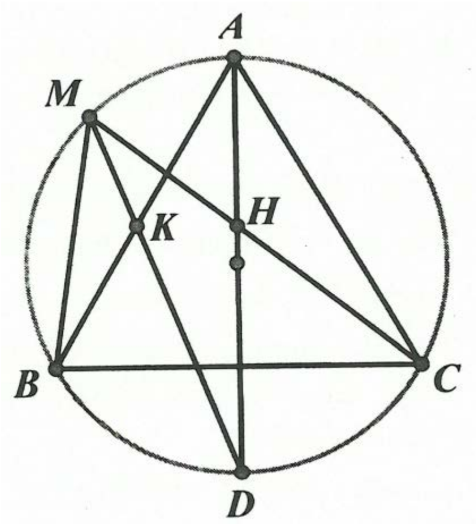
$\dfrac{AF'}{MF'}=\dfrac{AF}{MF}\Rightarrow F\equiv F'$

Vậy *N, E, F* thẳng hàng. Ta có *N* thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABF*. Do vậy *N* thuộc trung trực *AB* $\Rightarrow$ *N* thuộc *OO'*. Tương tự d_2 cắt *CD* tại *N'* thuộc *OO'*.

Do tính chất đối xứng , *CD* và *EF* cắt nhau tại 1 điểm thuộc *OO'* do đó *N* trùng *N'*.

Vậy *CD, EF*, d_1, d_2 đồng quy tại *N*.

Bài 8: **(Lớp 10 THPT TP. Đà Nẵng 2011 - 2012)**: Cho tam giác đều *ABC* nội tiếp đường tròn đường kính *AD*. Gọi *M* là một điểm di động trên cung nhỏ *AB* (*M* không trùng với các điểm *A* và *B*).



a) Chứng minh rằng *MD* là đường phân giác của góc *BMC*

b) Cho *AD = 2R*. Tính diện tích tứ giác *ABDC* theo *R*.

c) Gọi *K* là giao điểm của *AB* và *MD*, *H* là giao điểm của *AD* và *MC*. Chứng minh rằng ba đường thẳng *AM, BD, HK* đồng quy.

Lời giải:

a) Ta có $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$ *(AB = AC), AD* là đường kính của đường tròn *(O)* (gt)

$\Rightarrow \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}\Rightarrow \widehat{BMD}=\widehat{CMD}$

Vậy *MD* là đường phân giác của góc $\widehat{BMC}$

b) Ta có $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ADB}=\widehat{ACB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Mà $\widehat{ACB}=60^o$ (ΔABC đều)

Nên $\widehat{ADB}=60^o$

ΔABD vuông tại B

$\Rightarrow AB=AD\sin ADB,\ BD=AD\,\mathrm{cosADB}$

$\mathrm{AB}=2\,\mathrm{Rsin}\,60^o=\sqrt{3}R,\ BD=2R\cos 60^o=R$

Do vậy $S_{ABD}=\dfrac{1}{2}AB.BD=\dfrac{1}{2}\sqrt{3}R.R=\dfrac{\sqrt{3}R^2}{2}$

Tương tự có $S_{ACD}=\dfrac{\sqrt{3}R^2}{2}$

Vậy $S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{ACD}=\sqrt{3}R^2$ (đvdt)

c) Vì $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}\Rightarrow \widehat{KAH}=\widehat{KMH}$

$\Rightarrow$ Tứ giác *KMAH* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KHD}=\widehat{KMA}$

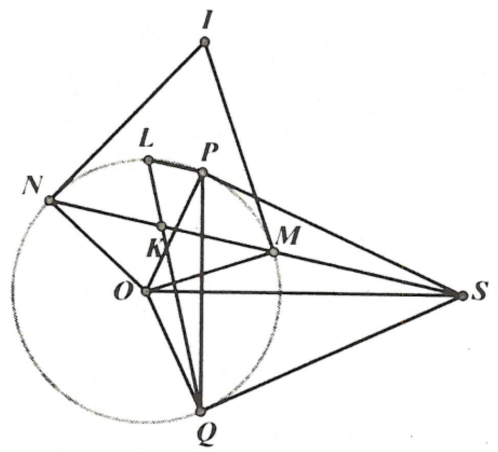
Mà $\widehat{KMA}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Do đó $\widehat{KHD}=90^o$

Xét ΔKAD có AM, BD, HK là 3 đường cao (vì $AM\perp DK\left(\widehat{KMA}=90^o\right)$),

$BD\perp AK\left(\widehat{ABD}=90^o\right), KH\perp AD\left(\widehat{KHD}=90^o\right)$

Vậy ba đường thẳng *AM*, *BD*, *HK* đồng quy.



Bài 9: **(Lớp 10 Chuyên Trường Đại học Sư phạm TP.HCM 2011 - 2012):** Cho đường tròn tâm *O*, bán kính *R* và một điểm *S* nằm ngoài đường tròn. Qua *S* kẻ hai tiếp tuyến *SP*, *SQ* với đường tròn (*P* và *Q* là hai tiếp điểm) và đường thẳng cắt đường tròn tại *M*, *N* (theo thứ tự *S*, *M*, *N*)

a) Chứng minh rằng : $SP^2=SQ^2=SM.SN$.

b) Gọi *K* là trung điểm của *MN*. Chứng minh 5 điểm *S*, *O*, *P*, *Q*, *K* cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

c) Đường thẳng *QK* cắt đường tròn tâm *O*, bán kính *R* tại *L*. Chứng minh *PL* song song với *MN*.

d) Qua *M* và *N* kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn tâm *O*, bán kính *R*, chúng cắt nhau tại *I*. Chứng minh các đường thẳng *PQ*, *OK* cùng đi qua *I*.

Lời giải:

a) Ta có *SP*, *SQ* là các tiếp tuyến của đường tròn *(O)*

$\Rightarrow SP=SQ$, *OS* là tia phân giác của $\widehat{POQ}$

Xét ΔSPM và ΔSNP có :

$\widehat{PSM}$ (chung), $\widehat{SPM}=\widehat{SNP}$ (hệ quả của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Do đó: $\Delta SPM\backsim\Delta SNP\left(g.g\right)$

$$\Rightarrow\frac{SP}{SN}=\frac{SM}{SP}\Rightarrow SP^2=SM.SN$$

Vậy $SP^2=SQ^2=SM.SN$

b) *K* là trung điểm *MN* (gt) $\Rightarrow OK\perp MN$.

$SP\perp OP, SQ\perp OQ$ (*SP*, *SQ* là các tiếp tuyến của *(O)*)

Ta có $\widehat{SPO}=\widehat{SQO}=\widehat{SKO}=90^o$

$\Rightarrow$ *S*, *P*, *O*, *K*, *Q* cũng thuộc một đường tròn, tâm của đường tròn là trung điểm của đường thẳng *SO*.

c) Ta có $\widehat{SKQ}=\widehat{SOQ}=\frac{1}{2}\widehat{POQ}$ và $\widehat{QLP}=\frac{1}{2}\widehat{POQ}$ nên $\widehat{SKQ}=\widehat{QLP}$

Suy ra $PL//MN$

d) ΔOPQ cân tại *O* (vì OP = *OQ*) có *OS* là đường phân giác nên đồng thời là đường cao.

Gọi *H* là giao điểm của *OS* và *PQ*, ta có $PQ \perp OS$ tại H

ΔSPO vuông tại *P*, *PH* là đường cao $\Rightarrow SP^2 = SH.SO$

Do đó $SH.SO = SM.SN\left(= SP^2\right) \Rightarrow \dfrac{SH}{SN} = \dfrac{SM}{SO}$

Xét ΔSHM và ΔSNO có: $\widehat{HSM}$ (chung), $\dfrac{SH}{SN} = \dfrac{SM}{SO}$

Do đó $\Delta SHM \backsim \Delta SNO$ $(c.g.c) \Rightarrow \widehat{SHM} = \widehat{SNO} \Rightarrow$ Tứ giác *MHON* nội tiếp

Mà tứ giác *OMIN* nội tiếp (vì $\widehat{OMI} = \widehat{ONI} = 90^o$)

Ta có *H, M, I, O* cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{OHI} = \widehat{OMI} = 90^o \Rightarrow IH \perp OS$ tại *H*

Do vậy *IH, PQ* trùng nhau $\Rightarrow$ *PQ* đi qua *I*

$OM = ON\left(= R\right), MK = NK, IM = IN$ (*IM, IN* là hai tiếp tuyến của đường tròn *(O)*)

$\Rightarrow$ *O, K, I* cùng thuộc đường trung trực của *MN*

Vậy *OK* đi qua *I*.

CHƯƠNG 7

BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

1. Kiến thức :

- Ba điểm thẳng hàng
- Nếu $AM + MB = AB$ thì M nằm giữa A và B
- Hai góc kề bù
- Tiên đề Ơclit
- Dùng tính chất của tam giác cân và tính chất của các đương thẳng đồng quy trong tam giác.

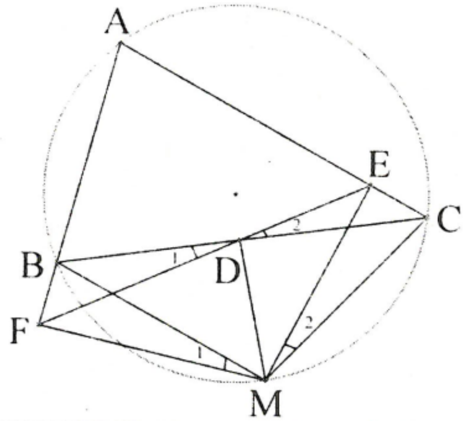
2. Phương pháp :

Chứng minh ba điểm cùng nằm trên một đường thẳng có thể vận dụng $AM + MB = AB$, hai góc kề bù, tiên đề Ơclit, tính chất về tam giác cân và các đường đồng quy trong tam giác, hình duy nhất, thêm điểm.

3. Bài tập:

Bài 1: Cho *ΔABC* nội tiếp đường tròn *(O).* Trên đường tròn lấy một điểm *M* bất kì. Gọi *D, E, F* lần lượt là hình chiếu của *M* trên các đường thẳng *BC, CA, AB*. Chứng minh rằng ba điểm *D, E, F* cùng nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Sim-sơn).

Lời giải:



+ Trường hợp điểm *M* trùng với một đỉnh của tam giác, bài toán hiển nhiên đúng.

+ Trường hợp điểm *M* không trùng với đỉnh tam giác, giả sử *M* thuộc cung *BC* không chứa *A* (nếu M thuộc cung *BC* chứa *A*, cũng chứng minh tương tự) (hình vẽ).

Tứ giác *MDBF* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{M_1}$

Tứ giác *MDEC* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{D_2} = \widehat{M_2}$

Tứ giác *AFME* và *ABMC* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FME} = \widehat{BMC}$ (Cùng bù với $\widehat{FAC}$)

$\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ do đó $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$

$\Rightarrow \widehat{EDF} = \widehat{D_1} + \widehat{BDE} = \widehat{D_2} + \widehat{BDE} = 180^o$

$\Rightarrow$ *D, E, F* thẳng hàng

Bài 2: Cho đường tròn *(O)* đường kính *AC, (O')* tiếp xúc trong với *(O)* tại *C*. *AC* cắt *(O')* tại *B*, kẻ dây *DE* của *(O)* sao cho $DE \perp AB$ tại trung điểm *I* của *AB*. Gọi *K* là giao điểm của *DC* với *(O').*

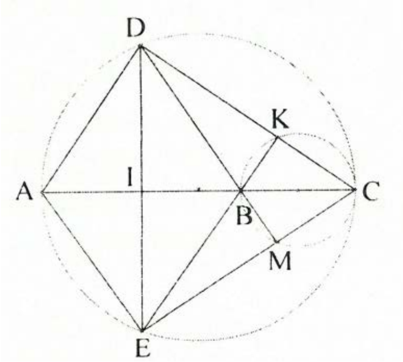
a) Chứng minh *E, B, K* nằm trên một đường thẳng.

b) *BD* cắt đường tròn *(O')* tại *M*. Chứng minh *C, E, M* thẳng hàng.

Lời giải:

a) Ta có $\widehat{CDI} = \widehat{DAI}$ (cùng phụ với $\widehat{ADI}$) (1)

Tứ giác *ADBE* là hình thoi.



$\Rightarrow \widehat{IBE} = \widehat{DAB}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CDI} = \widehat{IBE}$ (3)

Tứ giác *DKBI* nội tiếp ($\widehat{K} + \hat{I} = 180^o$)

$\Rightarrow \widehat{KBI} + \widehat{KDI} = 180^o$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{KBI} + \widehat{IBE} = 180^o$

$\Rightarrow$ *K, B, E* thẳng hàng.

b) *ΔCDE* có *B* là giao điểm hai đường cao *EK* và *CI* nên $CE \perp DB$ (5)

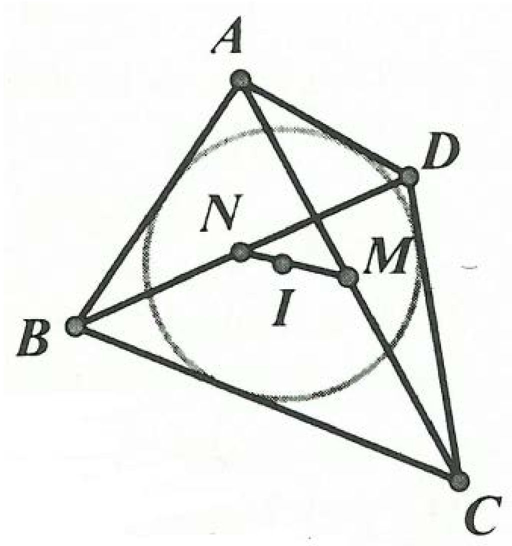
Mặt khác : $CE \perp BM$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Từ (5), (6) $\Rightarrow \widehat{CMB} = \widehat{BME} = 90^o \Rightarrow$ C, M, E thẳng hàng.

Bài 3: Cho tứ giác *ABCD* ngoại tiếp *(I)*. Gọi *M, N* là trung điểm đường chéo *AC, BC*. Chứng minh *M, N, I* thẳng hàng.

Lời giải:

Trước hết dễ dàng chứng minh được rằng tập những điểm *K* sao cho:



$S_{KAB} + S_{KCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ thuộc một đường thẳng (1)

Ta có: $S_{NAB} = \frac{1}{2}S_{ABD}; S_{NCD} = \frac{1}{2}S_{BCD}$

$\Rightarrow S_{NAB} + S_{NCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (2)

$S_{MAB} = \frac{1}{2}S_{ABC}; S_{MCD} = \frac{1}{2}S_{ACD}$

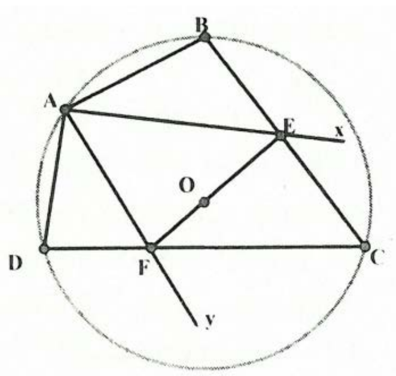
$\Rightarrow S_{MAB} + S_{MCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (3)

Do tứ giác *ABCD* ngoại tiếp *(I)* nên $AB + CD = AD + BC$

$\Rightarrow S_{IAB} = S_{ICD} = S_{IAD} = S_{ABC} \Rightarrow S_{IAB} + S_{ICD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Từ (2), (3), (4) $\Rightarrow$ *N, M, I* thuộc cùng quỹ tích nói ở (1) $\Rightarrow$ thẳng hàng

Bài 4: Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp *(O)*. Vẽ tia *Ax* vuông góc với *AD* cắt *BC* tại *E*. Vẽ tia *Ay* vuông góc với *AB* cắt *CD* tại *F*. Chứng minh *E, O, F* thẳng hàng.



Lời giải:

Nếu $\widehat{BAD} = 90^o$ thì *EF* là đường kính của *(O)* nên *E, O, F* thẳng hàng

Nếu $\widehat{BAD} > 90^o$ gọi *A'* là điểm đối xứng với *A* qua *EF*. Ta có:

$\widehat{EA'F}=\widehat{EAF}=\widehat{BAF}+\widehat{EAD}-\widehat{BAD}$

$=180^o-\widehat{BAD}=\widehat{EDF}=\widehat{EA'F}$

$\Rightarrow$ tứ giác *EA'CF* nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{A'EF}+\widehat{A'CF}=180^o \Rightarrow \widehat{AEF}+\widehat{A'CF}=180^o$

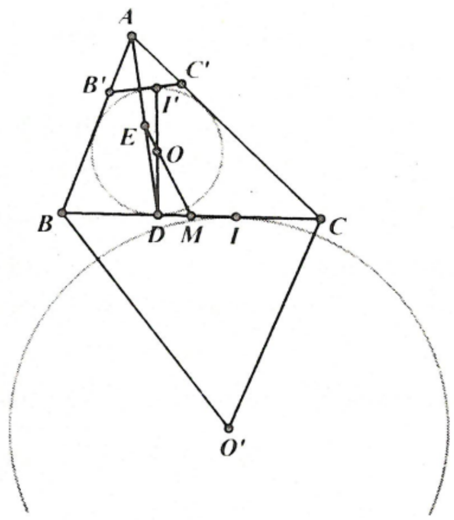
Mà $\widehat{AEF}=\widehat{A'AD}$ (hai góc cùng nhọn có cạnh tương ứng vuông góc) nên: $\widehat{A'AD}+\widehat{A'CF}=180^o$

$\Rightarrow$ *ADCA'* nội tiếp nên *A'* thuộc *(O)*

Vậy *E, O, F* cùng thuộc trung trực của đoạn *AA'* nên chúng thẳng hàng.

Nếu $\widehat{BAD}<90^o$ chứng minh tương tự.

Bài 5: Cho *(O)* nội tiếp tam giác *ABC*, tiếp xúc với cạnh *BC* tại *D*. Gọi *M, E* lần lượt là trung điểm của *BC*, *AD*. Chứng minh *E, O, M* thẳng hàng.



Lời giải:

Giả sử đường tròn bàng tiếp góc *A* của tam giác *ABC* tiếp xúc với *BC* tại *I*.

Gọi *B'* thuộc *AB*, *C'* thuộc *AC* sao cho *B'C'// BC* và *B'C'* tiếp xúc với *(O)* tại *I'*. Suy ra *DI'* là đường kính của *(O)*.

Ta có: $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$

tại *I, I'* lần lượt là tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp của góc *A* với các cạnh *B'C', BC*.

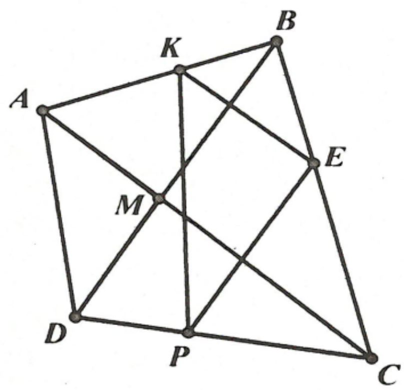
Do đó: $\dfrac{B'I'}{BI}=\dfrac{AB'}{AB}$

Mà $B'I'//BI$ và *A, B', B* thẳng hàng nên *A, I', I* thẳng hàng.

Ta có: $BD=\dfrac{AB+BC-AC}{2}=CI$

Vậy *M* là trung điểm của *DI*. Khi đó *M, O, E* lần lượt là trung điểm của *DI, DI', DA* nên chúng thẳng hàng.

Bài 6: Cho tứ giác *ABCD* có hai đường chéo cắt nhau tại *M*, $\widehat{AMD}=120^o; AM=MD$. Trên *BC, AB, CD* lần lượt lấy *E, K, P* sao cho *KE* song song với *AC, PE* song song với *BD*. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *KPE* nằm trên *AD*.



Lời giải:

Đường thẳng qua *P* song song với *AC* cắt *AD* tại *F*

Ta có: $\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{CP}{CD}=\dfrac{CE}{CB}=\dfrac{AK}{AB}$

$\Rightarrow EK//BD \Rightarrow KEPF$ là hình bình hành có các cạnh song song với *AC, BD*.

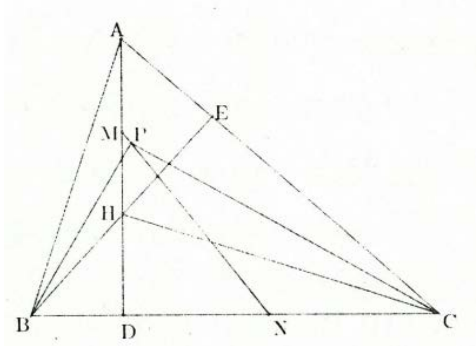
Do đó $\widehat{KFP}=120^o$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác *KFP* cắt *AD* tại điểm thứ 2 là *O*.

Khi đó $\widehat{OKP}=\widehat{PFD}=\widehat{CAD}=30^o;\widehat{OPK}=\widehat{OFK}=\widehat{ADB}=30^o \Rightarrow \Delta OKP$ cân tại O.

Từ $\widehat{KOP}=120^o;OK=OP;\widehat{KEP}=120^o$

$\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *KEP*.



Bài 7: Cho tam giác nhọn *ABC* có trực tâm *H*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của đoạn *AH, BC*. Các phân giác trong của các góc *ABH, ACH* cắt nhau tại *P*. Chứng minh ba điểm *M, N, P* thẳng hàng.

Lời giải:

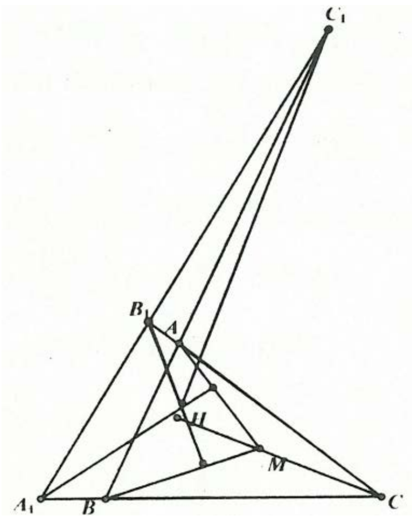
Gọi *BB'; CC'* lần lượt là đường cao kẻ từ *B, C* của tam giác *ABC*. Ta có:

$$\widehat{PCB}=\widehat{PCC'}+\widehat{C'CB}=\frac{1}{2}\left(90^o-\widehat{A}\right)+\left(90^o-\widehat{B}\right)=135^o-\frac{1}{2}\widehat{A}-\widehat{B}$$

Tương tự: $\widehat{PBC}=135^o-\frac{1}{2}\widehat{A}-\widehat{C}$

$\Rightarrow \widehat{PCB}+\widehat{PBC}=270^o-\left(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}\right)=90^o$

$\Rightarrow \widehat{CPB}=90^o.$



Vậy *P* thuộc đường tròn đường kính *BC*. Mặt khác *CP* là phân giác góc *ACC'* nên *P* là điểm chính giữa cung nhỏ *B'C'* của đường tròn nói trên. Do đường tròn đường kính *BC* và đường tròn đường kính *AH* cắt nhau tại *B', C'* nên đường nối tâm *MN* đi qua điểm chính giữa *P* cung *B'C'*.

Bài 8: Cho tam giác *ABC* có trực tâm *H*. Điểm *M* nằm trong tam giác đó. Đường thẳng qua *H* vuông góc với *AM* cắt *BC* tại A_1. Đường thẳng qua *H* vuông góc với *BM* cắt *CA* tại B_1. Đường thẳng qua *H* vuông góc với *CM* cắt *AB* tại C_1. Chứng minh ba điểm $A_1; B_1, C_1$ thẳng hàng.

Lời giải:

Gọi *N* là giao của A_2H và *AM.*

Ta có: $HA.HA'=HB.HB'=HC.HC'=k$

Hạ $A_1A_2\perp HN$ tại A_2

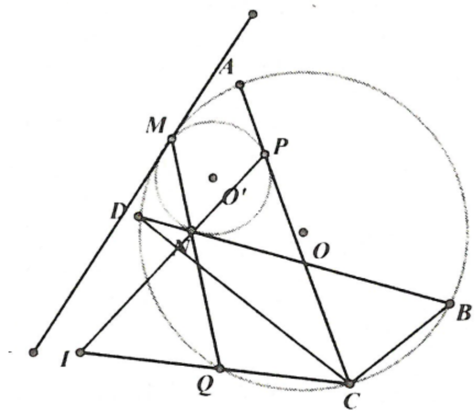
A_1A_2NM nội tiếp $\Rightarrow HA_1.HM=HN.HA_2$

$$\Rightarrow HA_2.HM=HA.HA'=k\Rightarrow HA_2=\frac{k}{HM}$$

Tương tự ta cũng có:

$$HB_2 = \frac{k}{HM}; HC_2 = \frac{k}{HM} \Rightarrow A_2 \equiv B_2 \equiv C_2$$

$\Rightarrow A_1, B_1, C_1$ cùng thuộc đường thẳng vuông góc với HM



Bài 9: Cho *(O)* và *(O')* tiếp xúc trong tại *M* (*(O')* chứa trong *(O)*). Giả sử *P* và *N* là 2 điểm bất kì thuộc *(O')*. Qua *P* và *N* kẻ các tiếp tuyến với *(O')* cắt *(O)* tại *A, C* và *B, D*. Chứng minh tâm đường tròn nội tiếp các tam giác *ACD, BCD* nằm trên *NP*.

Lời giải

Qua *M* kẻ tiếp tuyến chung của *(O')* và *(O)*

Ta có: $\widehat{N_1} = \widehat{NMX}; \widehat{B_1} = \widehat{M_1}$

$\Rightarrow \widehat{NMD} = \widehat{NMB} \Rightarrow MN$ là phân giác góc *DMB*

Gọi *Q* là giao điểm thứ 2 của *MN* và *(O).*

Ta có *Q* là điểm chính giữa cung *DB* do *CQ* là phân giác góc *DCB*. Gọi *I* là giao *CQ* và *NP*. Ta có:

$$\widehat{ICM} = \frac{1}{2}\left(sd\,\widehat{DM} + sd\,\widehat{DQ}\right) = \frac{1}{2}\left(sd\,\widehat{DM} + sd\,\widehat{QB}\right) = \widehat{N_1} = \widehat{IPM}$$

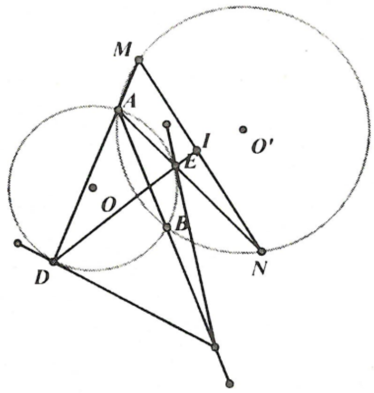
$\Rightarrow IPCM$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{QMB} = \widehat{NPA} = \widehat{IMC} \Rightarrow \Delta QIM \backsim \Delta QNI \Rightarrow QI^2 = QN.QM$

Mà $\widehat{QMD} = \widehat{QDN} \Rightarrow \Delta DQN \backsim \Delta MQD \Rightarrow QD^2 = QN.QM = QD.QI$

$\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *BCD*.

Tương tự đường tròn nội tiếp tam giác ACD trên NP.



Bài 10: Đường tròn *(O; R); (O'; R')* cắt nhau ở *A* và *B*. Từ *C* trên tia đối của *AB* kẻ tiếp tuyến *CD* và *CE* với *(O)* (*E* nằm trong đường tròn *(O')*). Các đường thẳng *AE, AD* cắt *(O')* tại *N, M*. Chứng minh *DE* đi qua trung điểm *MN*.

Lời giải:

Gọi *I* là giao điểm của *DE* và *MN* ta có:

$\widehat{DEB} = \widehat{DAB} = \widehat{BNM} \Rightarrow BEIN$ nội tiếp suy ra $\widehat{NIB} = \widehat{NEB}; \widehat{MIB} = \widehat{AEB}$

Mặt khác tứ giác *ABNM* nội tiếp

$$\widehat{IMB} = \widehat{EAB} \Rightarrow \Delta BIN \backsim \Delta AEB \Rightarrow \frac{MI}{IB} = \frac{AE}{EB}$$

Ta có: $\widehat{BIN} = \widehat{BDA}; \widehat{BNI} = \widehat{BAD}$

$$\Rightarrow \Delta IBN \backsim \Delta DBA \Rightarrow \frac{MI}{IB} = \frac{NI}{IB}$$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của *MN*

Bài 11: Cho hai đường tròn *(O_1); (O_2)* cắt nhau tại *A*, *B*. Điểm *Q* nằm trên *(O_2)*. Các đường thẳng *AQ*, *BQ* cắt lại *(O_1)* lần lượt tại *C*, *D*. Các tiếp tuyến tại *A* và *B* của *(O_2)* cắt nhau tại *P*. Chứng minh *QP* đi qua trung điểm của *CD*.

Lời giải:

Gọi *M* là giao điểm của *AB* và O_2O_1 ta có *M* là trung điểm của *AB*.

Để chứng minh *PQ* đi qua trung điểm *CD* thì ta cần chứng minh:

$\widehat{MQB} = \widehat{PQC}$ (*)

Thật vậy nếu có (*) ta gọi *K* là giao điểm *PQ* và *DC*.

Do tứ giác *ADBC* nội tiếp suy ra $\widehat{QBM} = \widehat{KCQ}$ kết hợp (*) ta có:

$\Delta MQB \backsim \Delta KQC \Rightarrow \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{QB}{AC}$ (1)

ADBC nội tiếp nên $\Delta QCD \backsim \Delta QBA \Rightarrow \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{QB}{QC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{MB}{KC} = \dfrac{BA}{CD}$ mà $MB = \dfrac{1}{2}AB$

$\Rightarrow KC = \dfrac{1}{2}DC$ hay *K* là trung điểm cua *DC*. Suy ra điều phải chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh (*) thật vậy *N* là giao điểm *PQ* và *(O_2)*

Do *PA* là tiếp tuyến của *(O_2)* nên $\Delta PAN \backsim \Delta PQA \Rightarrow \dfrac{PA}{PQ} = \dfrac{AN}{AQ} = \dfrac{PN}{PA}$ (3)

Tương tự *PB* là tiếp tuyến của *(O_2)* $\Rightarrow \dfrac{PB}{PQ} = \dfrac{BN}{QB} = \dfrac{PN}{PB}$ (4)

Mặt khác $PA = PB$ (5)

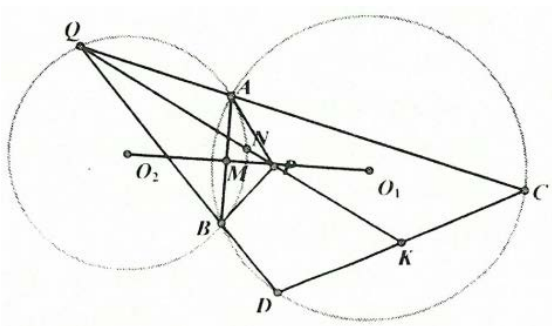
Từ (3), (4), (5) tacó: $\dfrac{NB}{QB} = \dfrac{AN}{QA} \Rightarrow BN.QA = AN.QB$ (6)

Theo định lí Pto-le-me ta có: $NA.QB + NB.QA = AB.QN$ (7)

Từ (6); (7) $\Rightarrow BN.QA = AN.QB = \dfrac{1}{2}AB.QB = BM.QN \Rightarrow \dfrac{BQ}{BM} = \dfrac{QN}{AN}$

$\widehat{QBM} = \widehat{QNA} \Rightarrow \Delta QBM \backsim \Delta QAN \Rightarrow \widehat{BQM} = \widehat{NQA}$

Vậy (*) được chứng minh.



CHƯƠNG 8
ĐIỂM CỐ ĐỊNH, ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH

1. KIẾN THỨC:

- Điểm cố định là điểm nằm trên đường cố định và cách điểm cố định khác một khoảng không đổi.
- Đường thẳng cố định là đường thẳng đi qua hai điểm cố định hay đi qua một điểm cố định và song song (hoặc vuông góc) với một đường cô định khác.

2. PHƯƠNG PHÁP:

- Điểm cố định là giao điểm của hai đường cố định.
- Đường thẳng cố định là đường thẳng đi qua hai điểm cố định hay đi qua một điểm cố định và song song (hoặc vuông góc) với một đường cố định khác.

3. BÀI TẬP:

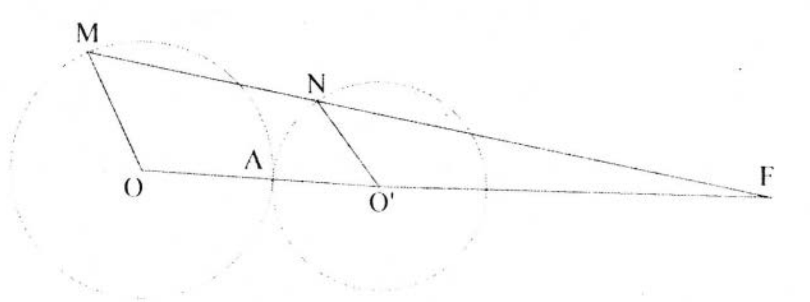
Bài 1: Cho hai đường tròn (O; a) và (O'; b) a > b > 0 tiếp xúc ngoài tại A. Trên một nửa mặt phẳng có bờ OO' vẽ các bán kính OM, O'N di động nhưng song song với nhau. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải:

Gọi *P* là giao điểm của *OO'* và *MN* Ta có 3 điểm *O, A, O'* thẳng hàng

Và $OO'=a+b$

Vì $OM//O'N$ nên



$\frac{PO'}{PO}=\frac{O'N}{OM}=\frac{b}{a}$

$\Rightarrow \frac{PO-PO'}{PO}=\frac{a-b}{a}$

$\Rightarrow \frac{OO'}{PO}=\frac{a-b}{a}$

$\Rightarrow PO=\frac{OO'.a}{a-b}=\frac{(a+b)a}{a-b}$ không đổi.

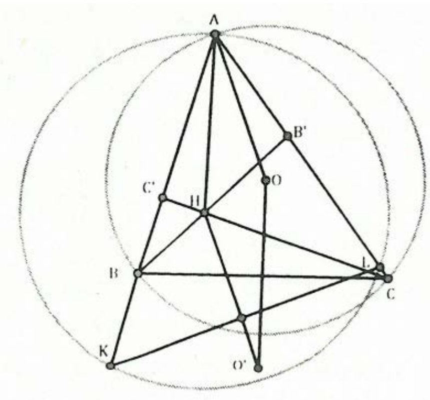
Điểm *P* nằm trên tia *OO'* và cách *O* là $\frac{(a+b)a}{a-b}$ nên *P* là một điểm cố định.

Vậy *MN* đi qua điểm *P* cố định.

Bài 2: Cho *BC* là dây cung của một đường tròn *(O; R)*, *A* là điểm chuyển động trên cung lớn *BC*, các đường cao *BB'*, *CC'* cắt nhau tại *H*. Đường tròn tâm *H* bán kính *HA* cắt *AB*, *AC* lần lượt tại *K*, *L*. Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ *H* vuông góc với *KL* đi qua một điểm cố định.

Lời giải:

Gọi *O'* đối xứng với *O* qua *BC*, suy ra *O'* cố định, vì trong một tam giác khoảng cách từ đỉnh đến trực tâm bằng hai lần khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đến cạnh đối diện của đỉnh đó.



Nên $AH = OO'$ (*)

Vì $AH \perp BC, OO' \perp BC$ nên $AH // OO'$ (**)

Từ (*), (**) $\Rightarrow$ tứ giác *AHO'O* là hình bình hành.

Đường thẳng kẻ từ *H* vuông góc với *KL* đi qua điểm cố định là *O'*.

Bài 3: Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn *(O)* với *AB* < *AC*. Trên cạnh *AB, AC* lấy lần lượt các điểm *D,E*. Vẽ $DH \perp BC, EK \perp BC$, biết *2HK = BC*. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác *ADE* luôn đi qua một điểm cố định khác *A*.

Lời giải:

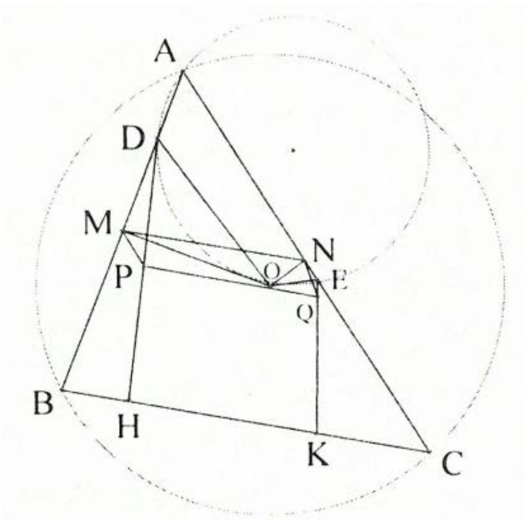
Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB, AC*.

Qua *O* kẻ một đường thẳng song song với *BC* cắt *DH* và *EK* tại *P* và *Q*.

Ta có $MA = MB \Rightarrow OM \perp AB \Rightarrow \widehat{DMO} = 90^o$ (1)

$PQ // BC$ mà $DH \perp BC$ nên

$DH \perp PQ$ $\widehat{DPO} = 90^o$ (2)



Từ (1), (2) $\Rightarrow$ tứ giác *ODMP* nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MPO} = \widehat{ADO}$ (*)

Tương tự, ta có tứ giác *ONEQ* nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NQP} = \widehat{AEQ}$ (**)

Ta có *MNQP* là hình bình hành

vì có $MN // PQ, MN = PQ\left(= KH = \dfrac{1}{2}BC\right)$

$\Rightarrow \widehat{MPQ} + \widehat{NQP} = 180^o$ (***)

Từ (*), (**), (***) $\Rightarrow \widehat{ADO} + \widehat{AEO} = 180^o$

$\Rightarrow$ *ADOE* nội tiếp

Vậy *(ADE)* luôn đi qua một điểm cố định là *O*.

Bài 4: Cho *(O)* và hai điểm *M, N* cố định (*M* nằm ngoài *(O); N* nằm trong *(O)*). Một dây cung *AB* thay đổi của *(O)* và đi qua *N*. Hai cát tuyến *MA, MB* cắt *(O)* tại điểm thứ hai lần lượt là *C, D*. $(C \neq A;\ D \neq B)$. Chứng minh:

1. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *MAB* đi qua hai điểm cố định.

2. Đường thẳng *CD* đi qua một điểm cố định.

Lời giải:

Gọi *P* là giao của đường tròn ngoại tiếp tam giác *MAB* với *MN* (*P* khác *M*).

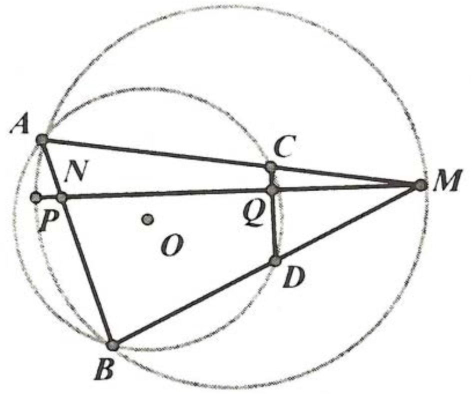
Ta chứng minh *P* cố định. Thật vậy ta có: $NP.NM = NA.NB$

$\Rightarrow NP = \dfrac{NA.NB}{NM} = \dfrac{R^2 - ON^2}{MN}$ không đổi

(R là bán kính của (O))

Mà P thuộc đường thẳng MN cố định (thuộc tia đối của MN) $\Rightarrow$ P cố định.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB luôn đi qua hai điểm M và P cố định.



2. Ta có:

$\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ ($ABCD$ nội tiếp); $\widehat{B_1} = \widehat{P_1}$ ($MAPB$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{P_1}$

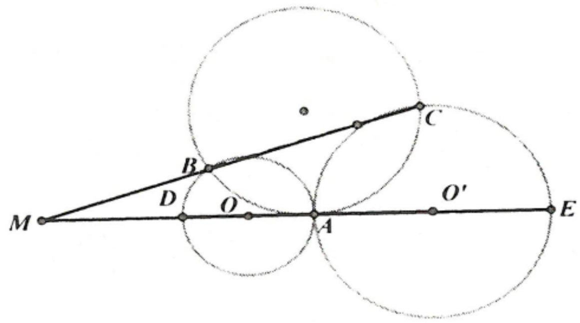
Gọi Q là giao điểm CD và MN.

Ta có tứ giác $CAPQ$ nội tiếp $\Rightarrow MQ.MP = MC.MA$

$\Rightarrow MQ = \dfrac{MC.MA}{MP} = \dfrac{MO^2 - R^2}{MP}$ không đổi.

Mà Q thuộc đoạn MN. Do vậy Q cố định, tức là CD luôn đi qua điểm Q cố định.

Bài 5: Cho hai đường tròn (O_1); (O_2) có bán kính khác nhau tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường tròn thay đổi tiếp xúc với O_1O_2 tại A và cắt (O_1); (O_2) lần lượt tại B, C. Chứng minh BC luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải:

Giả sử $r_1 > r_2$ (r_1, r_2 thứ tự là bán kính của (O_1); (O_2))

Gọi M là giao của BC và O_1O_2.

Ta chứng minh M cố định.

Thật vậy gọi D và E là giao của O_1O_2 với (O_2); (O_1) (D không trùng A, E không trùng A)

Ta có: $\widehat{D_1} = \widehat{A_1} + 90^o = \widehat{EBC} \Rightarrow BCDE$ nội tiếp nên $MD.ME = MC.MB$

Hay $MA^2 = \left(MA + 2r_1\right)\left(MA - 2r_2\right) \Rightarrow MA = \dfrac{2r_1.r_2}{r_1 - r_2}$ không đổi.

Mà M thuộc O_1O_2 cố định. Do vậy M cố định.

Bài 6: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại 2 điểm A và B sao cho O, O' nằm về hai phía của đường thẳng AB. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên (O), (O') sao cho $\widehat{MBN} = \alpha$ không đổi và M, N nằm về hai phía của AB. Giả sử tia OM; $O'N$ cắt nhau tại P. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN đi qua điểm cố định.

Lời giải:

Chứng minh góc *P* không đổi $\Leftrightarrow \widehat{OMN}+\widehat{O'NM}$ không đổi

$\Leftrightarrow \widehat{OMB}+\widehat{O'NB}+\widehat{BMN}+\widehat{BNM}$ không đổi

Hay $\widehat{OBM}+\widehat{O'BN}+180^o-\alpha \Leftrightarrow \widehat{OBO'}+180^o-2\alpha$ không đổi.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác *POO'* cố định.

Gọi *Q* là giao đường tròn ngoại tiếp tam giác *PMN* và tam giác *POO'*.

Ta có:

$\widehat{MOQ}=\widehat{NO'Q}$ (*PQOO'* nội tiếp);

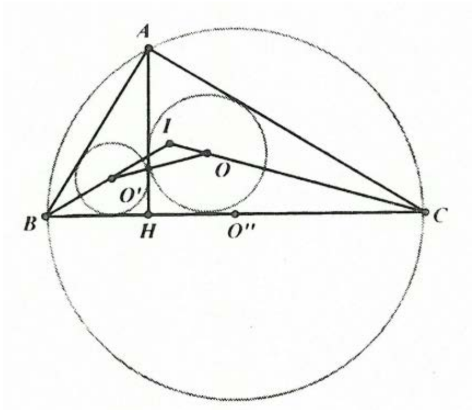
$\widehat{M_1}=\widehat{N_1}$ (*PQNM* nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{QMO}=\widehat{QNO'} \Rightarrow \Delta MOQ \backsim \Delta NO'Q$

$\Rightarrow \dfrac{QO}{QO'}=\dfrac{MO}{NO'}$ không đổi (2)

Từ (1) và (2) ta có *Q* cố định.

Bài 7: Cho *A* là điểm thay đổi trên nửa đường tròn đường kính *CB*. Hạ *AH* vuông góc với *CB*. Gọi *(O); (O')* lần lượt là các đường tròn nội tiếp tam giác *CAH; ABH*. Chứng minh rằng đường thẳng qua *A* vuông góc với *OO'* luôn đi qua điểm cố định.



Lời giải:

Gọi *I* là giao của *BO'* và *CO*, ta có *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*.

Ta sẽ chứng minh *AI* vuông góc với *OO'*. Ta có:

$\widehat{IBA}+\widehat{BAO}=\dfrac{1}{2}\widehat{HBA}+\widehat{BAH}+\widehat{HAO}$

$=\dfrac{1}{2}\widehat{HBA}+\widehat{BAH}+\dfrac{1}{2}\widehat{HAC}$

$=\widehat{BAH}+\dfrac{1}{2}\widehat{HAC}+\dfrac{1}{2}\widehat{HAC}=90^o$

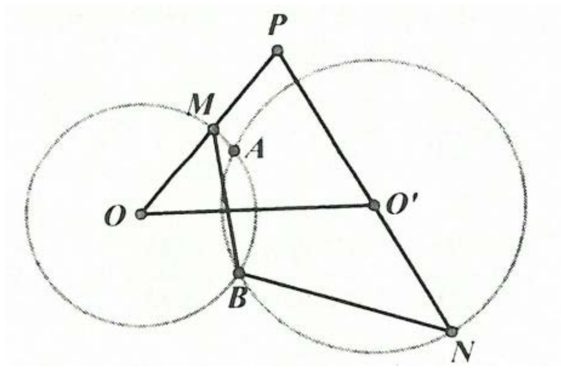
$\Rightarrow IO'\perp AO$

Tương tự ta có $IO\perp AO'$

Vậy trong tam giác *AOO'* có *I* là trực tâm suy ra *AI* vuông góc với *OO'*.

Vì *AI* là phân giác góc *A* nên *AI* đi qua điểm chính giữa cung *BC* cố định.

Vậy đường thẳng qua *A* vuông góc với *OO'* luôn đi qua một điểm cố định.



Bài 8: Cho bốn điểm *A, B, C, D* thẳng hàng theo thứ tự, *AB* ≠ *CD*. Điểm *M* thay đổi sao cho $\widehat{AMB}=\widehat{CMD}$; *M* không

thuộc *AB*. Chứng minh rằng *M* thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải:

Gọi *(O)* là đường tròn ngoại tiếp tam giác *MBC* và *E* là điểm chính giữa của cung *BC*. Gọi *P, Q* lần lượt là giao điểm thứ hai của *(O)* với *MA, MD*. Từ giả thiết suy ra *E* cũng là điểm chính giữa của cung *PQ*.

Do đó $PQ // BC$.

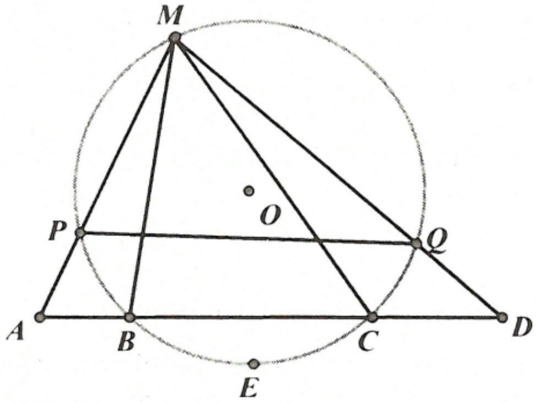
$$\Rightarrow \frac{AP}{QD} = \frac{AM}{DM}$$

Vậy

$$\frac{AB.AC}{DB.DC} = \frac{AP.AM}{DM.DQ} = \left(\frac{AM}{DM}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{DM} = \sqrt{\frac{AB.AC}{DB.DC}} \neq 1$$

$\Rightarrow$ *M* thuộc một đường tròn cố định



CHƯƠNG 9

TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC:

1. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến:

- Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.
- Nếu khoảng cách từ tâm của đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.
- Nếu một góc có đỉnh nằm trên đường tròn có một một cạnh chứa dây cung có số đo bằng nửa số đo của cung căng dây đó và cung này nằm bên trong góc thì cạnh kia là một tiếp tuyến.

2. TÍNH CHẤT TIẾP TUYẾN:

Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác góc tạo bởi hai tiếp tuyến
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

Nếu IM, IN là hai tiếp tuyến tại M và N của (O, R) thì:

$IM \perp OM; IN \perp ON; \widehat{OIM} = \widehat{OIN}; \widehat{IOM} = \widehat{ION}$

3. PHƯƠNG PHÁP:

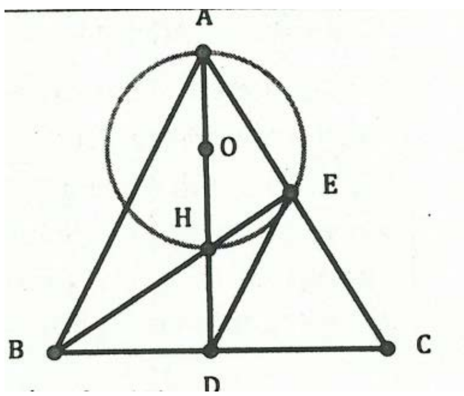
- Chứng minh đường thẳng và đường tròn chỉ có một điểm chung.
- Chứng minh khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn.
- Chứng minh đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.
- Hình duy nhất.

4. BÀI TẬP:

Bài 1: Cho tam giác *ABC* cân tại *A*, các đường cao *AD* và *BE* cắt nhau tại *H*. Vẽ đường tròn tâm *O* có đường kính *AH*.

Chứng minh rằng *DE* là tiếp tuyến của đường tròn tâm *O*.

Lời giải:



Xét ΔBEC vuông tại *E* có đường trung tuyến ED

$\Rightarrow ED = BD \Rightarrow \widehat{DEB} = \widehat{DBE}$ (1)

ΔAEH vuông tại *E* có đường trung tuyến

$\Rightarrow EO = HO \Rightarrow \widehat{OEH} = \widehat{OHE}$ (2)

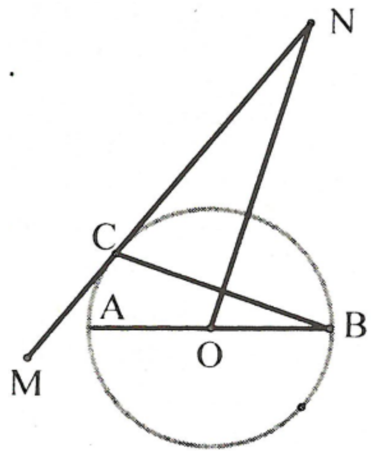
Mà $\widehat{OHE} = \widehat{DHB}$ (đđ) và $\widehat{DHB} + \widehat{DBE} = 90^o$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{OEH}+\widehat{DEB}=\widehat{OED}=90^o$

$\Rightarrow DE\perp OE$

Mà *E* thuộc đường tròn *(O)*. Do đó *DE* là tiếp tuyến của *(O)*.

Bài 2: Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB*. Lấy một điểm *M* sao cho *A* nằm giữa *B* và *M*. Kẻ đường thẳng *MC* tiếp xúc với *(O)* tại *C*. Từ *O* vẽ đường thẳng vuông góc với *CB*, đường thẳng này cắt tia *MC* tại *N*. Chứng minh rằng *NB* là tiếp tuyến của đường tròn *(O)*.



Lời giải:

Ta có $\widehat{NCO}=90^o$. Gọi *I* là giao điểm của *CB* và *ON*.

Tam giác *BOC* là tam giác cân, có *OI* là đường cao nên *OI* là phân giác của $\widehat{BOC}$.

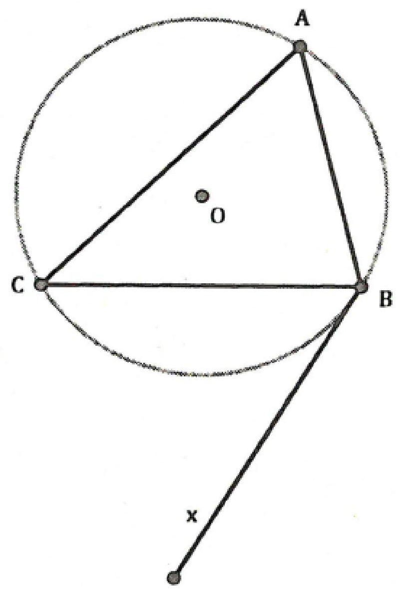
Hai tam giác *OCN* và *OBN* bằng nhau theo trường hợp cạnh - góc - cạnh, suy ra :

$\widehat{NCO}=\widehat{NBO}$ mà $\widehat{NCO}=90^o$

Nên $\widehat{NBO}=90^o\Rightarrow OB\perp BN$

$\Rightarrow BN$ là tiếp tuyến của *(O)*.

Bài 3: Cho tam giác *ABC* nội tiếp trong đường tròn tâm *O*. Vẽ tia *Bx* sao cho tia *BC* nằm giữa hai tia *Bx* và *BA*, biết $\widehat{CBx}=\widehat{BAC}$. Chứng minh rằng Bx là tiếp tuyến của đường *(O)*.



Lời giải:

Cách 1:

Gọi *D* là điểm chính giữa của cung *BC*

Khi đó $\widehat{BOD}=\widehat{A}$, theo giả thiết ta có $\widehat{A}=\widehat{CBx}\Rightarrow\widehat{BOD}=\widehat{CBx}$

Mặt khác : $\widehat{BOD}+\widehat{CBO}=90^o$

Nên $\widehat{CBx}+\widehat{CBO}=90^o\Rightarrow Bx\perp BO$

Và *B* thuộc *(O)*. Do đó *Bx* là tiếp tuyến của *(O)*.

Cách 2:

Vẽ tia *Bx'* là tia tiếp tuyến của đường tròn *(O)*.

Tia *Bx'* nằm trên nửa mặt phẳng bờ *BC* có chứa tia *Bx*.

Ta có $\widehat{CBx'}=\widehat{BAC}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Mà $\widehat{CBx}=\widehat{BAC}$ (gt)

Do đó $\widehat{CBx'}=\widehat{CBx}\Rightarrow$ 2 tia *Bx* và *Bx'* trùng nhau

Vậy *Bx* là tiếp tuyến của đường tròn *(O)*.

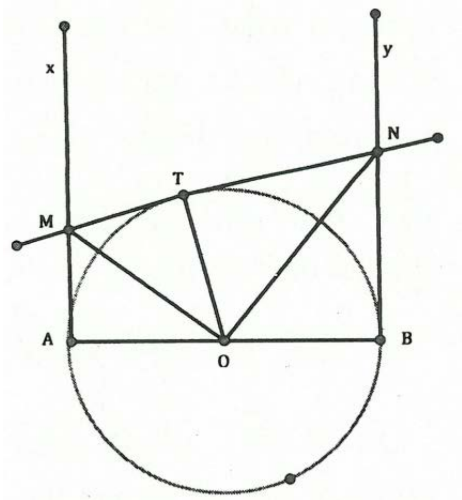
Bài 4: Cho nửa đường tròn *(O, R)* đường kính *AB* và hai tia *Ax*, *By* tiếp xúc với nửa đường tròn này lần lượt tại *A* và *B*. *T* là điểm thay đổi trên nửa đường tròn (*T* khác *A* và *B*). Tiếp tuyến tại *T* cắt các tia *Ax*, *By* lần lượt tại *M, N*.

a) Chứng minh rằng $MN = AM + BN$ và $OM \perp ON$

b) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{ON^2}$ và $AM.BN$ là các đại lượng không đổi.

c) Giả sử các đoạn *AN* và *BM* cắt nhau tại *C*, tia *TC* cắt *AB* tại *H*. Chứng minh rằng $TH \perp AB$ và *C* là trung điểm của *TH*.

Lời giải:



a) Ta có MA và MT là hai tiếp tuyến của đường tròn, suy ra OM là tia phân giác góc AOI và AM = MT.

NB và NT là hai tiếp tuyến của đường tròn, suy ra ON là tia phân giác $\widehat{BOT}$ và BN = TN.

Ta có $AM + BN = MT + TN = MN$

Vì OM và ON là hai tia phân giác hai góc kề bù AOT và BOT nên $OM \perp ON$.

b) Ta có $OT \perp MN$ (tính chất tiếp tuyến)

Tam giác MON vuông tại O

$\Rightarrow \dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{ON^2}=\dfrac{1}{OT^2}$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$OT = R \Rightarrow \dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{ON^2}=\dfrac{1}{R^2}$

Ta lại có $MT.TN = OM^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Vì $MT = AM, TN = BN, OM = R$ nên $AM.BN = MT.TN = OT^2 = R^2$ không đổi

c) Sử dụng định lí Ta-lét, ta có:

$AM // BN \Rightarrow \dfrac{MC}{CB}=\dfrac{AM}{BN}=\dfrac{TM}{TN}\Rightarrow TC // BN \Rightarrow TC \perp AB$ hay $TH \perp AB$

$\dfrac{TC}{BN}=\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{CA}{CN}=\dfrac{CH}{BN}\Rightarrow TC = CH$

Ví dụ 22: **(Đề thi tuyển sinh THPT Hà Nội - Amsterdam, 2000-2001)**

Cho đoạn *AB = 2a* và trung điểm *O*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* kẻ tia *Ax*, *By* vuông góc với *AB*. Một đường thẳng d thay đổi cắt *Ax* tại *M*, *By* tại *N* sao cho luôn có $AM.BN = a^2\left(a>0\right)$.

a) Chứng minh rằng hai tam giác *OAM*, *BNO* đồng dạng và $\widehat{MON} = 90^o$

b) Gọi *H* là hình chiếu của *O* trên *MN*. Chứng minh rằng *d* luôn tiếp xúc với nửa đường tròn cố định tại điểm *H*.

Lời giải:

a) $AM.BN = a^2 = OA.ON$ (giả thiết) $\Rightarrow \dfrac{AM}{OB} = \dfrac{OA}{BN}$

Mà $\widehat{MOA} = \widehat{BON} = 90^o$

$\Rightarrow \Delta AOM = \Delta BNO\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{BNO}$

$\Rightarrow \widehat{AOM} + \widehat{BON} = \widehat{BNO} + \widehat{BON} = 90^o \Rightarrow \widehat{MON} = 90^o$

b) Xét các tam giác vuông *OAM* và *OBN*

$OM^2 = OA^2 + AM^2, ON^2 = OB^2 + BN^2$ (định lí Pytago)

Mà $OA = OB = a \Rightarrow OM^2 = a^2 + AM^2, ON^2 = a^2 + BN^2$

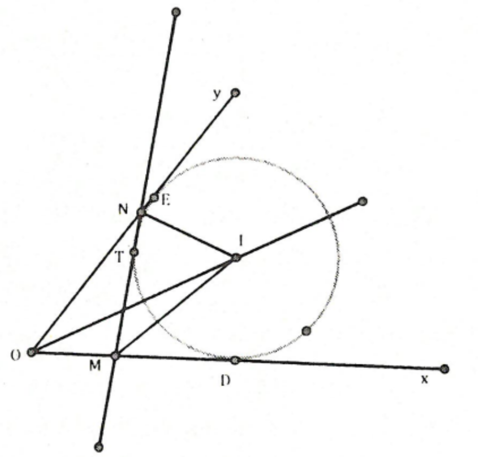
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông *OMN*, ta có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2 + AM^2} + \frac{1}{a^2 + BN^2}$$

Theo giả thiết $AM.BN = a^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2 + AM^2} + \frac{1}{a^2 + BN^2} = \frac{1}{AM.BN + AM^2} + \frac{1}{AM.BN + AM^2}$$
$$= \frac{1}{AM\left(AM + BN\right)} + \frac{1}{BN\left(AM + BN\right)} = \frac{1}{AM.BN} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow OH = a$$

Vậy *d* luôn tiếp xúc với nửa đường tròn tâm *O* bán kính *a*.



Bài 5: Cho điểm *I* nằm trên tia phân giác góc *xOy*. Kẻ đường tròn tâm *I* tiếp xúc với *Ox, Oy* lần lượt tại *D* và *E*. Giả sử *T* là điểm bất kì trên cung nhỏ *DE* của đường tròn. Tiếp tuyến tại *T* của đường tròn cắt các tia *Ox* và *Oy* lần lượt tại *M* và *N*. Chứng minh rằng khi *T* thay đổi trên cung nhỏ *DE* thì chu vi tam giác *OMN* không đổi và số đo góc *MIN* không đổi.

Lời giải:

+) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm ta có :

$MT = MD, NT = NE$

$\Rightarrow MT + TN = MD + NE \Rightarrow MN = MD + ME$

$OM + ON + MN = OM + MD + ON + NE = OD + OE$

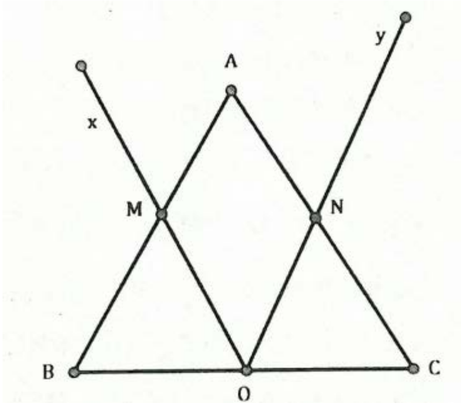
Vì *O, D, E* cố định nên chu vi tam giác *OMN* bằng *OD* + *OE* không đổi.

+) Lại sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm ta có *IM* và *IN* lần lượt là tia phân giác các góc *TID* và *TIE*.

$\Rightarrow \widehat{TIM} = \frac{1}{2}\widehat{TID}, \widehat{TIN} = \frac{1}{2}\widehat{TIE}$

$\Rightarrow \widehat{TIM} + \widehat{TIN} = \frac{1}{2}\left(\widehat{TID} + \widehat{TIE}\right) = \frac{1}{2}\widehat{DIE}$

$\Rightarrow \widehat{MIN} = \frac{1}{2}\widehat{DIE}$ không đổi



Bài 6: Cho tam giác đều *ABC* có O là trung điểm của *BC*. Dựng góc $\widehat{xOy} = 60^o$, *Ox* cắt cạnh *AB* tại *M*; *Oy* cắt cạnh *AC* tại *N*.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BOM} + \widehat{CON} = 120^o$ và $\widehat{BOM} = \widehat{CNO}$

b) Chứng minh rằng tam giác *MBO* đồng dạng với tam giác *OCN* và $BC^2 = 4MB.NC$

c) Chứng minh rằng tam giác *MBO* đồng dạng với tam giác *MON* và *MO* là phân giác góc *BMN*

d) Giả sử góc *xOy* quay quanh *O* nhưng *Ox* và *Oy* vẫn lần lượt cắt cạnh *AB* và *AC* tại *M* và *N*. Chứng minh rằng *MN* luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải:

a) Ta có $\widehat{BOM} + \widehat{MOC} = 180^o$ (hai góc kề bù)

$\widehat{BOM} + \widehat{MON} + \widehat{NOC} = 180^o$

Mà $\widehat{MON} = 60^o$

$\Rightarrow \widehat{BOM} + 60^o + \widehat{NOC} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{BOM} + \widehat{NOC} = 120^o \qquad (1)$

Xét ΔCON ta có: $\widehat{CNO} + \widehat{OCN} + \widehat{CON} = 180^o$

(tổng ba góc trong 1 tam giác)

$\Rightarrow \widehat{CNO} = 180^o - \widehat{OCN} - \widehat{NOC} = 180^o - 60^o - \widehat{NOC} = 120^o - \widehat{NOC}$

$\Rightarrow \widehat{CNO} + \widehat{NOC} = 120^o \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{BOM} = \widehat{CNO}$

b) Xét hai tam giác *MBO* và *OCN*, ta có

$\widehat{BOM} = \widehat{CNO}$ (chứng minh trên), $\widehat{MBO} = \widehat{OCN} = 60^o$

$\Rightarrow \Delta MBO \backsim \Delta OCN\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{MB}{OC} = \frac{BO}{CN} \Rightarrow MB.CN = BO.OC$

Mặt khác $BO = OC = \frac{1}{2}BC$ (giả thiết) $\Rightarrow BO.OC = \frac{1}{2}BC.\frac{1}{2}BC = \frac{1}{4}BC^2$

$\Rightarrow BC^2 = 4MB.NC$

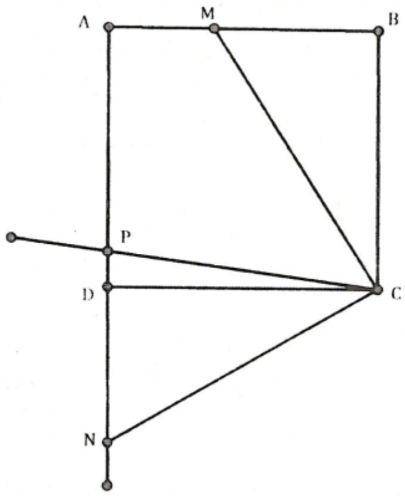
c) Ta có $\frac{MB}{OC} = \frac{MO}{ON}, OB = OC \Rightarrow \frac{MB}{OB} = \frac{MO}{ON}$

Kết hợp với $\widehat{MBO} = \widehat{MON} = 60^o \Rightarrow \Delta MBO = \Delta MON\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow \widehat{BMO} = \widehat{OMN}$. Vậy *OM* là phân giác của góc *BMN*.

d) Gọi *OH* là khoảng cách từ *O* đến *MB* thì $OH = OB\sin 60^o = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Khi đó khoảng cách từ *O* đến *MN* cũng bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$



Vậy *MN* luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm *O* bán kính $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Bài 7: Cho hình vuông *ABCD* cạnh *a*. Lấy điểm *M* thuộc cạnh *AB* và điểm *N* thuộc tia đối của tia *DA* sao cho *DN* = *BM*. Giả sử tia phân giác của góc *MCN* cắt cạnh *AD* tại *P*. Chứng minh rằng :

a) $CM = CN$ và $CM \perp CN$

b) $MP = PN$

c) *MP* là tiếp tuyến đường tròn tâm c bán kính a.

Lời giải:

a) Xét hai tam giác *BMC* và *DNC*:

$BC = CD$

$\widehat{MBC} = \widehat{NDC} = 90^o$

$BM = DN$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta BMC = \Delta NDC$

$\Rightarrow CM = CN$ và $\widehat{BCM} = \widehat{DCN}$

Ta có: $\widehat{MCN} = \widehat{MCD} + \widehat{DCN} = \widehat{MCD} + \widehat{BCM}$

$\Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{BCD} = 90^o \Rightarrow CM \perp CN$

b) Xét hai tam giác *MCP* và *NCP*

Cạnh CP chung, $\widehat{PCM} = \widehat{PCN}$ (giả thiết), $CM = CN$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta CPM = \Delta CPN\left(c.g.c\right) \Rightarrow MP = PN$

c) Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *C* lên *MP*.

Hai tam giác vuông *CPD* và *CPH* có cạnh huyền *CP* chung và $\widehat{CPH} = \widehat{CPD}$ (vì *ΔCPM* = *ΔCPN*)

$\Rightarrow \Delta CPH = \Delta CPD \Rightarrow CH = CD \Rightarrow CH = a$

Vậy *MP* là tiếp tuyến của đường tròn tâm *C* bán kính *a*.

Bài 8: Cho hai đường tròn *(O; R)* và *(I; r)* tiếp xúc trong với nhau tại *T (r < R)*. Kẻ ba tia bất kì chung gốc *T*, tia *Tx* cắt đường tròn *(I, r)* tại *A* và cắt đường tròn *(O, R)* tại điểm thứ hai *M*. Tia *Ty* cắt đường tròn *(I, r)* tại *B* và cắt đường tròn *(O, R)* tại điểm thứ hai *N*, tia *Tz* cắt đường tròn *(I, r)* tại *C* và cắt đường tròn *(O, R)* tại điểm thứ hai *P*.

Chứng minh rằng:

a) $AB//MN, BC//NP, CA//PM$

b) Hai tam giác *ABC* và *MNP* đồng dạng.

Lời giải:

a) Ta chứng minh $\frac{TM}{TA} = \frac{TI}{TO} = \frac{r}{R}$

Các tam giác *ITM* và *ITA* cân nên $\widehat{IMT} = \widehat{ITM}, \widehat{OAT} = \widehat{OTA}$

mà $\widehat{ITM} = \widehat{OTA}$

$\Rightarrow \widehat{IMT} = \widehat{OAT} \Rightarrow IM//OA \Rightarrow \frac{TM}{TA} = \frac{TI}{TO} = \frac{IM}{OA} = \frac{r}{R}$

Chứng minh tương tự:

$\frac{TN}{TB} = \frac{TI}{TO} = \frac{r}{R}, \frac{TP}{TC} = \frac{TI}{TO} = \frac{r}{R}$

Ta có: $\frac{TM}{TA} = \frac{TN}{TB} \Rightarrow MN//AB, \frac{MN}{AB} = \frac{TN}{TB} = \frac{r}{R}$

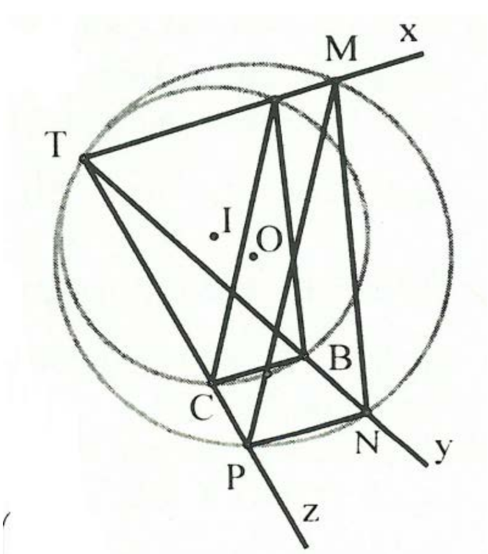
Chứng minh tương tự

$NP//PC, \frac{NP}{BC} = \frac{TN}{TB} = \frac{r}{R}, PM//CA, \frac{PM}{CA} = \frac{TP}{TC} = \frac{r}{R}.$

b) Theo kết quả câu trên ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA}\left(=\frac{r}{R}\right)$

Suy ra hai tam giác *MNP* và *ABC* đồng dạng theo tỉ số $\frac{r}{R}$

Bài 9: Cho hai đường tròn *(O, R)* và *(I, r)* tiếp xúc ngoài nhau tại *T (r < R)*. Hai tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn cắt nhau tại *K*, tiếp tuyến thứ nhất tiếp xúc với *(O, R)* và *(I, r)* lần lượt tại *A* và *M*, tiếp tuyến thứ hai tiếp xúc với *(O, R)* và *(I, r)* lần lượt tại *B* và *N*. Chứng minh rằng:



a) Bốn điểm *O, T, I, K* thẳng hàng.

b) $\widehat{ATM} = \widehat{BTN} = 90^o$

c) *KT* là tiếp tuyến chung của đường tròn đường kính *AM* và đường tròn đường kính *BN*.

d) $AM = BN = \frac{1}{2}(AB + MN)$

e) *KA* và *KD* là tiếp tuyến của đường tròn đường kính *OI*

Lời giải:

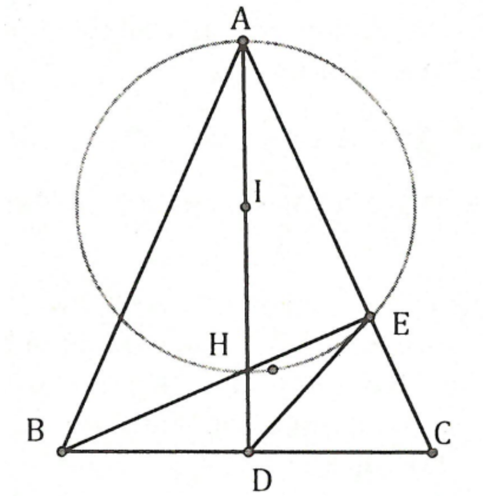
a) Vì *T* là tiếp tuyến của hai đường tròn nên *T, O, I* thẳng hàng. Vì *KO* và *KI* đều là tia phân giác góc *AKB* nên *K, O,* I thẳng hàng. Vậy 4 điểm *O, I, T, K* thẳng hàng

b) Kẻ tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tại *T*.

Giả sử tiếp tuyến này lần lượt cắt *KA* và *KB* lần lượt ở *P, Q*. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm ta có: $PA = PI = PM$,

$QB = QI = QN$. Suy ra các tam giác *ATM* và *BTN* cùng vuông tại *T*.

c) Ta có $OA \perp KA, IM \perp KA \Rightarrow OA//IM \Rightarrow OAMI$ là hình thang vuông. Gọi *J* là trung điểm của *OI*, theo chứng minh trên *P* là trung điểm của *AM*.



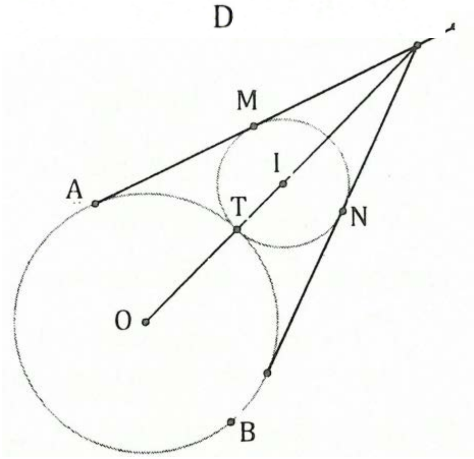
$\Rightarrow$ *JP* là đường trung bình của hình thang vuông *OAMI*

$$\Rightarrow JP \perp AM, JP = \frac{1}{2}(OA + IM) = \frac{1}{2}(R + r) = \frac{1}{2}OI$$

Vì $JP = \frac{1}{2}OI, AM \perp JP$ nên *AM* tiếp xúc với đường tròn tâm *J* đường kính *OI* tại điểm *P*. Chứng minh tương tự, *BN* tiếp xúc với đường tròn tâm *J* đường kính *OI* tại điểm *Q*.

d) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm ta có $KA = KB, KM = KN$

$\Rightarrow KA - KM = KB - KN \Rightarrow AM = BN$



Lại có $PQ = IP + IQ, IP = \frac{1}{2}AM, IQ = \frac{1}{2}BN \Rightarrow AM = BN = PQ$

Vì các tam giác *KAB* và *KMN* cân đỉnh *K*. *KO* là tia phân giác góc *AKB* nên $AK \perp KO, MN \perp KO \Rightarrow AB//MN \Rightarrow ABNM$ là hình thang. Ta có *PQ* là đường trung bình hình thang.

$$\Rightarrow PQ = \frac{1}{2}(AB + CD) \Rightarrow AB = MN = PQ = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

Bài 10: Cho tam giác *ABC* cân đỉnh *A*. Kẻ hai đường cao *AD* và *BE* cắt nhau tại *H*. Chứng minh rằng *ED* là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEH*.

Lời giải:

Gọi *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *AHE*, vì tam giác vuông tại *E* nên *I* là trung điểm của *AH*.

Ta chứng minh $ED \perp EI$: Theo tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông ta có

$$IA = IE\left(= \frac{1}{2}AH\right), BD = DE\left(= \frac{1}{2}BC\right)$$

$\Rightarrow$ Các tam giác *IAE* và *BDE* cân

$\Rightarrow \widehat{IEA} = \widehat{IAE}, \widehat{DEB} = \widehat{DBE}$

Mặt khác $\widehat{IEA} = \widehat{DBE}\left(=90^o - \widehat{C}\right) \Rightarrow \widehat{IEA} = \widehat{DEB}$

$\Rightarrow \widehat{DEB} + \widehat{IEH} = \widehat{IEA} + \widehat{IEH} = 90^o$

$\Rightarrow DE \perp EI \Rightarrow ED$ là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEH*

Bài 11: Cho tam giác *ABC* có $\widehat{A} > \widehat{C}$. Lấy điểm *D* thuộc cạnh *BC* sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{C}$. Chứng minh rằng *AB* là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác *ACD*.

Lời giải:

Cách 1.

Gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ACD*.

Tacó $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}\widehat{AOD}$ (liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm) và $\widehat{ACD} = \widehat{BAD}$

(giả thiết) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{AOD} \qquad (1)$

Xét $\Delta AOD, \widehat{OAD} + \widehat{DAO} + \widehat{ODA} = 180^o$

Mặt khác, tam giác *AOD* cân tại *O*

$\Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{ODA} \Rightarrow 2\widehat{OAD} + \widehat{AOD} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{OAD} + \frac{1}{2}\widehat{AOD} = 90^o \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\angle OAD + \angle BAD = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{OAB} = 90^o \Rightarrow AB \perp OA \Rightarrow$ Tia *AB* là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác *ACD*.

Cách 2: Trên nửa mặt phẳng chứa điểm *B* có bờ là đường thẳng *AC*, kẻ tia *Ax* tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác *ACD* tại *A*.

Theo tính chất góc nội tiếp, ta có $\widehat{C} = \frac{1}{2} sd\,\widehat{AD}$

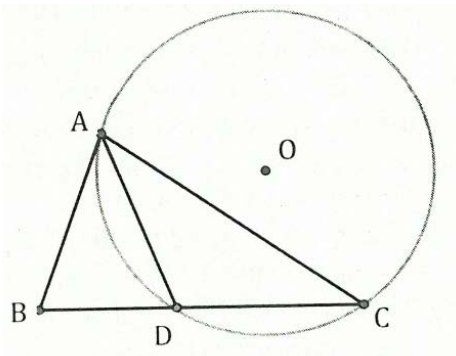
Mặt khác $\widehat{DAB} = \widehat{C}$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{DAB} = \frac{1}{2} sd\,\widehat{AD}$

Theo tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây cung ta có:

$\widehat{DAx} = \frac{1}{2} sd\,\widehat{AD} \Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DAx}$

Vì hai tia *AB* và *Ax* cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ *AC* nên hai tia này trùng nhau

$\Rightarrow$ Tia *AB* là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác *ACD*



Bài 11: Cho nửa đường tròn tâm *O*, đường kính *BC* và một điểm *A*

trên nửa đường tròn (*A* khác *B*,*C*). Hạ *AH* vuông góc với *BC* (*H* thuộc *BC*). Trên nửa mặt phẳng bờ *BC* chứa *A* dựng hai nửa đường tròn đường kính *HB* và *HC*, chúng lần lượt cắt *AB* và *AC* tại *E* và *F*.

a) Chứng minh rằng *AB.AE = AC.AF*

b) Chứng minh rằng *EF* là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn đường kính *HB* và *HC*.

c) Gọi *I* và *K* lần lượt là hai điểm đối xứng với *H* qua *AB* và *AC*. Chứng minh rằng ba điểm *I, A, K* thẳng hàng.

d) Đường thẳng *IK* cắt tiếp tuyến kẻ từ *B* của nửa đường tròn *(O)* tại *M*. Chứng minh rằng *MC, AH, EF* đồng quy

Lời giải:

a) Xét tam giác vuông *ABH* có $HE \perp AB \Rightarrow AB.\mathrm{AE} = \mathrm{AH}^2$

Xét tam giác vuông *ACH* có $HF \perp AC \Rightarrow AC.AF = AH^2$

Từ các đẳng thức trên suy ra $AB.AE = AC.AF$

b) Gọi *P, Q* lần lượt là trung điểm của *HB* và *HC*.

Ta có tam giác *PEH* cân tại *P*, suy ra $\widehat{HEP} = \widehat{PHE}$

$\widehat{HCF} = \widehat{PHE}$ (hai góc đồng vị), suy ra $\widehat{HEP} = \widehat{HCF}$

Mặt khác *AEHF* là hình chữ nhật nên ta có $\widehat{HEF} = \widehat{HAF}$

Từ các đẳng thức trên, suy ra $\widehat{HEP} + \widehat{HEF} = \widehat{HCF} + \widehat{HAF} = 90^o$

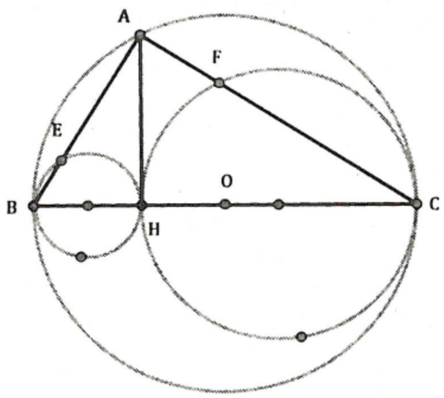
Suy ra $EF \perp PE$, do đó *EF* là tiếp tuyến của đường tròn đường kính *BH*.

Chứng minh tương tự, *EF* là tiếp tuyến đường tròn đường kính *CH*.

c) Theo tính chất đối xứng, ta có

$\widehat{IAH} = 2\widehat{BAH}; \widehat{KAH} = 2\widehat{CAH}$

$\Rightarrow \widehat{IAH} + \widehat{KAH} = 2\left(\widehat{BAH} + \widehat{CAH}\right) = 180^o$



Suy ra *I, A, K* thẳng hàng.

d) Gọi *N* là giao điểm của *BM* với *CA*.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có *MB = MA*, vì tam giác *BAN* vuông tại *A* nên *M* là trung điểm *BN*. Mặt khác *AH // BN*, suy ra *CM* đi qua trung điểm của *AH*. Mặt khác *AEHF* là hình chữ nhật nên *EF* đi qua trung điểm *AH*.

Suy ra *CM, AH, EF* đồng quy.

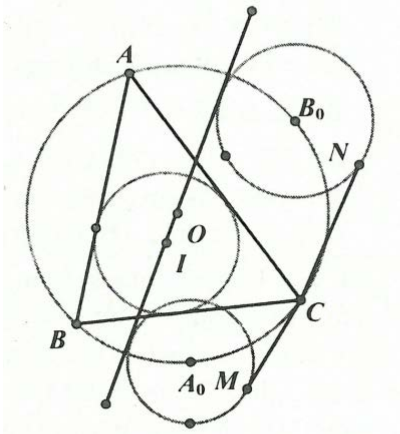
Bài 12: Cho *(O)* đường kính *AB = 2R*. Điểm *C* thuộc đường tròn (*C* không trùng với *A* và *B*). Trên nửa mặt phẳng bờ *AB* có chứa điểm *C* kẻ tia tiếp tuyến *Ax* với *(O)*. Gọi *M* là điểm chính giữa cung nhỏ *AC*. Tia *BC* cắt *Ax* tại *Q*, *AM* cắt *BC* tại *N*, *AC* cắt *BM* tại *P*.

1. Chứng minh tam giác *ABN* cân

2. Gọi K là điểm chính giữa của cung AB (cung không chứa C). Hỏi có thể xảy ra trường hợp 3 điểm Q, M, K thẳng hàng không?

3. Xác định vị trí của C trên nửa đường tròn tâm O để đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tiếp xúc với (O)

Lời giải:



1. M là điểm chính giữa cung AC nên $MA = MC$. Vì vậy trong tam giác vuông CAN có CM là đường trung tuyến. Do đó $MN = MA$.

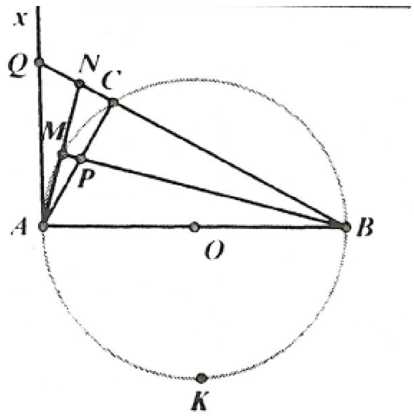
Tam giác BAN có BM là đường cao vừa là trung tuyến nên tam giác BAN cân tại B.

2. Ba điểm M, Q, K không thể thẳng hàng vì nếu trái lại thì QM là phân giác góc AQB và BM là phân giác góc AQB.

Trong khi đó BM là phân giác góc ABQ.

Vậy M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABQ \Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung AB

$\Rightarrow C$ trùng B. Mâu thuẫn



3. Đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tiếp xúc nhau tại M khi và chỉ khi chúng có tiếp tuyến chung tại M.

Điều đó tương đương với: $\widehat{MQN} = \widehat{MBC}$

$\Leftrightarrow \Delta MQB$ cân tại $M \Leftrightarrow QN = BC$ (ΔMCN cân tại M) (*)

Mặt khác $BA = BN$ nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ta có:

$$AB^2 = BC.BQ = BC\left(BN + NQ\right) = BC\left(AB + NQ\right)$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow AB^2 = BC\left(AB + BC\right)$

$$\Leftrightarrow BC^2 + AB.BC - AB^2 = 0 \Leftrightarrow BC = \frac{1-\sqrt{5}}{2}AB$$

Vậy (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi $BC = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}AB$

Bài 13: Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Các điểm A_O; B_O lần lượt là điểm chính giữa cung CB (không chứa A), cung CA (không chứa B). Đường tròn (A_O) tiếp xúc với cạnh BC, đường tròn (B_O) tiếp xúc với cạnh AC. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thuộc một tiếp tuyến chung của (A_O); (B_O).

Lời giải:

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Kẻ tiếp tuyến CM; CN lần lượt tới các đường tròn (A_O); (B_O) có tiếp tuyến không trùng với cạnh của tam giác

Khi đó: $\widehat{ACM} - 2\widehat{BCA_O} = \widehat{A}$;

$\widehat{ACN}=2\widehat{ACB_O}=\widehat{B}\Rightarrow \widehat{MCN}=\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^o$

$\Rightarrow$ *M*, *C*, *N* thẳng hàng $\Rightarrow$ *C* nằm trên tiếp tuyến chung của $(A_O); (B_O)$

Mặt khác *I* và *C* đối xứng qua A_OB_O nên *I* cũng nằm trên tiếp tuyến chung của $(A_O); (B_O)$

Bài 14: (Lớp 10 THPT Tỉnh Đồng Nai 2012 - 2013) : Cho hình vuông *ABCD*. Lấy điểm *E* thuộc cạnh *BC*, với *E* không trùng *B* và *E* không trùng *C*. Vẽ *EF* vuông góc với *AE*, với *F* thuộc *CD*. Đường thẳng *AF* cắt đường thẳng *BC* tại *G*. Vẽ đường thẳng *a* đi qua điểm *A* và vuông góc với *AE*, đường thẳng *a* cắt đường thẳng *DE* tại điểm *H*.

1. Chứng minh $\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{CD}{CE}$.

2. Chứng minh rằng tứ giác *AEGH* là tứ giác nội tiếp được đường tròn.

3. Gọi *b* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *AHE* tại *E*, biết *b* cắt đường trung trực của đoạn thẳng *EG* tại điểm *K*. Chứng minh rằng *KG* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *AHE*.

Lời giải:

1. Tứ giác *AEFD* có : $\widehat{AEF}+\widehat{ADF}=90^o+90^o=180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác *AEFD* nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{EAF}=\widehat{EDF}$

Xét *ΔEAF* và *ΔCDE* có :

$\widehat{AEF}=\widehat{DCE}\left(=90^0\right)$

$\widehat{EAF}=\widehat{CDE}$ (cm trên)

Do đó $\Delta EAF\backsim\Delta CDE\left(g.g\right)\Rightarrow \dfrac{AE}{AF}=\dfrac{CD}{DE}$.

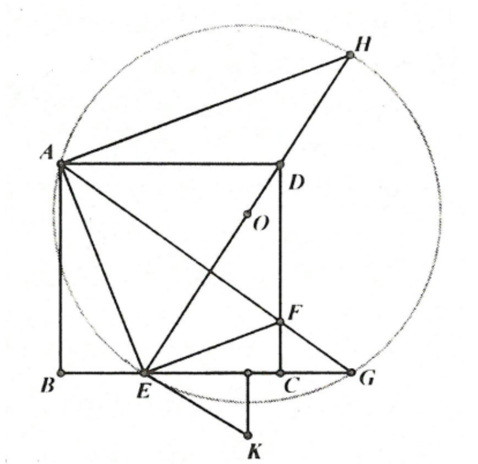
2. Ta có $\widehat{EAF}+\widehat{HAG}=90^o$;

$\widehat{CDE}+\widehat{HEG}=90^o$ (*ΔCDE* vuông tại *C*),

$\widehat{EAF}=\widehat{CDE}$ (cm trên)

Suy ra $\widehat{HAG}=\widehat{HEG}$. Vậy tứ giác *AEGH* nội tiếp.

3. Gọi *O* là trung điểm *HE*.



Ta có *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác *AEGH* cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác *AHE*.

Xét *ΔOEK* và *ΔOGK* có : $OE=OG\left(=R\right), OK$ (cạnh chung)

$KG=KE$ (*K* thuộc đường trung trực của *EG*)

Do đó $\Delta OEK=\Delta OGK\left(c.c.c\right)\Rightarrow \widehat{OEK}=\widehat{OGK}$

Mà $\widehat{OEK}=90^o, KG\perp OG$, *G* thuộc đường tròn *(O)*

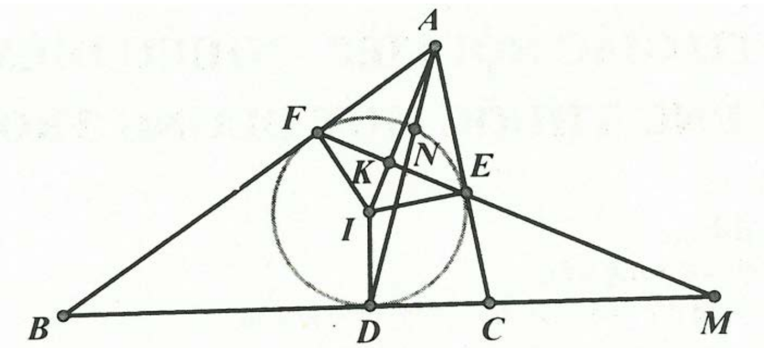
Do đó *KG* là tiếp tuyến của đường tròn *(O)*. Tức là *KG* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *AHE*.

Bài 15: **(Lớp 10 Chuyên Môn chuyên Tỉnh Đồng Nai 2012 - 2013)** : Cho tam giác *ABC* không là tam giác cân, biết tam giác *ABC* ngoại tiếp đường tròn *(I)*. Gọi *D, E, F* lần lượt là các tiếp điểm của *BC, CA, AB* với đường tròn *(I)*. Gọi *M* là giao điểm của đường thẳng *EF* và đường thẳng *BC*, biết *AD* cắt đường tròn *(I)* tại *N* (không trùng với *D*), gọi *K* là giao điểm của *AI* và *EF*.

1. Chứng minh rằng các điểm *I, D, N, K* cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh *MN* là tiếp tuyến của đường tròn *(I)*.

Lời giải:



1. *AE, AF* là các tiếp tuyến của đường tròn *(I)* $\Rightarrow AE = AF$

AI là tia phân giác của $\widehat{EAF}, \Delta AEF$ cân tại *A*

Do đó *AI* là đường cao của ΔAEF.

ΔEAI vuông tại *E*, *EK* là đường cao $\Rightarrow AE^2 = AK.AI$

Xét ΔAEN và ΔADE có : $\widehat{EAN}$ (chung)

và $\widehat{AEN} = \widehat{ADE}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Do đó $\Delta AEN \backsim \Delta ADE\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AN}{AE} \Rightarrow AE^2 = AD.AN$

Ta có $AK.AI = AN.AD\left(= AE^2\right)$

Xét ΔANK và ΔAID có : $\widehat{NAK}$ (chung), $\dfrac{AN}{AI} = \dfrac{AK}{AD}$ (vì $AK.AI = AN.AD$)

Do đó $\Delta ANK \backsim \Delta AID\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{ADI}$

Vậy tứ giác *DKNI* nội tiếp.

Do đó các điểm *I, D, N, K* cùng thuộc một đường tròn.

2. *MD* là tiếp tuyến *của (I)* $\Rightarrow MD \perp ID$

Tứ giác *MKID* có $\widehat{MKI} + \widehat{MID} = 90^o + 90^o = 180^o$

Do đó *MKID* nội tiếp $\Rightarrow$ *M, K, I, D* cùng thuộc 1 đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{MNI} = \widehat{MKI} = 90^o$

Ta có $MN \perp IN, N \in (I)$

Vậy *MN* là tiếp tuyến của đường tròn *(I).*

CHƯƠNG 10
TỨ GIÁC NỘI TIẾP - NHIỀU ĐIỂM CÙNG THUỘC MỘT ĐƯỜNG TRÒN

1. KIẾN THỨC :

- Định nghĩa đường tròn.
- Vị trí tương đối của một điểm với đường tròn.
- Tứ giác nội tiếp.
- Phương pháp chứng minh tứ giác nội tiếp

Để chứng minh tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn, là chứng minh tứ giác thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

4 đỉnh A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Tổng hai góc đối bằng 180°.

Góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện.

Hai đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh dưới một góc chung anpha

Đặc biệt, ta có thể sử dụng tính chất của tam giác vuông: "Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm cạnh huyền". Như vậy nếu tứ giác *ABCD* thỏa mãn hai đỉnh *B, D* cùng nhìn *AC* dưới một góc vuông thì tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính *AC*, nếu tứ giác *ABCD* thỏa mãn hai đỉnh *B, C* cùng nhìn *AD* dưới một góc vuông thì tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính *AD*.

Tính chất tứ giác nội tiếp

Giả sử *ABCD* nội tiếp đường tròn. Ta có:

Tổng hai góc đối bằng 180°:

$\widehat{BAD}+\widehat{BCD}=\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180^o$

Góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện:

$\widehat{A'AB}=\widehat{BCD},\ \widehat{B'BC}=\widehat{CDA},$

$\widehat{C'CD}=\widehat{DAB},\ \widehat{D'DA}=\widehat{ABC}$

Hai đỉnh kề nhau nhìn một cạnh theo hai góc có số đo bằng nhau

$\widehat{ACB}=\widehat{ADB},\widehat{BAC}=\widehat{BDC},\widehat{CAD}=\widehat{CBD},\widehat{DBA}=\widehat{DCA}.$

2. PHƯƠNG PHÁP:

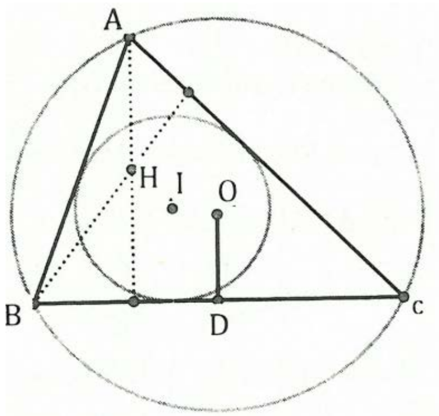
- Chứng minh tồn tại một điểm cách đều bốn đỉnh của tứ giác (định nghĩa đường tròn)
- Chứng minh tứ giác đó có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau (quỹ tích cung chứa góc)
- Dựa vào định nghĩa của tứ giác nội tiếp

- Nếu một tứ giác có hai góc đối bù nhau thì tứ giác đó nội tiếp được một đường tròn(định lí đảo của tứ giác nội tiếp). Do đó nếu một tứ giác có một góc bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện thì tứ giác đó nội tiếp được một đường tròn (hệ quả)

- Thêm điểm

3. BÀI TẬP:

Bài 1: Cho tam giác *ABC* nội tiếp *(O; R), H* là trực tâm, *I* và *O* là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác *ABC*, đồng thời *AH* bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Chứng minh rằng *B, C, O, I, H* nằm trên một đường tròn.



Lời giải:

Gọi *D* là trung điểm $BC \Rightarrow OD \perp BC$ trong mọi tam giác ta có: $AH = 2.OD$ (tự chứng minh)

Theo giả thiết $AH = R \Rightarrow R = OB = 2.OD$

ΔOBD là tam giác vuông có $OB = 2.OD$

$\Rightarrow \widehat{OBD} = 30^o \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^o \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^o$

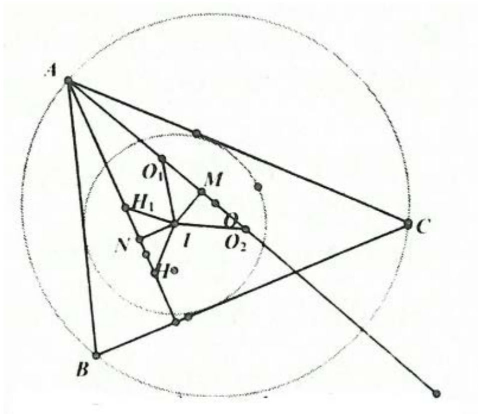
H là trực tâm của tam giác *ABC*

$\Rightarrow CH \perp AB; BH \perp AC$

$\Rightarrow \widehat{BHC} = 120^o; \widehat{BIC} = 90^o + \frac{1}{2}\widehat{A} = 120^o$

Ta thấy $\widehat{BOC} = \widehat{BHC} = \widehat{BIC} = 120^o$. Vậy năm điểm *B, C, O, I, H* nằm trên cùng một đường tròn.

Bài 2: Gọi *O, I* và *H* lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và trực tâm của tam giác *ABC*. Khi đó nếu đường tròn ngoại tiếp tam giác *OIH* đi qua 1 trong các đỉnh của tam giác *ABC* thì phải đi qua 1 đỉnh khác của tam giác *ABC*.



Lời giải:

Sử dụng bổ đề sau:

Cho tam giác *ABC* nhọn, *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp, *H* là trực tâm.

Khi đó nếu $AO = AH$ thì $\widehat{BAC} = 60^o$

Trở lại bài toán: Giả sử 4 điểm *O, I, H, C* cùng thuộc đường tròn.

Vì *CI* là phân giác của góc *HCO* nên $IH = IO = t$

Ta chứng minh nếu góc *BAC* khác 60° thì *O, I, H, A* cùng thuộc 1 đường tròn.

M, N là hình chiếu của *I* trên *OA* và *AH*. Lấy O_1; O_2 trên tia *AO* sao cho $IO_1 = IO_2 = t$ (O_1 nằm giữa *A* và *M*, *M* nằm giữa O_1, O_2.

Lấy H_1 và H_2 nằm trên *AH* sao cho $IH_1 = IH_2 = t$ (H_1 nằm giữa *A* và *N*, *N* nằm giữa H_1 và H_2)

1. Nếu $O \equiv O_1; H \equiv H_1$ hoặc $O \equiv O_2; H \equiv H_2$. Khi đó $\Delta AIO \backsim \Delta AIH \Rightarrow AO = AH$

Áp dụng bổ đề ta có $\widehat{BAC} = 60^o$, trái với đều giả sử.

2. Nếu $O \equiv O_1; H \equiv H_2$ hoặc $O \equiv O_2; H \equiv H-1$ ta có $\Delta IO_1O_2 \backsim \Delta IH_1H_2$

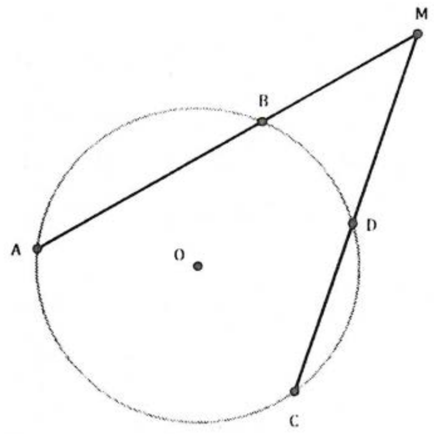
$\Rightarrow \widehat{IO_1O_2} = \widehat{IH_2H_1}; \widehat{IO_2O_1} = \widehat{IH_1H_2} \Rightarrow AOIH$ nội tiếp

Bây giờ giả sử *A* và *B* không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác *OIH*.

Khi đó $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = 60^o \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow$ *O, H, I* trùng nhau, vô lí.

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 3: Chứng minh rằng : "Nếu hai đường thẳng *AB, CD* cắt nhau tại *M* và $MA.MB = MC.MD$ thì bốn điểm *A, B, C, D* cùng thuộc một đường tròn".



Lời giải:

Trường hợp 1:

M ở ngoài đường tròn *(O)*

Ta có: $MA.MB = MC.MD \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$

Xét *ΔMAD* và *ΔMCB* có:

$\widehat{M}$ (chung), $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$

Do đó $\Delta MAD \backsim \Delta MCB\,(c.g.c)$

$\Leftrightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABC} \Rightarrow$ Tứ giác *ABCD* nội tiếp.

Trường hợp 2:

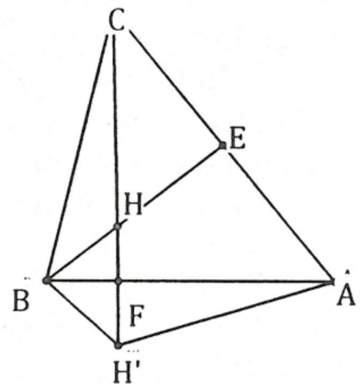
M ở trong đường tròn *(O)*

Ta cũng có $\Delta MDA \backsim \Delta MBC\,(c.g.c)$

$\Leftrightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABC} \Rightarrow$ Tứ giác *ABCD* nội tiếp.

$\Rightarrow$ *A, B, C, D* cùng thuộc một đường tròn.

Bài 4: Cho tam giác nhọn *ABC*, gọi *H* là trực tâm của tam giác, *H'* là điểm đối xứng của *H* qua *BC*. Chứng minh tứ giác *ABH'C* nội tiếp.



Lời giải:

Gọi *E, F* là chân đường cao kẻ từ *B, C* của tam giác *ABC*

Ta có tứ giác *AEHF* nội tiếp

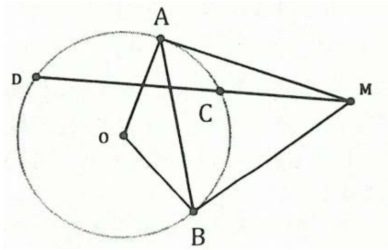
(vì $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^o + 90^o = 180^o$)

Nên $\widehat{EAF} + \widehat{EHF} = 180^o$ (1)

Mà $\widehat{EHF} = \widehat{BHC}$ (đđ) (2)

$\widehat{BHC} = \widehat{BH'C}$ (do tính chất đối xứng) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BH'C} = 180^o \Rightarrow ABH'C$ nội tiếp.



Bài 5: Từ một điểm *M* ở ngoài *(O)* vẽ hai tiếp tuyến *MA, MB* và cát tuyến *MCD* với *(O)*. Gọi *E* là trung điểm *CD*. Chứng minh 5 điểm *M, A, E, O, B* cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải:

Ta có $ED = EC \Rightarrow OE \perp DC$

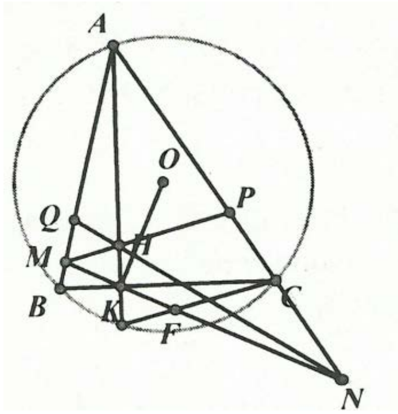
$\Rightarrow \widehat{OEM} = 90^o \Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính *OM* (1)

Mặt khác : $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^o$

(tính chất của tiếp tuyến)

$\Rightarrow$ *A, B* thuộc đường tròn đường kính *OM* (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ *M, A, E, O, B* cùng thuộc một đường tròn.



Bài 6: Cho tam giác *ABC* nội tiếp *(O)*, trực tâm *H*, đường cao *AK* (*K* thuộc *BC*). Giả sử một đường thẳng qua *K* vuông góc *OK* cắt *AB, AC* lần lượt tại *M, N*. Các tia *MH, NH* cắt *AC, AB* thứ tự tại *P* và *Q*. Chứng minh rằng *APHQ* nội tiếp được.

Lời giải:

Gọi *E* là giao điểm *AH* và *(O)*. Giao điểm của *MN* và *EC* là *F*.

Tứ giác *ABEC* nội tiếp *(O)*, *OK* vuông góc với *MK* nên theo định lí con bướm ta có: $MK = KF$ (1)

Mặt khác $\widehat{MAK} = \widehat{BAE} = \widehat{HCB}$; *HE* vuông góc với *BK* nên *ΔHCE* cân tại *C* suy ra $HK = KE$ (2)

Từ (1) và (2) ta có *MHFE* là hình bình hành do đó $MH // EF$

$\Rightarrow \widehat{MHK} = \widehat{KEF} = \widehat{ABC}$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có: $\widehat{NHK} = \widehat{ACB}$

Ta có: $\widehat{QHP} = \widehat{MHN} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^o - \widehat{BAC} \Rightarrow AQPH$ nội tiếp.

Bài 7: Cho đường tròn tâm *O* và điểm *I* nằm ngoài đường tròn. Từ *I* kẻ hai tiếp tuyến *IM* và *IN*, kẻ cát tuyến *IAB* đến đường tròn (*A, B* thuộc đường tròn, *AB* không là đường kính của đường tròn, hay điểm *A* và *M* cùng phía với nhau đối với đường thẳng *IO*). Gọi *K* là trung điểm *AB*. Chứng minh rằng:

a) Năm điểm *I, M, N, O, K* cùng thuộc một đường tròn.

b) *KI* là tia phân giác góc *MKN*.

c) Khi cát tuyến *IAB* xoay quanh điểm *I* thì các góc *IKM, IKN* không đổi.

Lời giải:

Theo tính chất tiếp tuyến ta có: $\widehat{IMO}=\widehat{INO}=90^o$

Suy ra 4 điểm *I, M, N, O* cùng thuộc đường tròn đường kính *IO* (1)

Ta lại có *K* là trung điểm dây *AB*

$\Rightarrow OK\perp AB\Rightarrow\widehat{OKI}=90^o$

$\Rightarrow K$ thuộc đường tròn đường kính *IO* (2)

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm *I, M, N, O, K* cùng thuộc đường tròn đường kính *IO*.

Ta có $IM=IN$ (tính chất tiếp điểm), xét đường tròn đường kính *IO* ta có:

$IM=IN\Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{IM}=\text{sđ}\overset{\frown}{IN}$

Mà $\widehat{IKM}=\dfrac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{IM},\widehat{IKN}=\dfrac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{IN}$ (tính chất góc nội tiếp)

$\Rightarrow\widehat{IKM}=\widehat{IKN}\Rightarrow KI$ là tia phân giác góc *MKN*.

Xét đường tròn đường kính *IO* ta có: $\widehat{IKM}=\widehat{IOM}$ (tính chất góc nội tiếp)

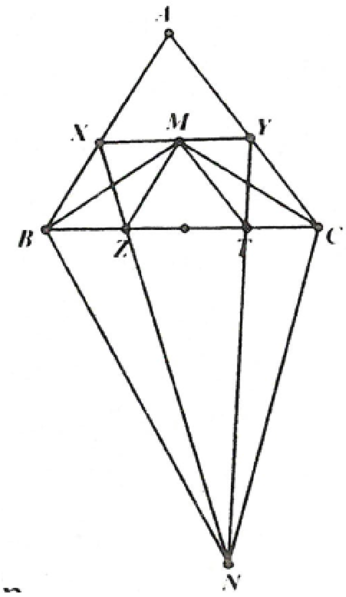
$\widehat{IKN}=\widehat{IKM}=\widehat{IOM}$ Vì các điểm *I, O, M* cố định nên $\widehat{IOM}$ không đổi.

Vậy khi cát tuyến *IAB* xoay quanh điểm *I* thì các góc *IKM* và *IKN* không đổi.

Bài 8: Cho tam giác *ABC* cân đỉnh *A*. Điểm *M* nằm trong tam giác sao cho:

$$\widehat{BMC}=90^o+\frac{1}{2}\widehat{A}$$

Qua *M* kẻ đường thẳng song song với *BC* cắt *AB, AC* tại *X, Y*. Vẽ *MZ, MT* lần lượt song song với *AB, AC*. Gọi *N* là giao của *XZ* và *YT*. Chứng minh *ABNC* nội tiếp.



Lời giải:

Ta có: $\widehat{BMC}=90^o+\dfrac{1}{2}\widehat{A}=180^o-\widehat{B}$

$\widehat{ZMY}=180^o-\widehat{B}$ (*MZCY* nội tiếp)

$\Rightarrow\widehat{BMZ}=\widehat{YMC}$ nên $\widehat{XBM}=\widehat{YNC}$

$\Rightarrow\Delta BXM\backsim\Delta MYC$ do đó $\Delta KXB\backsim\Delta LY$

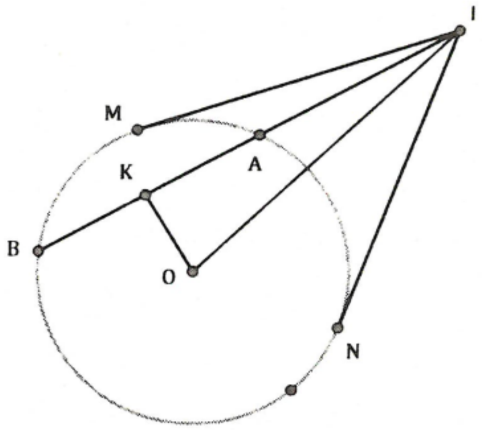
$\Rightarrow\widehat{BXK}=\widehat{LYM}=\widehat{YTC}=\widehat{BTN}\Rightarrow BXTN$ nội tiếp

Mặt khác $\widehat{BXN}=\widehat{BTX}=\widehat{BMX}$

$\Rightarrow\widehat{YNC}=\widehat{YZT}=\widehat{YMC};\widehat{XNY}=\widehat{B}$

Ta có: $\widehat{BNC}=\widehat{BMX}+\widehat{YMC}+\widehat{B}$

$$=\widehat{BMX}+\widehat{XBM}+\widehat{B}=2\widehat{B}=\widehat{B}+\widehat{C}$$



$\Rightarrow \widehat{BNC}+\widehat{BAC}=\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^o \Rightarrow ABNC$ nội tiếp

Bài 9: Cho đoạn thẳng *AB* và điểm *C* nằm giữa 2 điểm *A* và *B*. Trên một nửa mặt phẳng có bờ chứa đường thẳng *AB*, kẻ các tam giác đều *ACD* và *BCE*. Gọi *I* và giao điểm của *AE* và *BD*. Chứng minh rằng :

Các tứ giác *ACID* và *BCIE* nội tiếp đường tròn.

IA, IB, IC lần lượt là tia phân giác các góc *CID, CIE, AIB.*

Khi C chuyển động trên đoạn thẳng AB thì điểm I luôn chuyển động trên một cung tròn cố định.

Khi *C* chuyển động trên đoạn thẳng *AB* thì đường thẳng *IC* luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải:

Xét hai tam giác *ACE* và *BDC*, ta có:

AC = DC (hai cạnh của tam giác đều thì bằng nhau)

CE = CB (hai cạnh của tam giác đều thì bằng nhau)

$\widehat{ACE}=\widehat{DCB}\left(=60^o+\widehat{DCE}\right)$

$\Rightarrow \Delta ACE=\Delta DBC\,(c-g-c)$

$\Rightarrow \widehat{EAC}=\widehat{BDC}, \widehat{AEC}=\widehat{DBC}$

Vì $\widehat{EAC}=\widehat{BDC}$ nên $\widehat{IAC}=\widehat{IDC} \Rightarrow$ Tứ giác *ACID* nội tiếp đường tròn

Vì $\widehat{AEC}=\widehat{BDC}$ nên $\widehat{IEC}=\widehat{IBC} \Rightarrow$ Tứ giác *BCIE* nội tiếp đường tròn.

Xét tứ giác nội tiếp *ACID* có :

$\widehat{AIC}=\widehat{ADC}, \widehat{AID}=\widehat{ACD}$ (tính chất tứ giác nội tiếp).

Vì tam giác *ADC* đều nên $\widehat{ADC}=\widehat{ACD}=60^o \Rightarrow \widehat{AIC}=\widehat{AID}=60^o$

Xét tứ giác nội tiếp *BCIE*, $\widehat{BIC}=\widehat{BEC}, \widehat{BIE}=\widehat{BCE}$ (tính chất tứ giác nội tiếp)

Vì tam giác *BCE* đều nên $\widehat{BEC}=\widehat{BCE}=60^o \Rightarrow \widehat{BIC}=\widehat{BIE}=60^o$

Ta có $\widehat{AID}=\widehat{AIC}=60^o \Rightarrow IA$ là tia phân giác các góc *CID*

$\widehat{BIC}=\widehat{BIE}=60^o \Rightarrow IB$ là tia phân giác góc *CIE*

$\widehat{AIC}=\widehat{BIC}=60^o \Rightarrow IC$ là tia phân giác góc *AIB*

Ta có $\widehat{AIB}=\widehat{AIC}+\widehat{BIC}=60^o+60^o=120^o$

$\Rightarrow$ Khi *C* chuyển động trên đoạn thẳng *AB* thì điểm *I* luôn chuyển động trên đường tròn *AB* chứa góc 120°

Vẽ đường tròn *(O)* ngoại tiếp tam giác *IAB*, hai điểm *A, B* cố định và $\widehat{AIB}=120^o$ không đổi trên đường tròn *(O)* là đường tròn cố định

Gọi *F* là giao điểm thứ hai của tia *CI* với đường tròn (*F* khác *C*). Vì *IC* là tia phân giác góc *ACB* nên *F* là điểm chính giữa cung lớn *AB*. Suy ra *F* là điểm cố định. Vậy tia *IC* luôn đi qua điểm *F* cố định.

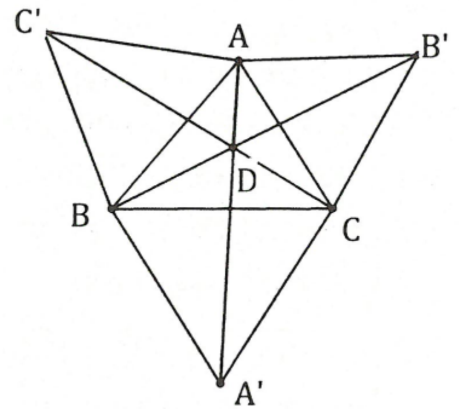
Bài 10: Cho tam giác nhọn *ABC*. Về phía ngoài tam giác, dựng các tam giác đều *ABC', AB'C*. Gọi *D* là giao điểm của *BB'* và *CC'*.

Chứng minh rằng các tứ giác *ADBC'*, *ADCB'* nội tiếp đường tròn.

Chứng minh rằng $\widehat{BDC} = 120^o$.

Về phía ngoài tam giác *ABC*, dựng tam giác đều *BCA'*. Chứng minh rằng, tứ giác *BDCA'* nội tiếp đường tròn.

Chứng mình rằng ba đường *AA'*, *BB'*, *CC'* đồng quy.



Lời giải:

Để chứng minh các tứ giác *ADBC'*, và *ADCB'* nội tiếp đường tròn ta chứng minh $\widehat{AC'B} = \widehat{ABD}$ và $\widehat{AB'D} = \widehat{ACD}$

Xét hai tam giác *ABB'* và *ACC'*, ta có :

$AB = AC', AB = AC$ (giả thiết),

$\widehat{BAB'} = \widehat{C'AC} = \left(60^o + \widehat{BAC}\right)$

$\Rightarrow \Delta ABB' = \Delta\, \mathrm{AC'C}\left(c - g - c\right)$

$\Rightarrow \widehat{AC'C} = \widehat{ABB'}$ và $\widehat{AB'B} = \widehat{ACC'}$

$\Rightarrow \widehat{AC'D} = \widehat{ABD}$ và $\widehat{AB'D} = \widehat{ACD}$

$\Rightarrow$ Các tứ giác *ADBC'* và *ADCB'* nội tiếp đường tròn

Xét tứ giác nội tiếp *ADBC':*

$\widehat{BDC'} = \widehat{BAC'}$ (tính chất tứ giác nội tiếp).

Vì tam giác *ABC'* đều nên $\widehat{BAC'} = 60^o$

$\Rightarrow \widehat{BDC'} = 60^o.$ Ta có : $\widehat{BDC} + \widehat{BDC'} = 180^o$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{BDC} + 60^o = 180^o \Rightarrow \widehat{BDC} = 120^o$

Ta có $\widehat{BDC} = 120^o$ (chứng minh trên), $\widehat{BA'C} = 60^o$ (vì $\Delta BA'C$ đều)

$\Rightarrow \widehat{BDC} + \widehat{BA'C} = 120^o + 60^o = 180^o \Rightarrow$ Tứ giác *BDCA'* nội tiếp đường tròn.

Nhận xét: Hai đường thẳng *BB'* và *CC'* cắt nhau tại *D*, ta chứng minh *D* thuộc đường thẳng *AA'*.

Xét tứ giác nội tiếp *BDCA'*: $\widehat{BDA'} = \widehat{BCA'}$ (tính chất tứ giác nội tiếp).

Vì $\Delta BA'C$ đều nên $\widehat{BCA'} = 60^o \Rightarrow \widehat{BDA'} = 60^o$

$\Rightarrow \widehat{BDA} + \widehat{BDA'} = 120^o + 60^o = 180^o \Rightarrow$ 3 điểm *A*, *D*, *A'* thẳng hàng.

$\Rightarrow$ Ba đường thẳng *AA'*, *BB'*, *CC'* đồng quy tại *D*.

Bài 11: Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn tâm *O*. Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là trực tâm của tam giác *BCD*, *CDA*, *DAB*, *ABC*. Chứng minh rằng H_1, H_2, H_3, H_4 cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải:

M, *N*, *P*, *Q* lần lượt là trung điểm của *AB*, *BC*, *CD*, *DA*. *G* là giao của *MP*, *NQ* thì *G* là điểm chung giữa 2 đoạn đó *H* đối xứng *O* qua *G*. $H_1^{'}$ đối xứng *A* qua *H*. Ta chứng minh $\widehat{H_1} = \widehat{H_1^{'}}$

Thật vậy ta có: $MH//BH_1^{'}$ (*MH* là đường trung bình của tam giác $ABH_1^{'}$)

$MH//OP$ (*MOPH* là hình bình hành)

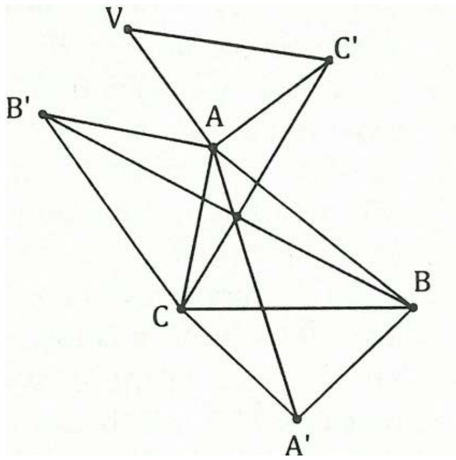
OP vuông góc với *CD* (đường kính đi qua trung điểm dây cung) $\Rightarrow$ $BH_1^{'}$ vuông góc với *CD*.

Tương tự $DH_1^{'}$ vuông góc với *BC* $\Rightarrow$ $H_1^{'}$ là trực tâm tam giác *BCD* do đó $H_1 \equiv H_1^{'}$

Lấy *O'* đối xứng với *O* qua *H* thì AOH_1O' là hình bình hành. Suy ra $O'H_1 = OA = R$ (bán kính của *(O))*

Tương tự $O'H_2 = O'H_3 = O'H_4 = R$

Vậy ta có điều phải chứng minh.



Bài 12: Cho tam giác nhọn *ABC*, về phía ngoài tam giác, dựng các tam giác vuông cân đỉnh *A* là *AVC'*. *AB'C*; dựng tam giác *BCA'* vuông cân tại *A'*. Gọi *D* là giao điểm của *BB'* và *CC'*. Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác *ADBC'*, *ADCB'* nội tiếp đường tròn.

b) Tứ giác *BA'CD* nội tiếp.

c) Ba đường thẳng *AA'*, *BB'*, *CC'* đồng quy tại điểm *D*.

Lời giải:

a) Để chứng minh các tứ giác *ADBC'* và *ADCB'* nội tiếp đường tròn ta chứng minh $\widehat{AC'D} = \widehat{ABD}$ và $\widehat{AB'D} = \widehat{ACD}$

Xét hai tam giác *ABB'* và *ACC'* có:

$AB = AC', AB' = AC$ (giả thiết)

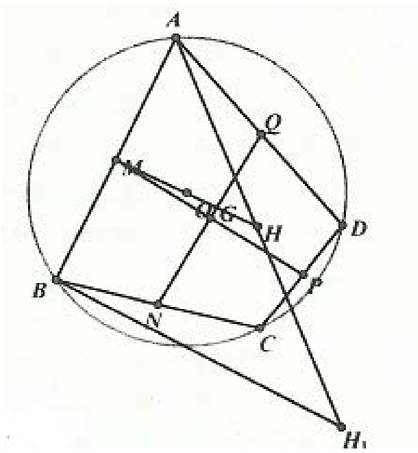
$\widehat{BAB'} = \widehat{C'AC}\left(= 90^o + \widehat{BAC}\right)$

$\Rightarrow \Delta ABB' = \Delta ACC'(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{AC'C} = \widehat{ABB'}, \widehat{AB'B} = \widehat{ACC'}$

$\Rightarrow \widehat{AC'D} = \widehat{ABD}, \widehat{AB'D} = \widehat{ACD}$

$\Rightarrow$ Các tứ giác *ADBC'* và *ADCB'* nội tiếp đường tròn.

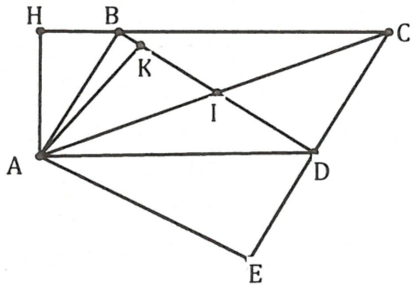


b) Vì tứ giác *AC'BD* nội tiếp nên $\widehat{BDC'} = \widehat{BAC'}$ (hai góc nhìn cạnh *BC'*)

Mà $\widehat{BAC'} = 90^o$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{BDC'} = 90^o$

Mặt khác $\widehat{BA'C} = 90^o$ (giả thiết) $\widehat{BDC'} = \widehat{BA'C}\left(= 90^o\right) \Rightarrow$ Tứ giác *BA'CD* nội tiếp

c) Xét tứ giác nội tiếp *BA'CD:* $\widehat{BDA'} = \widehat{BCA'}$ (hai góc cùng nhìn cạnh *BA'*)



Vì tam giác *BCA*' vuông cân tại *A*' nên $\widehat{BCA'} = 45^o \Rightarrow \widehat{BDA'} = 45^o$

Xét tứ giác nội tiếp *BA'CD*: $\widehat{BDA'} = \widehat{BCA'}$(Hai góc cùng nhìn cạnh *BA'*).

Vì tam giác *BCA'* vuông cân tại *A'* nên $\widehat{BCA'} = 45^o \Rightarrow \widehat{BDA} = 45^o$

Xét tứ giác nội tiếp *ADBC'*: $\widehat{ADB} + \widehat{AC'B} = 180^o$

Vì tam giác vuông cân *ABC'* vuông cân tại *C'* nên:

$\widehat{AC'B} = 45^o \Rightarrow \widehat{ADB} + 45^o = 180^o \Rightarrow \widehat{ADB} = 135^o$

$\Rightarrow \widehat{ADB} + \widehat{BDA'} = 135^o + 35^o = 180^o \Rightarrow$ Ba điểm *A, D, A'* thẳng hàng

$\Rightarrow$ Ba đường thẳng *AA', BB', CC'* đồng quy tại *D.*

Bài 13: Cho hình bình hành *ABCD*, hai đường chéo cắt nhau tại *I*. Từ *A* kẻ các đường vuông góc với *BC*, *CD*, *DB* thứ tự tại *H, E, K*. Chứng minh *H, E, I, K* nằm trên cùng một đường tròn.

Lời giải:

Ta có: $AH \perp BC, AE \perp CD \Rightarrow A, H, C, E$ nằm trên đường tròn đường kính *AC, I* là trung điểm *AC*

$\Rightarrow$ *I* là tâm đường tròn đường kính $AC \Rightarrow \widehat{HIE} = 2\widehat{HAE} = 2\left(180^o - \widehat{BCD}\right)$

$AH \perp BC; AK \perp BD; AE \perp CD \Rightarrow$ mỗi tứ giác *AKED, AKHB* đều có 4 đỉnh cùng thuộc 1 đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{EKD} = \widehat{EAD}; \widehat{BKH} = \widehat{BAH}$

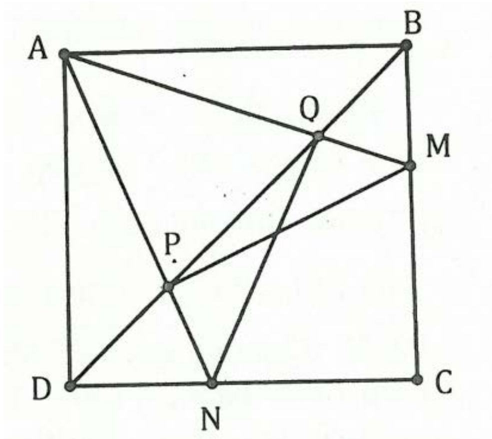
$\Rightarrow \widehat{HKE} = 180^o - \widehat{EKD} - \widehat{BKH} = 180^o - \widehat{EAD} - \widehat{BAH} = 2\left(180^o - \widehat{BCD}\right)$

$\Rightarrow$ *K; I* cùng nhìn đoạn *HE* dưới 1 góc $2\left(180^o - \widehat{BCD}\right) \Rightarrow$ *H, K, E, I* nằm trên 1 đường tròn.

Bài 14: Cho ba điểm *A*, *C*, *B* theo thứ tự đó thẳng hàng, $AC < CB$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* dựng các tam giác vuông cân đỉnh *C* là *ACD* và *BCE*. Giả sử tia *BD* cắt đoạn thẳng *AE* tại *F*. Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác *BCFE* và *ACDF* nội tiếp đường tròn.

b) *D* là trực tâm của tam giác *ABE*.



Lời giải:

a) Xét hai tam giác *ACE* và *BCD* có :

$AC = CD, CE = BD$ (giả thiết)

$\widehat{ACE} = \widehat{BCD}\left(=90^o\right)$

$\Rightarrow \Delta ACE = \Delta BCD\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{DBC}$ hay $\widehat{FEC} = \widehat{FBC} \Rightarrow$ Tứ giác *BCFE* nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{BFE} = \widehat{BCE}$ (hai góc cùng nhìn cạnh *BE*)

Mà $\widehat{BCE} = 90^o \Rightarrow \widehat{BFE} = 90^o$

Ta có $\widehat{BCE} = \widehat{BFE} = 90^o \Rightarrow \widehat{DCA} = \widehat{DFA} = 90^o \Rightarrow$ Tứ giác *ACDF* nội tiếp đường tròn.

b) Ta có $\widehat{BFE} = 90^o \Rightarrow BF \perp AE$, mà $EC \perp AB$ (giả thiết) $\Rightarrow D$ là trực tâm tam giác *ABE*.

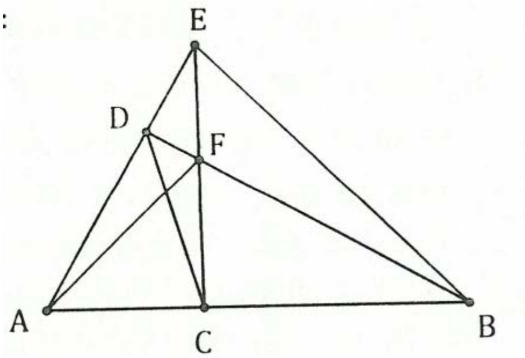
Bài 15: Cho hình vuông *ABCD*. Các điểm *M*, *N* lần lượt thuộc các cạnh *BC*, *CD* sao cho $\widehat{MAN} = 45^o$. Gọi *P*, *Q* lần lượt là giao điểm của *BD* với *AN* và *AM*. Chứng minh rằng :

a) Các tứ giác *ABMP*, *ADNQ*, *MNPQ* nội tiếp đường tròn.

b) Tứ giác *MNPQ* nội tiếp đường tròn.

c) Năm điểm *C*, *M*, *N*, *P*, *Q* cùng thuộc một đường tròn.

d) $PA = PM, QA = QN$.



Lời giải:

a) Ta có $\widehat{CBD} = 45^o$ (tính chất đường chéo hình vuông)

$\Rightarrow \widehat{MBP} = 45^o$

Mà $\widehat{MAP} = \widehat{MAN} = 45^o \Rightarrow \widehat{MAP} = \widehat{MBP} \Rightarrow$ Tứ giác *ABMP* nội tiếp đường tròn.

Ta có $\widehat{BDC} = 45^o$ (tính chất đường chéo hình vuông) $\Rightarrow \widehat{QDN} = 45^o$

Mà $\widehat{QAN} = \widehat{MAN} = 45^o \Rightarrow \widehat{QAN} = \widehat{QDN} \Rightarrow$ Tứ giác *ADNQ* nội tiếp đường tròn.

b) Vì tứ giác *ABMP* nội tiếp đường tròn nên: $\widehat{MPN} = \widehat{MBA} = 90^o$

Vì tứ giác *ADNQ* nội tiếp đường tròn nên: $\widehat{MQN} = \widehat{NDA} = 90^o$

Ta có $\widehat{MPN}=\widehat{MQN}=90^o \Rightarrow$ Tứ giác *MNPQ* nội tiếp đường tròn.

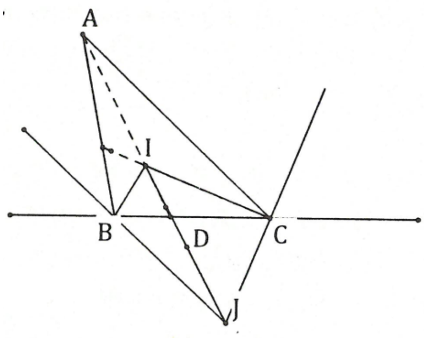
c) $\widehat{MQPN}=\widehat{MQN}=\widehat{MCN}=90^o$

$\Rightarrow$Năm điểm *C, M, N, P, Q* cùng thuộc đường tròn đường kính *MN*.

d) Tứ giác *ABMP* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMP}=\widehat{ABP}$

Vì *ABCD* là hình vuông nên

$\widehat{ABD}=45^o \Rightarrow \widehat{ABP}=45^o \Rightarrow \widehat{AMP}=45^o$



Theo giả thiết $\widehat{MAN}=45^o \Rightarrow \widehat{MAP}=45^o \Rightarrow \widehat{AMP}=\widehat{MAP}=45^o$

Ta có tam giác *AMP* cân tại $P \Rightarrow PA=PM$

Chứng minh tương tự ta có $QA=QN$.

Bài 16: Cho tam giác *ABC* có I là giao điểm của ba đường phân giác trong. Các đường phân giác ngoài tại *B* và *C* cắt nhau tại *J*. Gọi *D* là trung điểm của *IJ*. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác *BICJ* nội tiếp

b) Tứ giác *ABDC* nội tiếp

c) $\widehat{ABI}=\widehat{AJC}$

Lời giải:

a) Vì *BI* và *BK* là hai tia phân giác của hai góc kề bù nên $BI \perp BJ \Rightarrow \widehat{IBJ}=90^o$

Vì *CI* và *CJ* là hai tia phân giác của hai góc kề bù nên $CI \perp CJ \Rightarrow \widehat{ICJ}=90^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác *IBJC* nội tiếp đường tròn tâm *D* bán kính *IJ*

b) Theo tính chất góc nội tiếp và góc ở tâm đường tròn ta có: $\widehat{BCI}=\dfrac{1}{2}\widehat{BDI}$

Mà $\widehat{BCI}=\dfrac{1}{2}\widehat{BDI}$ (giả thiết)

$\Rightarrow \widehat{BDI}=\widehat{BCA}$ hay $\widehat{BDA}=\widehat{BCA}$

$\Rightarrow$ Tứ giác *ABDC* nội tiếp

c) Tứ giác *BICJ* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IJC}=\widehat{IBC} \Rightarrow \widehat{AJC}=\widehat{IBC}$.

Mà $\widehat{ABI}=\widehat{IBC}$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{ABI}=\widehat{AJC}$

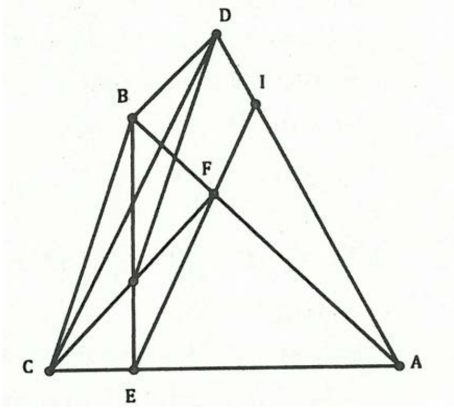
Bài 17: Cho tam giác *ABC* nhọn, *AB* < *BC*. Hai đường cao *AD* và *BE* cắt nhau tại *H*. Gọi *M* và *N* lần lượt là trung điểm của *AC* và *HC*. Chứng minh rằng :

a) Các tứ giác *ABDE*, *CDHE* nội tiếp.

b) Tứ giác *MNDE* nội tiếp

Lời giải:

a) Vì tứ giác *ABDE* có $\widehat{ADB}=\widehat{AEB}=90^o$ nên nội tiếp đường tròn



Vì tứ giác *CDHE* có $\widehat{CDH} = \widehat{CEH} = 90^o$ nên nội tiếp đường tròn.

b) Tứ giác *CDHE* nội tiếp $\widehat{CED} = \widehat{CHD}$

$\Rightarrow \widehat{MED} = \widehat{NHD}$ (1)

Tam giác *CDH* vuông tại *D* có *DN* là trung tuyến ứng với cạnh huyền

$\Rightarrow ND = NH = \dfrac{1}{2}HC$

$\Rightarrow \Delta NDH$ cân tại $N \Rightarrow \widehat{NHD} = \widehat{NDH}$ (2)

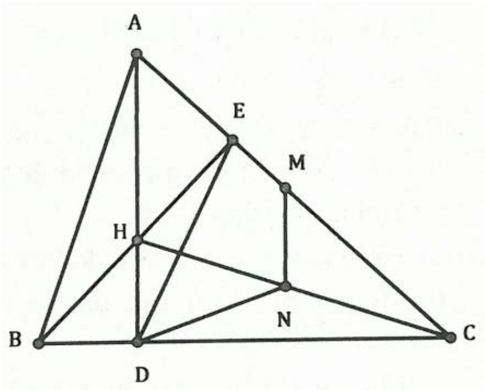
Từ (1) và (2) ta có $\widehat{MED} = \widehat{NDH}$

Tam giác *AHC* có *MN* là đường trung bình

$\Rightarrow MN // AD \Rightarrow \widehat{NDH} + \widehat{MND} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{MED} + \widehat{MND} = 180^o \Rightarrow$ Tứ giác *MNDE* nội tiếp.

Bài 18: Cho tam giác *ABC* có 3 góc nhọn, hai đường cao *BE* và *CF* cắt nhau tại *H*. Vẽ hình bình hành *BHCD*. Gọi *I* là giao điểm của *AD* và *EF*.



Chứng minh rằng:

a) Tứ giác *ABDC* nội tiếp

b) Các tứ giác *BDIF, CDIE* nội tiếp đường tròn.

c) $AD \perp EF$

Lời giải:

a) Ta có *BHCD* là hình bình hành

$\Rightarrow CD // BH, BD // CH$

Mặt khác $BH \perp AC, CH \perp AB$ (giả thiết)

$\Rightarrow CD \perp AC, BD \perp AB \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác *ABDC* nội tiếp.

b) Vì $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^o$ nên tứ giác *BCEF* nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

Vì tứ giác *ABDC* nội tiếp nên $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ (hai góc cùng nhìn cạnh *AB*)

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ADB}$ hay $\widehat{AFI} = \widehat{IDB} \Rightarrow$ tứ giác *BDIF* nội tiếp.

Chứng minh tương tự, tứ giác *CDIE* nội tiếp.

c) Xét tứ giác nội tiếp *BDIF*: $\widehat{AIF} = \widehat{FBD}, \widehat{FBD} = 90^o\left(BD \perp AB\right)$

$\Rightarrow \widehat{AIF} = 90^o \Rightarrow AD \perp EF$

Bài 19: Cho tam giác *ABC* nhọn, kẻ đường cao *AH*. *D* là một điểm nằm giữa *A* và *H*, đường tròn đường kính *AD* lần lượt cắt *AB* và *AC* tại *E* và *F*.

Chứng minh rằng :

a) Tứ giác *BHDE* nội tiếp đường tròn.

b) Tứ giác *BEFC* nội tiếp đường tròn.

Lời giải:

a) Vì tứ giác *AEDF* nội tiếp đường tròn đường kính *AD* nên: $\widehat{AED}=90^o$

Ta có $AH\perp BC\Rightarrow \widehat{BHD}=90^o$

$\Rightarrow \widehat{AED}=\widehat{BHD}$

$\Rightarrow$ Tứ giác *BHDE* nội tiếp

b) Vì tứ giác *BHDE* nội tiếp đường tròn nên $\widehat{ADE}=\widehat{B}$ (tính chất góc ngoài tứ giác nội tiếp)

Vì tứ giác *AEDF* nội tiếp nên $\widehat{ADE}=\widehat{AFE}$

$\Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{B}\Rightarrow$ Tứ giác *BEFC* nội tiếp đường tròn.

Bài 20: Gọi *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC, D* và *E* là hình chiếu của *I* trên *AB* và *AC*, giao điểm của *DE* với *BI* và *CI* thứ tự là *M* và *N*. Chứng minh bốn điểm *B, C, M, N* nằm trên cùng một đường tròn.

Bài làm:

Gọi giao điểm của *AB* và *CM* là *P*, giao điểm của *BN* và *AC* là *Q*

I là tâm đường tròn nội tiếp $\Rightarrow$ *BN; CM* là phân giác góc *B* và góc *C*

$ID\perp AB; IE\perp AC\Rightarrow AD=AE$

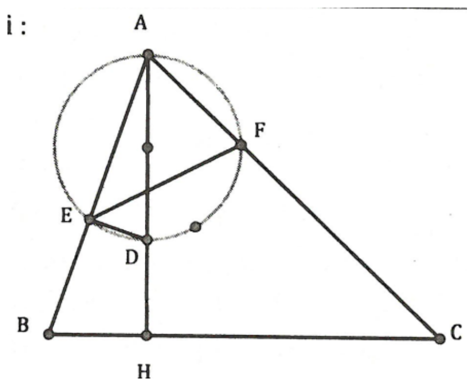
$\Leftrightarrow \widehat{MDB}=\widehat{ADE}=90^o-\frac{1}{2}\widehat{A};$

$\widehat{MIB}=\frac{1}{2}\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)=\frac{1}{2}\left(180^o-\widehat{A}\right)=90^o-\frac{1}{2}\widehat{A}$

$\Rightarrow \widehat{MDB}=\widehat{MIB}$

$\Rightarrow$ *B, M, I, D* nằm trên cùng một cung tròn, *ID* vuông góc với *BD*

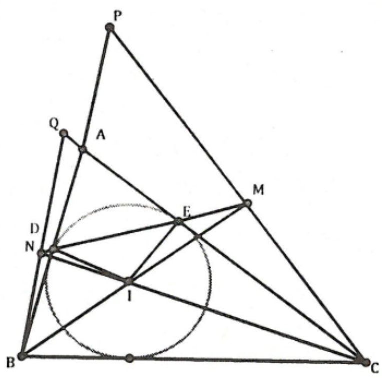
$\Rightarrow$ *M, N, C* nằm trên một đường tròn.

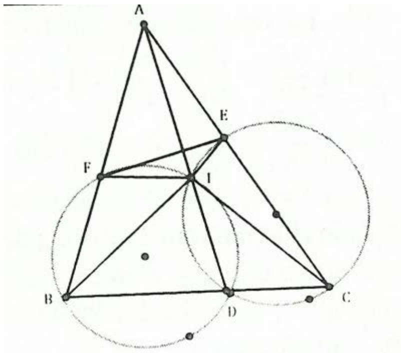


Bài 21: Cho tam giác *ABC*. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *A* lên *BC, D* và *E* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *H* lên *AB* và *AC*. Biết rằng *H* thuộc cạnh *BC*. Chứng minh rằng tứ gác *BDEC* nội tiếp.

Lời giải:

<u>Cách 1:</u>





Xét tứ giác *ADHE* có:

$\widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^o + 90^o = 180^o$

Suy ra tứ giác *ADEH* nội tiếp,

suy ra $\widehat{AED} = \widehat{AHD}$

Ta lại có: $AH \perp BH, HD \perp AB$

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{DBH}$

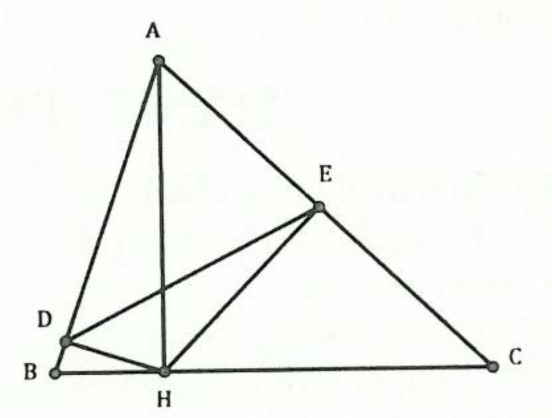
Từ các đẳng thức trên ta có $\widehat{AED} = \widehat{DBH}$

Suy ra tứ giác *BDEC* nội tiếp đường tròn.

Cách 2:

Xét tam giác vuông *AHB*, $HD \perp AB \Rightarrow AB.AD = AH^2$

Xét tam giác vuông *AHC*, $HE \perp AC \Rightarrow AC.AE = AH^2$



$\Rightarrow AB.AD = AE.AC \Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AD}$. Xét hai tam giác *ABC* và *ADE* ta có:

$\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AD}, \widehat{BAC} = \widehat{DAE} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta AED(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AED} \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{AED} \Rightarrow$ Tứ giác *BDEC* nội tiếp đường tròn.

Bài 22: Cho tam giác *ABC*. Lấy *D* là một điểm nằm giữa *B* và *C*, *I* là một điểm nằm giữa *A* và *D*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác I*DB* cắt cạnh *AB* tại điểm thứ hai *F* khác *B*, đường tròn ngoại tiếp tam giác *IDC* cắt cạnh *AC* tại điểm thứ hai *E* khác *C*.

Chứng minh rằng:

a) Tứ giác *AEIF* nội tiếp

b) Tứ giác *BCEF* nội tiếp

Lời giải:

a) Vì tứ giác *CDIE* nội tiếp nên $\widehat{CEI} = \widehat{BDI}$

Vì tứ giác *BDIF* nội tiếp nên:

$\widehat{BDI} = \widehat{AFI}$

$\Rightarrow \widehat{CEI} = \widehat{AFI} \Rightarrow$ tứ giác *AEIF* nội tiếp

b) Vì tứ giác *AEIF* nội tiếp nên $\widehat{AEF} = \widehat{AIF}$

Vì tứ giác *BDIF* nội tiếp nên $\widehat{AIF} = \widehat{DBF}$

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{DBF}$ hay tứ giác *BCEF* nội tiếp.

CHƯƠNG 11

ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

I. Kiến thức thường vận dụng

1. Định lí Ta-Lét tam giác

a. Định lí thuận

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ .

b. Định lí đảo

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác .

c. Hệ quả

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho .

Chú ý: Định lí Ta-lét và hệ quả vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng cắt phần kéo dài của hai cạnh của tam giác

2. Hai tam giác đồng dạng

a. Dấu hiệu nhận biết hai tam giác đồng dạng

Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi hai cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau .

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

Cho hai tam giác ABC và MNP . Khi đó :

Nếu $\dfrac{AB}{MN}=\dfrac{BC}{NP}=\dfrac{CA}{PM}$ thì $\Delta ABC=\Delta MNP$ (c. c. c)

Nếu $\dfrac{AB}{MN}=\dfrac{BC}{NP};\widehat{B}=\widehat{N}$ thì $\Delta ABC=\Delta MNP$ (c.g.c)

Nếu $\widehat{A}=\widehat{N},\widehat{B}=\widehat{M}$ thì $\Delta ABC=\Delta MNP$ (g.g)

b. Tính chất hai tam giác đồng dạng

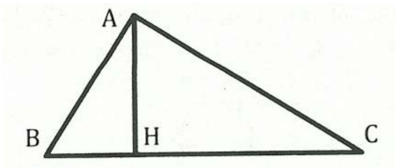
Nếu hai tam giác đồng dạng thì ba cạnh của tam giác đó tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia và ba góc của tam giác này tương ứng bằng với ba góc của tam giác kia .

$\Delta ABC = \Delta MNP \Rightarrow \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{CA}{PM}; \widehat{A} = \widehat{M}, \widehat{B} = \widehat{N}, \widehat{C} = \widehat{P}$

3. Tính chất đường phân giác trong của tam giác

Trong tam giác , đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề bên đoạn đấy .

Ta có thể dùng định lí Ta-lét, tam giác đồng dạng, tính chất đường phân giác trong tam giác để chứng minh đẳng thức hình học, chứng minh quan hệ song song, tính độ dài đoạn thẳng .



4. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, kẻ đường cao *AH* . Ta có các đẳng thức sau :

$AB^2 = HB.BC, AC^2 = HC.BC$

$AH.BC = AB.AC, AH^2 = HB.HC,$

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

Định lí Pitago: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

II. Các bài tập

Bài 1: Cho tam giác *ABC* nội tiếp trong đường tròn tâm *O*. Tia phân giác của góc *BAC* cắt *BC* tại *I*. cắt đường tròn *(O)* tại *M*. Chứng minh rằng: $MC^2 = MI.MA$

Lời giải:

Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (vì *AM* là tia phân giác $\widehat{BAC}$)

$\Rightarrow \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MC}$

Xét *ΔIMC* và *ΔCMA* có $\widehat{IMC}$ (chung), $\widehat{ICM} = \widehat{MAC}$ (2 góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

Do đó $\Delta IMC \backsim \Delta CMA(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{MC}{MA} = \dfrac{MI}{MC} \Rightarrow MC^2 = MI.MA$

Bài 2: Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB*. Qua *A*, *B* vẽ 2 tia tiếp tuyến *Ax, By* (*Ax, By* cùng thuộc một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa đoạn *AB*). Lấy điểm *D* trên *Ax* vẽ tiếp tuyến *DM* cắt tia *By* tại *C*. Chứng minh rằng $OM^2 = MD.MC$

Lời giải:

Ta có *DA, DM* là các tiếp tuyến của *(O)*

$\Rightarrow$ *OD* là tia phân giác của $\widehat{AOM}$

Tương tự *OC* là tia phân giác của $\widehat{MOB}$

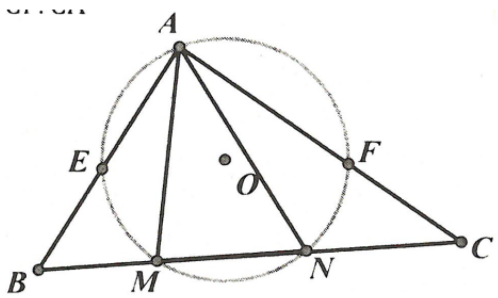
2 góc $\widehat{AOM}$ và $\widehat{MOB}$ kề bù

Do đó $\widehat{COD} = 90^o$

Bài 3: Cho tam giác *ABC*. Trên cạnh *BC* lấy 2 điểm *M* và *N* sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{MB.NB}{MC.NC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$

Lời giải:



Vẽ các đường tròn ngoại tiếp tam giác *AMN*.

Gọi *E, F* lần lượt là các giao điểm thứ hai của *AB, AC* với đường tròn này.

Do đó $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$ nên $ME = NF$

Vậy *MNFE* là một hình thang cân, hay $EF//BC$

Ta có: $BM.BN = BE.BA; CM.CN = CF.CA$

$\Rightarrow \dfrac{BM.BN}{CM.CN} = \dfrac{BE.BA}{CF.CA}$

Mặt khác do $EF//BC$

$\Rightarrow \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{BA}{CA}$ (2)

Từ (1) và (2):

$\dfrac{MB.NB}{MC.NC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$

Bài 4: Cho hình thang *ABCD, AB//CD, AB < CD*. Hai tia *DA* và *CB* cắt nhau tại *I*, hai đường chéo *AC* và *BD* cắt nhau tại *K*. Gọi *M, N* lần lượt là giao điểm của đường thẳng *IK* với *AB* và *CD*. Chứng minh rằng:

$a)\dfrac{AM}{DN} = \dfrac{BM}{CN}$ $\qquad$ $b)\dfrac{AM}{CN} = \dfrac{BM}{DN}$

$c)AM = BM$ $\qquad$ $d)IM.KN = IN.KM$

Lời giải:

a) Xét tam giác *IDN*: $AM//DN$ (giả thiết)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{DN} = \dfrac{IM}{IN}$ (hệ quả định lí Ta-lét)

Xét tam giác ICN : $BM//CN$ (giả thiết)

$\Rightarrow \dfrac{BM}{CN} = \dfrac{IM}{IN}$ (hệ quả định lí Ta-lét)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{DN} = \dfrac{BM}{CN}$ (tính chất bắc cầu)

b) Xét hai tam giác *KAM* và *KCN*: $AM//CN$ (giả thiết)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{CN}=\dfrac{KM}{KN}$ (hệ quả định lý Ta-lét)

Xét hai tam giác *KBM* và *KDN*: $BM\,//\,DN$ (giả thiết)

$\Rightarrow \dfrac{BM}{DN}=\dfrac{KM}{KN}$ (hệ quả định lí Ta-let) $\Rightarrow \dfrac{AM}{CN}=\dfrac{BM}{DN}$ (tính chất bắc cầu)

c) Ta có $\dfrac{AM}{DN}=\dfrac{BM}{CN},\dfrac{AM}{CN}=\dfrac{BM}{DN}$ (chứng minh trên)

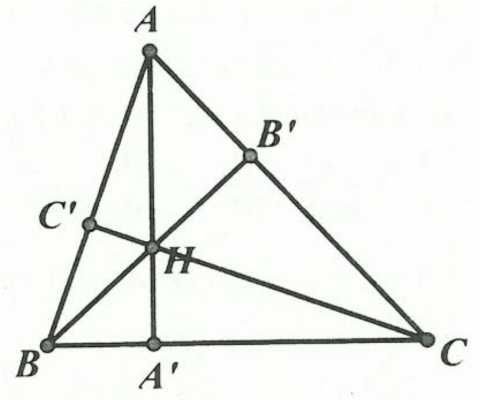
$\Rightarrow \dfrac{AM}{DN}.\dfrac{AM}{CN}=\dfrac{BM}{CN}.\dfrac{BM}{DN}\Rightarrow AM^2=BM^2\Rightarrow AM=BM\Rightarrow CN=DN$

d) Ta có $\dfrac{AM}{CN}=\dfrac{KM}{KN},CN=DN\Rightarrow \dfrac{AM}{DN}=\dfrac{KM}{KN}$

e) Mà $\dfrac{AM}{DN}=\dfrac{IM}{IN}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \dfrac{KM}{KN}=\dfrac{IM}{IN}\Rightarrow IM.KN=IN.KM$

Nhận xét: Trong một hình thang, hai cạnh bên không song song: giao điểm hai đường chéo, giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên cùng với trung điểm hai đáy là bốn điểm thẳng hàng.



Bài 5 : Cho tam giác *ABC* nhọn, ba đường cao *AA'*, *BB'*, *CC'* cắt nhau tại *H*. Chứng minh rằng:

$a)\, AB.AC'=AB'.AC=AA'.AH$ $\qquad$ $b)\, HA.HA'=HB.HB'=HC.HC'$

Lời giải :

a) Hai tam giác vuông *ABB'* và *ACC'* có $\widehat{BAB'}=\widehat{CAC'}$

$\Rightarrow \Delta BAB' \backsim \Delta CAC' \Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB'}{AC'}$

$\Rightarrow AB.AC'=AC.AB'\ (1)$

Hai tam giác vuông *AA'B* và *AC'H* có $\widehat{BAA'}=\widehat{HAC'}$

$\Rightarrow \Delta BAA' \backsim \Delta HAC' \Rightarrow \dfrac{AB}{AH}=\dfrac{AA'}{AC'}$

$\Rightarrow AB.AC'=AA'.AH\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có $AB.AC'=AB'.AC=AA'.AH$

b) Hai tam giác vuông *HA'B* và *HAB'* có $\widehat{AHB}=\widehat{AHB'}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta A'HB \backsim \Delta B'HA \Rightarrow \dfrac{HA'}{HB'}=\dfrac{HB}{HA}\Rightarrow HA.HA'=HB.HB'$

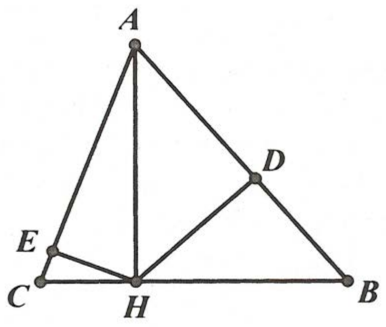
Hai tam giác vuông HA'C và HAC' có $\widehat{A'HC}=\widehat{AHC'}$(hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta A'HC \backsim \Delta C'HA \Rightarrow \dfrac{HA'}{HC'}=\dfrac{HC}{HA}\Rightarrow HA.HA'=HC.HC'$

Chú ý: có thể lập được các đẳng thức tương tự câu a và chứng minh

$$\text{AA'.AH} + \text{BB'.BH} + \text{CC'.CH} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)$$

Bài 6: Cho tam giác *ABC* vuông đỉnh *A*. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *A* lên cạnh *BC, D* là hình chiếu vuông góc của *H* lên *AB, E* là hình chiếu vuông góc của *H* lên cạnh *AC*. Chứng minh rằng :



a) $AB.AD = AE.AC = AH^2$ và $EH.AB = DH.AC$

b) $\dfrac{1}{HB^2} + \dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{1}{HC^2} + \dfrac{1}{HD^2}$

Lời giải:

a) Xét tam giác vuông *ABH* có *HD* là đường cao, suy ra $AD.AB = AH^2$

Xét tam giác vuông *ACH* có *HE* là đường cao, suy ra $AC.AE = AH^2$

Từ hai đẳng thức trên ta có:

$AD.AB = AC.AE = AH^2$

Mặt khác, tứ giác *ADHE* có ba góc vuông nên là hình chữ nhật $\Rightarrow AD = EH, AE = DH$

$\Rightarrow EH.AB = DH.AC$. Vậy $AB.AD = AE.AC$ và $EH.AB = DH.AC$

b) Xét tam giác vuông *AHC* có *HE* là đường cao, suy ra:

$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HC^2} \Rightarrow \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HC^2} \quad (1)$$

Xét tam giác vuông *AHB* có *HD* là đường cao, suy ra

$$\frac{1}{HD^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HB^2} \Rightarrow \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HC^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{1}{HB^2} + \dfrac{1}{HE^2} = \dfrac{1}{HC^2} + \dfrac{1}{HD^2}$

Bài 7: Cho tam giác *ABC* nhọn, kẻ đường cao *AD, BE, CF*. Chứng minh rằng:

a) $\cot A + \cot B = \dfrac{BC}{AD}, \cot C + \cot A = \dfrac{AC}{BE}, \cot A + \cot B = \dfrac{AB}{CF}$

b) $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{4S_{ABC}}$

Lời giải:

a) Xét các tam giác vuông *ADB* và *ADC*, ta có:

$$\cot B = \frac{BD}{AD}, \cot C = \frac{CD}{AD} \Rightarrow \cot B + \cot C = \frac{BD}{AD} + \frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AD}$$

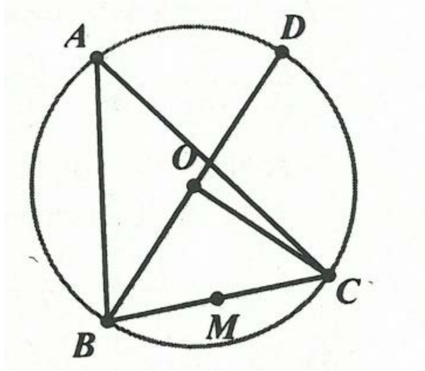
Chứng minh tương tự ta có: $\cot C + \cot A = \dfrac{AC}{BE}, \text{cotA} + \text{cotB} = \dfrac{AB}{CF}$

b) Áp dụng kết quả câu a) ta có

$\cot B + \cot C = \dfrac{BD}{AD} + \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{BC^2}{BC.AD} = \dfrac{BC^2}{2S_{ABC}}$

$\cot C + \cot A = \dfrac{AC}{BE} = \dfrac{AC^2}{AC.\text{BE}} = \dfrac{AC^2}{2S_{ABC}}$

$\cot A + \cot B = \dfrac{AB}{CF} = \dfrac{AB^2}{AB.CF} = \dfrac{AB^2}{2S_{ABC}}$



Cộng các vế tương ứng của 3 đẳng thức, ta có:

$2\left(\cot A + \cot B + \cot C\right) = \dfrac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{2S_{ABC}}$

Vậy $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{4S_{ABC}}$

Bài 8: Cho tam giác nhọn *ACB* nội tiếp *(O, R)*. Chứng minh rằng: $BC = 2R\sin A$

Lời giải:

<u>Cách 1:</u>

Gọi *M* là trung điểm *BC*. Tam giác *OBC* cân tại *O*.

$\Rightarrow OM \perp BC, \widehat{BOM} = \widehat{COM} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC}, BM = \dfrac{1}{2}BC$

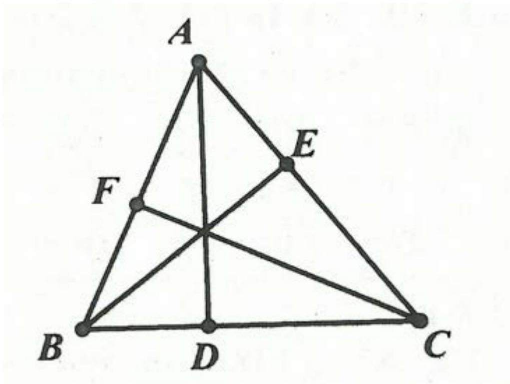
Mặt khác $\widehat{A} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$ (liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm)

$\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{BOM}$

Tam giác *BOM* vuông tại *M*

$\Rightarrow BM = BO\sin\widehat{BOM} \Rightarrow \dfrac{1}{2}BC = R\sin A \Rightarrow BC = 2R\sin A$

<u>Cách 2:</u>



Kẻ đường kính *BD*, ta có $\widehat{BCD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại *C* $\Rightarrow \sin D = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{BC}{2R}$

Mặt khác $\widehat{D} = \widehat{A}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung *BC*)

$\Leftrightarrow \sin A = \dfrac{BC}{2R} \Rightarrow BC = 2R\sin A$

Bài 9: Cho tứ giác *ABCD* có hai đường chéo vuông góc với nhau tại *I*. giả sử hai tia *BA* và *CD* cắt nhau tại *O* và $\widehat{IOA} = \widehat{IOD}$. Chứng minh rằng :

a) $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

b) $\dfrac{1}{IA^2} + \dfrac{1}{IB^2} = \dfrac{1}{IC^2} + \dfrac{1}{ID^2}$

Lời giải:

a) Vì AC và BD vuông góc với nhau tại I nên các tam giác IAB, IBC, ICD, IDA là các tam giác vuông tại I.

Áp dụng định lí Pitago vào bốn tam giác này ta có:

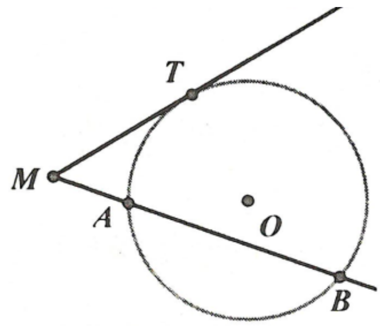
$AB^2 = IA^2 + IB^2, CD^2 = IC^2 + ID^2$

$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$

$AD^2 = IA^2 + ID^2, BC^2 = IB^2 + IC^2$

$\Rightarrow AD^2 + BC^2 = IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$

$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$



b) Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của I lên AB và CD.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông IAB và ICD ta có:

$$\frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{1}{IH^2}, \frac{1}{IC^2} = \frac{1}{ID^2} + \frac{1}{IK^2}$$

Mặt khác $\widehat{IOA} = \widehat{IOD}$ (giả thiết)

$\Rightarrow IH = IK$ (tính chất của điểm nằm trên tia phân giác của một góc)

$$\Rightarrow \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IK^2} \Rightarrow \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{1}{IC^2} + \frac{1}{ID^2}$$

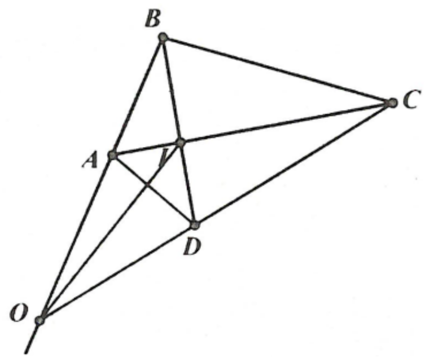
Bài 10: Cho điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O. Kẻ tiếp tuyến MT (T là tiếp điểm). Một đường thẳng đi qua M cắt đường tròn tại A và B (A nằm giữa M và B). Chứng minh $MT^2 = MA.MB$

Lời giải:

Ta có $\widehat{B} = \frac{1}{2} sd\,\widehat{AT}$ (tính chất góc nội tiếp)

$\widehat{MTA} = \frac{1}{2} sd\,\widehat{AT}$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{MTA} = \widehat{B}$



Xét hai tam giác MAT và MTB, ta có $\widehat{MTA} = \widehat{B}, \widehat{TMA} = \widehat{TMB}$

$$\Rightarrow \Delta MAT \backsim \Delta MTB \Rightarrow \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB} \Rightarrow MT^2 = MB.MA$$

Bài 11: Cho tam giác ABC, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác cắt tia CB tại D. Gọi AE là tia phân giác góc A. Chứng minh rằng :

a) $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DA}, DA^2 = DB.DC$

b) $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{DB}{DC}$

c) $DB.EC^2 = DC.EB^2$

Lời giải:

a) Ta có $\widehat{C}=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{AB}$ (tính chất góc nội tiếp)

$\widehat{DAB}=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{AB}$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây cung)

$\Rightarrow \widehat{DAB}=\widehat{C}$

Vì hai tam giác DAB và DCA có $\Rightarrow \widehat{DAB}=\widehat{C}$ và chung góc đỉnh D

$\Delta DAB\backsim\Delta DCA\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DA},\frac{DA}{DC}=\frac{DB}{DA}\Rightarrow DA^2=DB.DC$

b) $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DA}\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2}=\frac{DB^2}{DA^2}=\frac{DB^2}{DB.DC}=\frac{DB}{DC}$

c) Vì AE là tia phân giác trong góc A nên $\frac{AB}{AC}=\frac{EB}{EC}$ (tính chất đường phân giác).

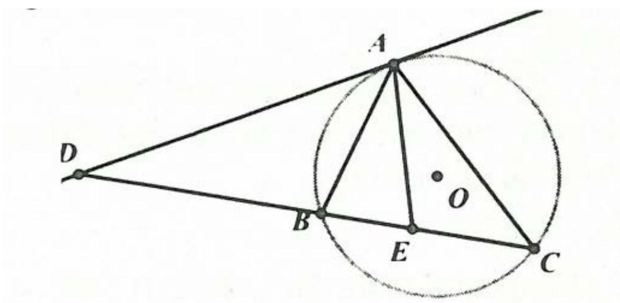
Theo kết quả câu b, $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{DB}{DC}\Rightarrow \frac{EB^2}{EC^2}=\frac{DB}{DC}\Rightarrow EC^2.BD=EB^2.DC$

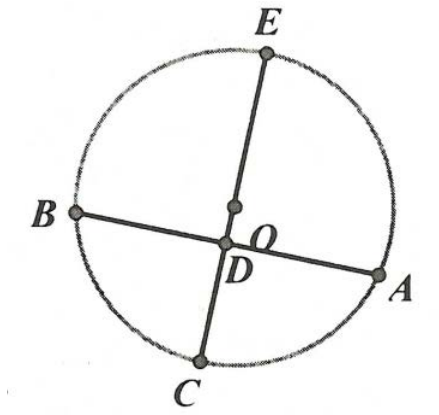
Bài 12: Cho tam giác ABC. Trung tuyến AD, đường cao BH, phân giác CE đồng quy.

Chứng minh: $\left(BA+CA\right)\left(BC^2+CA^2-AB^2\right)=2BC.CA^2$

Lời giải:

Tam giác vuông BHC có:





$CH^2 = BC^2 - BH^2 = BC^2 - \left(AB^2 - AH^2\right)$

$= BC^2 - AB^2 + AH^2 = BC^2 - AB^2 + \left(CA - CH\right)^2$

$\Rightarrow BC^2 + CA^2 - AB^2 = 2CA.\, CH \Rightarrow CH = \dfrac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2CA}$

Tương tự: $AH = \dfrac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA}$

$\Rightarrow \dfrac{CH}{AH} = \dfrac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{CA^2 + AB^2 - BC^2} \quad (1)$

Trong tam giác ADC, CO là phân giác nên:

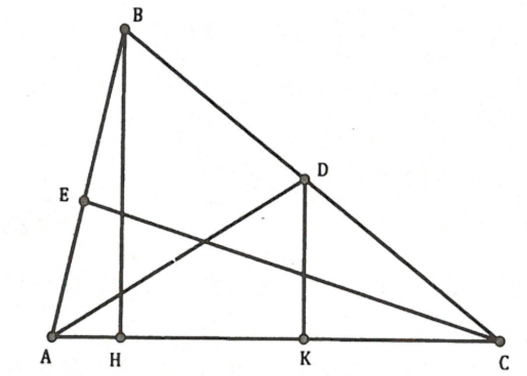
$\dfrac{OD}{OA} = \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{BC}{2CA} \qquad (2)$

Từ *D* kẻ *DK* vuông góc với *CA*, ta có:

$BH // DK$ và $HK = \dfrac{HC}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{HK}{HA} = \dfrac{CH}{2HA} \quad (3)$

Từ (1); (2); (3):



$\Rightarrow \dfrac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{CA^2 + AB^2 - BC^2} = \dfrac{BC}{CA} \Rightarrow \dfrac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2CA^2} = \dfrac{BC}{BC + CA}$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 13: Cho đường tròn *(O, R) và A, B* là hai điểm thuộc đường tròn.

Gọi *C* là điểm nằm chính giữa cung nhỏ *AB, E* là một điểm thuộc cung lớn *AB*, hai đoạn thẳng *AB* và *CE* cắt nhau tại *D*.

a) Chứng minh rằng $CA^2 = CE.CD$

b) Giả sử $\widehat{AOB} < 120^o$. Chứng minh rằng $AB^2 < 4CE.CD < 4R^2$

Lời giải:

a) Xét hai tam giác *CAD* và *CEA* có:

$\widehat{ACD} = \widehat{ECA}$

$\widehat{CAD} = \widehat{CEA}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau *AC* và *CB*)

$\Rightarrow \Delta CAD \backsim \Delta CEA \Rightarrow \dfrac{CA}{CE} = \dfrac{CD}{CA} \Rightarrow CA^2 = CE.CD$

b) Ta có $\widehat{AOC}=\frac{1}{2}\widehat{AOB},\qquad \widehat{AOB}<120^o\Rightarrow\widehat{AOC}<60^o$

Tam giác OAC cân tại O, $\widehat{AOC}<60^o\Rightarrow\widehat{AOC}$ là góc nhỏ nhất trong tam giác

$\Rightarrow CA<OA\Rightarrow CA<R$

Lại có $AB<CA+CB$ (Bất đẳng thức giữa các cạnh trong tam giác)

$CA=CB$ (giả thiết) $\Rightarrow AB<2CA$

Ta có $\begin{cases}CE.CD=CA^2\\AB<2CA<2R\end{cases}\Rightarrow AB^2<4CE.CD<4R^2$

Bài 14: Cho tam giác *ABC* cân tại *A*, nội tiếp đường tròn *(O)*. *D* là điểm thuộc cung *BC* không chứa *A* (*D* khác *B* và *C*). *AD* cắt *BC* tại *E*. Chứng minh rằng $AD.AE=AB^2$

Lời giải:

Ta có: $\widehat{ADB}=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{AB},\widehat{ABE}=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{AC}$

(tính chất góc nội tiếp)

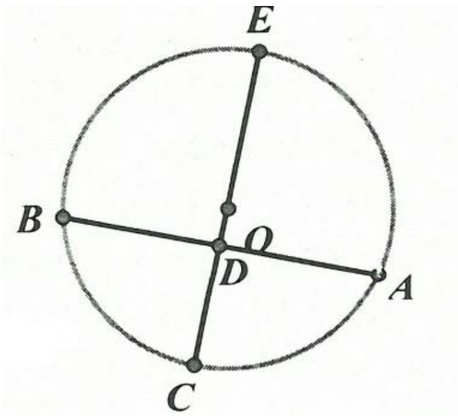
$AB=AC$ (giả thiết) $\Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AB}=sd\,\overset{\frown}{AC}$

$\Rightarrow\widehat{ADB}=\widehat{ABE}$

Hai tam giác *ADB* và *ABE* có chung góc đỉnh *A* và :

$\widehat{ADB}=\widehat{ABE}\Rightarrow\Delta ADB\backsim\Delta ABE\left(g.g\right)$

$\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AE}\Rightarrow AB^2=AD.AE$



Bài 15: Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn *(O)*. Tia phân giác trong của góc *A* cắt cạnh *BC* tại *D* và cắt đường tròn tại điểm thứ hai *E*. Chứng minh rằng $AD.AE=AB.AC$

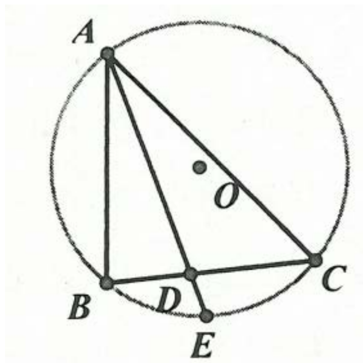
Lời giải:

Xét hai tam giác *ABD* và *AEC* :

$\widehat{BAD}=\widehat{EAC}$ (giả thiết), $\widehat{ABD}=\widehat{AEC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung *AC*)

$\Rightarrow\Delta ABD\backsim\Delta AEC\left(g.g\right)$

$\Rightarrow\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow AD.AE=AB.AC$



Bài 16 (Lớp 10 THPT Tp.HCM 2011 - 2012): Cho đường tròn *(O)* có tâm *O*, đường kính *BC*. Lấy một điểm *A* trên đường tròn *(O)* sao cho *AB* > *AC*. Từ *A*, vẽ *AH* vuông góc với *BC* (*H* thuộc *BC*). Từ *H*, vẽ *HE* vuông góc

với *AB* và *HF* vuông góc với *AC* (*E* thuộc *AB*, *F* thuộc *AC*).

a) Chứng minh rằng *AEHF* là hình chữ nhật và *OA* vuông góc với *EF*.

b) Đường thẳng *EF* cắt đường tròn *(O)* tại *P* và *Q* (*E* nằm giữa *P* và *F*)

Chứng minh $AP^2 = AE.\text{AB}$. Suy ra *APH* là tam giác cân.

c) Gọi *D* là giao điểm của *PQ* và *BC*; *K* là giao điểm của *AD* và đường tròn *(O)* (*K* khác *A*). Chứng minh rằng *AEFK* là một tứ giác nội tiếp.

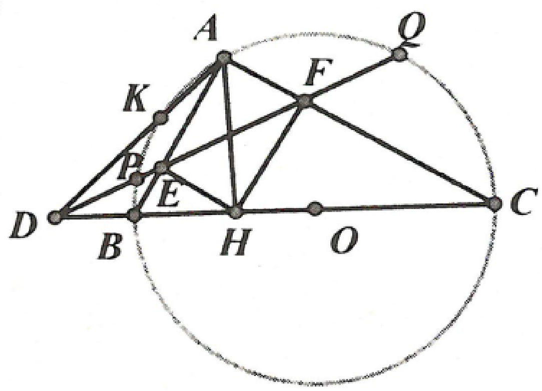
d) Gọi *I* là giao điểm của *KF* và *BC*. Chứng miuh $\text{IH}^2 = IC.ID$.

Lời giải:

a) $\widehat{BAC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn),

$\widehat{HEA} = 90^o\left(HE \perp AB\right), \widehat{HFA} = 90^o\left(HF \perp AC\right)$.

$\Rightarrow$ Tứ giác *AEHF* là hình chữ nhật.



Gọi *J* là giao điểm của *AH* và *EF* ta có: $JA = JF$

$\Rightarrow \Delta JAF$ cân tại $J \Rightarrow \widehat{JFA} = \widehat{JAF}$

Mà $OA = OC\left(= R\right)$

$\Rightarrow \Delta OAC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OCA}$

Nên $\widehat{OAC} + \widehat{JFA} = \widehat{OCA} + \widehat{JAF} = 90^o$

Do vậy $OA \perp EF$

b) $OA \perp EF \Rightarrow \overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{QA} \Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{APE}$

Xét ΔABP và ΔAPE có $\widehat{BAP}$ (chung), $\widehat{ABP} = \widehat{APE}$

Do đó $\Delta ABP \backsim \Delta APE\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{AP}{AE} = \dfrac{AB}{AP} \Rightarrow AP^2 = AE.AB$

ΔHAB vuông tại *H*, *HE* là đường cao $\Rightarrow AH^2 = AE.AB$

$AP^2 = AH^2\left(= AE.AB\right) \Rightarrow AP = AH \Rightarrow \Delta APH$ cân tại *A*.

c) Ta có $\widehat{CFD} = \widehat{JFA}$ (đối đỉnh), $\widehat{ABC} = \widehat{JAF}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$)

$\widehat{JFA} = \widehat{JAF}$ (cmt). Do đó $\widehat{CFD} = \widehat{ABC}$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{CKD}$ (*AKCB* nội tiếp). Nên $\widehat{CFD} = \widehat{CKD}$

$\Rightarrow$ Tứ giác *CFKD* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KFD} = \widehat{KCD}$

Mặt khác $\widehat{KCD} = \widehat{EAK}$ (tứ giác *AKCB* nội tiếp)

Ta có $\widehat{KFD} = \widehat{EAK}\left(= \widehat{KCD}\right) \Rightarrow$ Tứ giác *AEFK* nội tiếp.

d) Xét ΔIFC và ΔIDK có $\widehat{FIC}$ (chung), $\widehat{IFC} = \widehat{IDK}$ (tứ giác *CFKD* nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta IFC \backsim \Delta IDK\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{IF}{ID} = \dfrac{IC}{IK} \Rightarrow IF.IK = IC.ID$

Tứ giác *AEHK* nội tiếp (*AEHK* là hình chữ nhật), tứ giác *AEFK* nội tiếp $\Rightarrow$ *A, E, H, F, K* cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{HKF} = \widehat{HAF}, \widehat{HAF} = \widehat{IHF}$ (cùng phụ với $\widehat{HCF}$) $\Rightarrow \widehat{HKF} = \widehat{IHF}$

$\Delta IHK \backsim \Delta IFH$ ($\widehat{HIF}$ chung, $\widehat{HKI} = \widehat{IHF}\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{IH}{IF} = \dfrac{IK}{IH} \Rightarrow IH^2 = IF.IK$

Vậy $IH^2 = IC.ID\left(= IF.IK\right)$

Bài 17: Cho tam giác nhọn *ABC*, đường cao *CK*, *H* là trực tâm tam giác. *M* là điểm trên *CK* sao cho $\widehat{AMB} = 90^o$. S, S_1, S_2 lần lượt là diện tích tam giác *AMB, ABC, ABH*. Chứng minh: $S = \sqrt{S_1.S_2}$

Lời giải:

Tam giác *AMB* vuông tại *M*, có *MK* vuông góc với *AB* nên $MK^2 = AK.BK$ $\quad(1)$

$\Delta AHK \backsim \Delta CBK$ vì có:

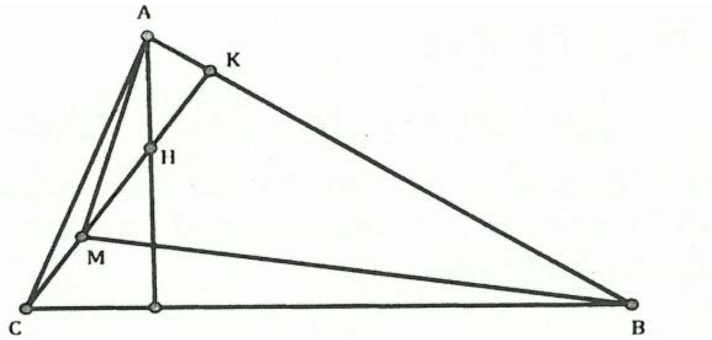
$\widehat{AKH} = \widehat{CKB} = 90^o; \widehat{KAH} = \widehat{KCB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

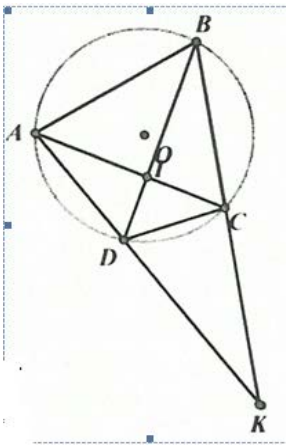
$\Rightarrow \dfrac{AK}{CK} = \dfrac{HK}{BK} \Rightarrow AK.KB = CK.HK \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $MK^2 = CK.HK$ nên $MK = \sqrt{CK.HK}$;

$S_{AMB} = \dfrac{1}{2}AB.MK = \dfrac{1}{2}AB.\sqrt{CK.HK} = \sqrt{\dfrac{1}{2}AB.CK.\dfrac{1}{2}AB.HK} = \sqrt{S_1.S_2}$

Vậy $S = \sqrt{S_1.S_2}$





Bài 18: Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn. Hai đường chéo cắt nhau tại *I*, hai tia *AD* và *BC* cắt nhau tại *K*. Chứng minh rằng:

a) $IA.IC = IB.ID$

b) $KA.KD = KB.KC$

Lời giải:

a) Xét hai tam giác *IAB* và *ICD*: $\widehat{IAB} = \widehat{IDC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung *BC*)

$\widehat{AIB} = \widehat{DIC}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta AIB \backsim \Delta DIC\left(g.g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{IA}{ID} = \dfrac{IB}{IC} \Rightarrow IA.IC = IB.ID$

b) Xét hai tam giác *KAB* và *KCD*, ta có: $\widehat{AKB} = \widehat{CKD}$

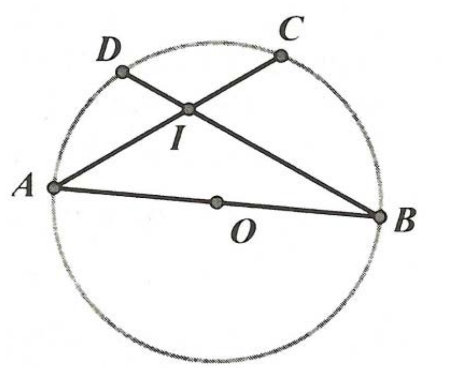
$\widehat{KCD} = \widehat{KAB}$ (tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta KAB \backsim \Delta KCD\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{KA}{KC} = \dfrac{KB}{KD} \Rightarrow KA.KD = KB.KC$

Bài 19: Cho nửa đường tròn đường kính *AB* và hai điểm *C*, *D* thuộc nửa đường tròn (*D* thuộc cung *AC*). Hai đoạn thẳng *AC* và *BD* cắt nhau tại *I*. Chứng minh rằng $AI.\mathrm{AC} + \mathrm{BI}.\mathrm{BD} = \mathrm{AB}^2$

Lời giải:

Ta có $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).



Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *I* lên cạnh *AB*, Hai tam giác *AHI* và *ACB* có:

$\widehat{HAI} = \widehat{CAB} \Rightarrow \Delta HAI \backsim \Delta CAB$

$\Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AI}{AB} \Rightarrow AI.AC = AB.AH \qquad (1)$

Hai tam giác vuông *BHI* và *BDA* có

$\widehat{HBI} = \widehat{DBA} \Rightarrow \Delta HBI \backsim \Delta DBA$

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BD} = \dfrac{BI}{AB} \Rightarrow BI.\mathrm{BD} = \mathrm{AB}.\mathrm{BH} \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $AI.AC + BI.BD = AB.BH + AB.AH = AB\left(BH + AH\right) = AB^2$

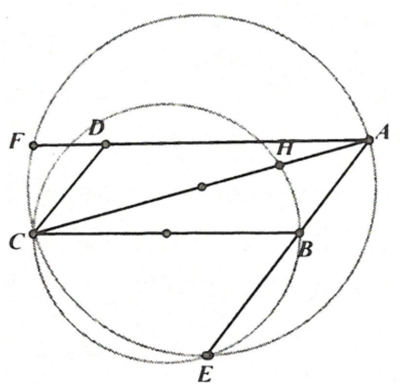
Bài 20: Cho hình bình hành *ABCD* có góc *A* nhọn. Đường tròn đường kính *AC* cắt các tia *AB* và *AD* tại *E* và *F*. Đường tròn đường kính *BC* cắt *AC* tại điểm thứ hai *H*. Chứng minh rằng

a) $AB.AE = AH.AC$

b) $BC.AF = HC.AC$

c) $AB.AE + AD.AF = AC^2$

Lời giải:



a) Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BHC} = 90^o$ (tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), vì vậy các tam giác *AEC* và *AHB* là tam giác vuông.

Xét hai tam giác vuông *AEC* và *AHB* có

$\widehat{EAC} = \widehat{HAB} \Rightarrow \Delta AEC \backsim \Delta AHB$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AH} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AB.AE = AH.AC$

b) Ta có $\widehat{AFC} = 90^o$ (tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), vì vậy tam giác *AFC* là tam giác vuông.

Xét hai tam giác vuông *BHC* và *ACF* có $\widehat{BCH} = \widehat{CAF}$ (hai góc so le trong tạo bởi *AC* và hai đường thẳng song song *BC* và *AF*)

$\Rightarrow \Delta BCH \backsim \Delta CAF \Rightarrow \dfrac{HC}{AF} = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow BC.AF = HC.AC$

c) Ta có $AD = BC$ (hai cạnh đối hình bình hành) $\Rightarrow AD.AF = BC.AF$

Mà $BC.AF = HC.AC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AD.AF = HC.AC$

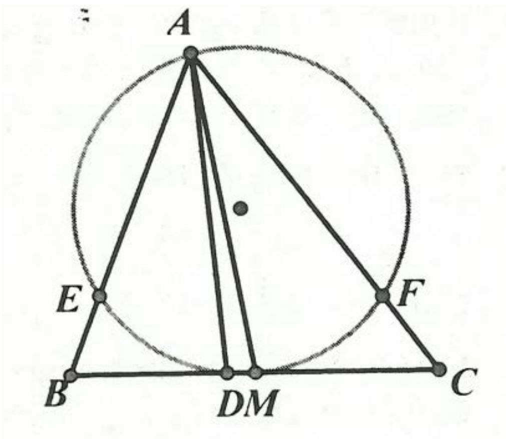
Ta lại có $AB.AE = AH.AC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow AD.AF + AB.AE = HC.AC + AH.AC = (CH + AH).AC = AC.AC = AC^2$

Bài 21: Cho tam giác *ABC (AB < AC)*, kẻ phân giác trong *AD* và trung tuyến *AM*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *ADM* cắt các cạnh *AB* và *AC* tại *E* và *F*. Chứng minh rằng:

a) $BE.BA = BD.BM$

b) $BE.BD + CF.CA = \dfrac{BC^2}{2}$



Lời giải:

a) Ta có *AMDE* là tứ giác nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{BAM}$ (tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp).

Vì hai tam giác *BDE* và *BAM* có chung góc đỉnh B và $\widehat{BDE} = \widehat{BAM}$ nên

$\Delta BDE \backsim \Delta BAM\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BE}{BM}$

$\Rightarrow BE.BA = BD.BM$

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có $CF.CA = CD.CM$

$BE.BA + CF.CA = BD.BM + CD.CM = BD.\dfrac{1}{2}BC + CD.\dfrac{1}{2BC}$

$\Rightarrow BE.BA + CF.CA = (BD + CD)\dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}BC^2$

CHƯƠNG 12

CỰC TRỊ HÌNH HỌC

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

• Dạng 1 : Bất đẳng thức đường xiên, đường vuông góc:

Ta có $MA \perp d, \text{A} \in \text{d}, \text{M} \notin d$ thì :

a) $MA \le MB$

Dấu " = " chỉ xảy ra khi $A \equiv B$

b) $AB \le AC \Leftrightarrow MB \le MC$

• Dạng 2 : Bất đẳng thức tam giác và n điểm:

- Với ba điểm *A, B, C* có: $AB + AC \ge BC$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ *A* nằm giữa *B* và *C*.

- Với n điểm $A_1; A_2; A_3...;A_n$ có:

$$A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n \ge A_1A_n$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow A_1; A_2; A_3...;A_n$ thẳng hàng theo thứ tự đó.

• Dạng 3 : Bất đẳng thức trong đường tròn:

- Đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn.

- Trong đường tròn *(O), AB* và *CD* là hai dây cung. *OH, OK* lần lượt là khoảng cách từ *O* đến *AB, CD*

Ta có: $OH \ge OK \Leftrightarrow AB \le CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} \le \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow \widehat{AOB} \le \widehat{COD}$

• Dạng 4 : Bất đẳng thức đại số:

Một bài toán cực trị hình học có khi phải dùng đến công cụ đại số (điều kiện xảy ra đẳng thức của bất đẳng thức).

1. Kiến thức cần nhớ

* $x^2 \ge 0$. Dấu " = " chỉ xảy ra khi $x = 0$

* - $x^2 \le 0$. Dấu " = " chỉ xảy ra khi $x = 0$

Bất đẳng thức Cô si (Cauchy):

Cho *a, b* không âm ta có $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ (*)

Dấu " = " chỉ xảy ra khi *a = b*

Tổng quát :

Cho *n* số không âm $a_1; a_2;...;a_n$

Ta có: $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$

Dấu " = " chỉ xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Bất đẳng thức Bunhiacopxki:

Cho bốn số *a, b, c, d* ta luôn có: $(ab+cd)^2 \le (a^2+c^2)(b^2+d^2)$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow ad = bc$

Tổng quát: Cho *2n* số $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$ ta luôn có :

$(a_1b_1 + a_2b_2 + ...a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$

Với qui ước nếu mẫu bằng 0 thì tử bằng 0

Các bài toán quen thuộc: Cho *a, b, c > 0*

1. $2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2 \ge 4ab$

2. $3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$

3. $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \ge 4$

4. $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \ge 9$

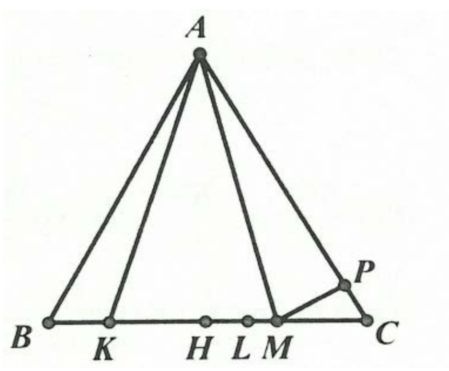
Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Chú ý: Chỉ có (*) được thừa nhận, các bất đẳng thức khác khi dùng phải chứng minh.

B. BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Hai điểm *K, L* thuộc cạnh đáy *BC* sao cho $\widehat{KAL} \le \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$. Chứng minh rằng: $KL \le \dfrac{1}{2}BC$

Lời giải:



Gọi *H* là trung điểm của *BC*. Không mất tính tổng quát giả sử *K* nằm giữa *B* và *L*. Nếu cả *K* và *L* cùng nằm trong đoạn *BH* hoặc *CH* thì suy ra điều phải chứng minh. Nếu không giả sử *K* thuộc đoạn *HC*.

Trên tia *KL* lấy *M* sao cho $\widehat{KAM} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$

Do đó *M* thuộc đọan *BC* và *L* nằm giữa *K* và *M* (do $\widehat{KAL} \le \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$)

$\Rightarrow KL \le KM$

Ta giả sử $AM \ge AK$ (nếu $AK \ge AM$) chứng minh tương tự

Hạ *MP* vuông góc với *AC* ta có:

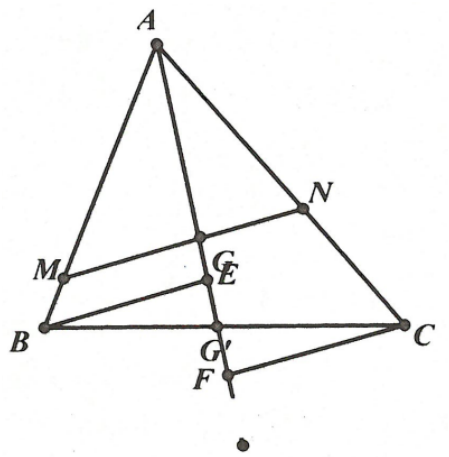
$\Delta KAH \backsim \Delta MAP \Rightarrow \dfrac{KH}{MP} = \dfrac{AK}{AM} \Rightarrow KH \le MP$

Dễ dàng chứng minh được: $MP \le MC \Rightarrow KH \le MC \le KM \le HC$

$\Rightarrow KL \le HC \Rightarrow KL \le HC = \dfrac{BC}{2}$

$\Rightarrow$ Ta có điều phải chứng minh

Bài 2: Cho tam giác *ABC* có trọng tâm *G*. Một đường thẳng qua *G* cắt cạnh *AB*, *AC* lần lượt tại *M*, *N*. Chứng minh rằng: $\dfrac{4}{9} \le \dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} < \dfrac{1}{2}$



Lời giải

Qua *C*, *B* kẻ các đường song song với *MN* cắt *AG* lần lượt tại *E*, *F*.

Ta có:

$\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AF}{AG}; \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AE}{AG}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AE + AF}{AG} = 3$

(do $G'E = G'F$ với *G'* là trung điểm của *BC*)

Ta có: $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \dfrac{AB.AC}{AM.AN} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$

Vậy $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} \ge \dfrac{4}{9}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$ khi và chỉ khi $MN // BC$

Do *M*, *N* lần lượt nằm trong đoạn *AB*, *AC* và *MN* đi qua trọng tâm *G* nên

$$1 < \dfrac{AB}{AM}; \dfrac{AC}{AN} < 2$$

Đặt $\dfrac{AM}{AB} = x; \dfrac{AN}{AC} = y$ ta có $\dfrac{1}{2} < y, x < 1$

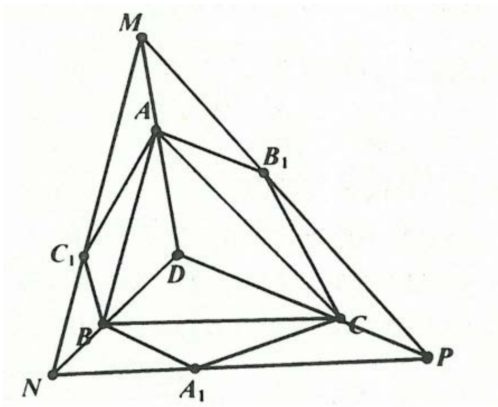
Theo chứng minh trên $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 3$ hay $x + y = 3xy$

Từ (1) ta có: $(1-x)(1-y) > 0$ hay $1-(x+y)+xy > 0$

Do đó $1 - 2xy > 0 \Rightarrow xy < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{AM.AN}{AB.AC} < \dfrac{1}{2}$

Vậy $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} < \dfrac{1}{2}$

Bài 3: Về phía ngoài tam giác *ABC* dựng các tam giác BCA_1; CAB_1, ABC_1 sao cho tổng diện tích của 3 tam giác này nhỏ hơn diện tích tam giác *ABC*. Qua A_1; B_1; C_1 vẽ các đường thẳng tương ứng song song với *BC*, *CA*, *AB*. Chúng cắt nhau tạo thành tam giác *MNP*. Chứng minh:



$$S_{MNP} < 2S_{A_1CB_1AC_1B}$$

Lời giải:

Theo đề bài ta cần chứng minh $S_{MNP} < 2S_{AB_1CA_1BC_1}$

Ta có: $BA//MN, AC//MP, BC//NP$ điều này chứng tỏ *MA*, *NB*, *PC* đồng quy tại một điểm và ta gọi đó là điểm *D*.

Đặt $\dfrac{DC}{DP} = k$ do $AC//MP, BC//NP$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DN} = \frac{DA}{DM} = \frac{CD}{DP} = k$$

Vì $AC//\mathrm{MP} \Rightarrow \mathrm{S}_{AB_1C} = S_{APC}$

$$\Rightarrow S_{AB_1C} + S_{ADC} = S_{APC} + S_{ADC}$$

$$\Rightarrow S_{AB_1CD} = S_{ADP}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AB_1CD}}{S_{MDP}} = \frac{S_{ADP}}{S_{MDP}} = \frac{AD}{MD} = k$$

Tương tự chứng minh trên: $\dfrac{S_{B_1CD}}{S_{MDN}} = \dfrac{S_{DBA_1C}}{S_{DNP}} = \dfrac{S_{AB_1CD}}{S_{DMP}} = k$

$$\Rightarrow k = \frac{S_{AC_1BD} + S_{DBA_1C} + S_{AB_1CD}}{S_{MND} + S_{DNP} + S_{DMP}} = \frac{S_{AB_1CA_1BC_1}}{S_{MNP}} \qquad (1)$$

Cũng vì $AC//MP \Rightarrow S_{AB_1C} = S_{APC} \Rightarrow \dfrac{S_{AB_1C}}{S_{ADC}} = \dfrac{S_{APC}}{S_{ADC}} = \dfrac{PC}{DC}$

Tương tự suy ra:

$$\frac{S_{AC_1B}}{S_{ABD}} = \frac{AM}{AD} = \frac{NB}{ND} = \frac{S_{BA_1C}}{S_{BDC}} = \frac{PC}{DC} = \frac{S_{AB_1C}}{S_{ADC}}$$

$$= \frac{S_{AC_1B} + S_{BA_1C} + S_{AB_1C}}{S_{ABD} + S_{BDC} + S_{ADC}} = \frac{S_{AC_1B} + S_{BA_1C} + S_{AB_1C}}{S_{ABC}} < 1$$

Từ đó ta có: $\dfrac{AM}{AD} < 1 \Rightarrow \dfrac{(AM + AD)}{AD} < 2 \Rightarrow \dfrac{DM}{AD} < 2 \Rightarrow k = \dfrac{AD}{DM} > \dfrac{1}{2} \qquad (2)$

Kết hợp (1) và (2) cho điều phải chứng minh.

Bài 4: Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn *(O).* Hai điểm *M, N* thuộc cạnh *BC* sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{NAC}$.

Gọi *P, Q* là giao điểm thứ hai khác *A* của *AM* và *AN* với *(O).* Chứng minh rằng:

1. $AM.AN = -\sqrt{BM.BN.CM.CN} + AB.AC$

2. $AP + AQ > AB + AC > AM + AN$

Lời giải:

1. Gọi *P, Q* là giao điểm thứ 2 của *AM, AN* với *(O)* ta có *BCQP* là hình thang cân

Lại có: $\Delta ABM \backsim \Delta AQC \Rightarrow AM.AQ = AB.AC$

Mà $MN//PQ \Rightarrow \dfrac{AM}{MP} = \dfrac{NQ}{NA} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{AM^2}{BM.CN}.\dfrac{NQ^2}{BN.CN} = 2$

$\Rightarrow AM.NQ = \sqrt{BM.CN.BN.CM}$

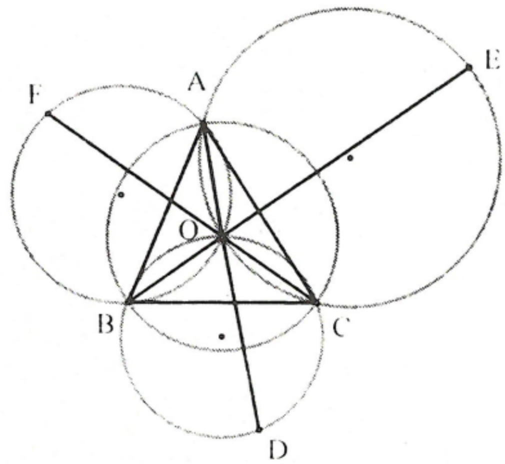
$\Rightarrow AM.AN = AM.AQ - AM.NQ = AB.AC - \sqrt{BM.CN.BN.CM}$

2. Gọi *E* là điểm chính giữa cung *BC* của *(O)*

Ta có: $AB + AC = \dfrac{AE.BC}{EB} > \dfrac{AE.PQ}{EP} = AQ$

Hãy chứng minh tiếp: $\left(AM + AN\right)\left(AP + AQ\right) \le \left(AB + AC\right)^2$

Để suy ra điều phải chứng minh



Bài 5: Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp trong đường tròn *(O; R).* Đường thẳng *AO* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *OBC* tại *D*, *BO* kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *OCA* tại *E*, *CO* kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *OAB* tại *F*. Chứng minh rằng: $OD.OE.OF \ge 8R^3$

Lời giải:

Ta có: $\widehat{DBC} = \widehat{DOC} = \widehat{OAC} + \widehat{OCA} = 180^o - 2\widehat{B}$

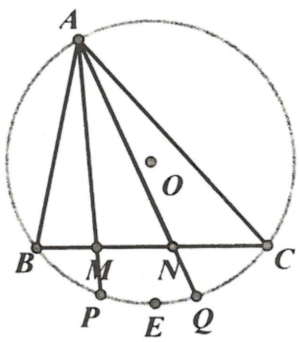
Tương tự: $\widehat{DCB} = 180^o - 2\widehat{C}$

$\Rightarrow \Delta DBC$ có góc *DBC* và *DCB* có số đó là: $180^o - 2\widehat{B}; 180^o - 2\widehat{C}$

Tương tự cho các tam giác *AEC, ABE*

Ta có: $\Delta BDC \backsim \Delta BAF \backsim \Delta EAC$

Đặt $BC = x; DC = y; BD = z$. Khi đó:



$\frac{BF}{x} = \frac{AF}{y} = \frac{BA}{z} \quad (1)$

$\frac{EC}{x} = \frac{AC}{y} = \frac{EA}{z} \quad (2)$

Áp dụng định lí Pto-le-me cho tứ giác *OBDC* ta có:

$OD.BC = OB.DC + OC.BD \Rightarrow OD = R.\frac{z+y}{x} \ (3)$

Áp dụng định lí Pto-le-me cho tứ giác *OAEC* ta có:

$OE.AC = R\left(AE + CE\right)$

Kết hợp (2) ta có: $OE = R.\frac{z+x}{y} \ \ (4)$; tương tự $OF = R.\frac{x+y}{z}(5)$

Từ (3); (4); (5)

$\Rightarrow OD.OE.OF = \frac{R^3\left(y+z\right)\left(x+z\right)\left(x+y\right)}{xyz} \geq \frac{R^3 2\sqrt{yz}2\sqrt{zx}2\sqrt{xy}}{xyz} = 8R^3$

Ta có điều phải chứng minh

Bài 6: Cho đường tròn *(O; R)* đường kính *BC*. *A* là điểm chuyển động trên đường tròn. Xác định vị trí của *A* để :

a) Diện tích tam giác *ABC* lớn nhất.

b) Chu vi tam giác *ABC* lớn nhất.

Lời giải:

a) Cách 1:

Vẽ $AH \perp BC$ tại *H*

Ta có: $AH \leq AO$ Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC \leq \frac{1}{2}AO.BC = R^2$

$S_{ABC} \leq R^2$, R^2 không đổi

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow A$ là giao điểm đường trung trực đoạn *BC* và đường tròn *(O)*

Vậy khi *A* là giao điểm đường trung trực đoạn *BC* và đường tròn *(O)* thì diện tích tam giác *ABC* lớn nhất.

Cách 2:

Ta có $\widehat{BAC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

ΔABC vuông tại $A \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$ (định lí Pitago)

Nên $AB^2 + AC^2 = 4R^2$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2\right) - \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\right)$

$= \frac{1}{4}BC^2 - \frac{1}{4}\left(AB - AC\right)^2 = R^2 - \frac{1}{4}\left(AB - AC\right)^2 \leq R^2$

$S_{ABC} \le R^2$, R^2 không đổi

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow A$ là giao điểm đường trung trực đoạn BC và đường tròn *(O)*

Vậy khi *A* là giao điểm đường trung trực đoạn *BC* và đường tròn *(O)* thì diện tích tam giác *ABC* lớn nhất.

b) Ta có: $AB + AC = \sqrt{(AB+AC)^2} = \sqrt{AB^2 + AC^2 + 2AB.AC}$

$$= \sqrt{4R^2 + 4S_{ABC}} \le \sqrt{4R^2 + 4R^2} = 2\sqrt{2}R$$

Do đó chu vi $\Delta ABC = AB + AC + BC \le 2\sqrt{2}R + 2R = 2\left(\sqrt{2}+1\right)R$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A$ là giao điểm đường trung trực đoạn *BC* và đường tròn *(O)*

Vậy khi *A* là giao điểm đường trung trực đoạn *BC* và đường tròn *(O)* thì chu vi *ΔABC* lớn nhất.

Bài 7:

a) Tìm một hình chữ nhật nội tiếp trong đường tròn *(O; R)* cho trước có diện tích lớn nhất.

b) Tìm một tứ giác nội tiếp trong đường tròn *(O; R)* cho trước có diện tích lớn nhất.

Lời giải:

a) *ABCD* là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{DAB} = 90^o$ và $S_{ABCD} = 2S_{ABD}$

$\widehat{DAB} = 90^o \Rightarrow DB$ là đường kính của $(O) \Leftrightarrow DB = 2R$

Vẽ $AH \perp BD\,(H \in DB)$

$AH \le OA = R$

Do đó $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2.\dfrac{1}{2}AH.BD = AH.BD \le R.2R = 2R^2$

Vậy $S_{ABCD} \le 2R^2$, $2R^2$ không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông.

b) Vẽ $AH \perp BD\,(H \in DB), CK \perp BD\,(K \in BD)$

Gọi *I* là giao điểm của *AC* và *BD*

Ta có $H, I, K \in BD, AH \perp BD$ và $CK \perp BD \Rightarrow AH \le AI$ và $CK \le IC$

Do đó: $AH + CK \le AI + IC \Rightarrow AH + CK \le AC$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}AH.BD + \frac{1}{2}CK.BD = \frac{1}{2}BD(AH+CK)$$

$AC \le 2R; BD \le 2R$ (đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn)

Do đó $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}BD(AH+CK) \le \dfrac{1}{2}BD.AC \le 2R^2$

Dấu "=" xảy ra $H \equiv I \equiv K$, *AC* và *BD* là hai đường kính của *(O)*

$\Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông.

Bài 8: Chứng minh rằng trong tất cả các tứ giác lồi nội tiếp cùng một đường tròn, hình vuông có chu vi lớn nhất.

Lời giải:

Xét tứ giác lồi bất kì *ABCD* và hình vuông *MNPQ* cùng nội tiếp đường tròn *(O)* sao cho $MP \perp AC, MP$ là đường kính của đường tròn *(O).* Suy ra *M, P* là trung điểm của cung *AC,* cung lớn *AC*.

$MP \perp QN$, *MP* và *QN* là đường kính.

$\Rightarrow \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NP} = \overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{QM}$

Gọi *E'* là giao điểm của *AD* với đường tròn tâm *A* bán kính

$r = \dfrac{AB.AC}{2R} \Rightarrow E'$ cố định.

Xét 3 điểm *O, A, E* ta có $OE \geq AE - AO \geq AH - AO = AE' - AO = OE' \Rightarrow OE \geq OE', OE'$ không đổi.

Ta có S_{ABC} lớn nhất

$\Leftrightarrow BC$ lớn nhất $\Leftrightarrow OE$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OE = OE' \Leftrightarrow E \equiv E'$