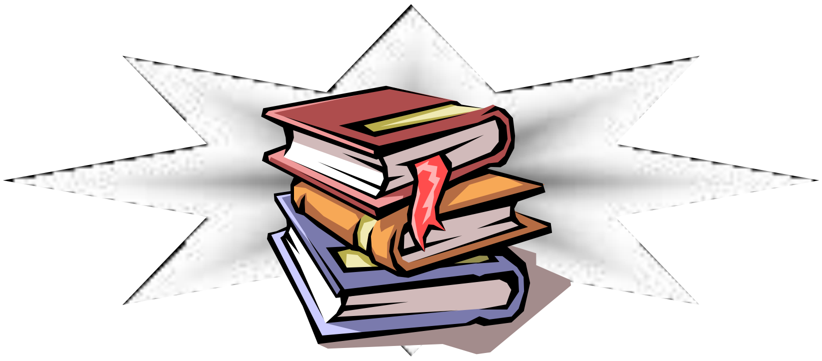
Tailieumontoan.com

Trịnh Bình sưu tầm tổng hợp



BỘ ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
CẤP TỈNH MÔN TOÁN 9 HẢI DƯƠNG

Thanh Hóa, ngày 28 tháng 3 năm 2020

BỘ ĐỀ HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH HẢI DƯƠNG

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh luyện thi học sinh giỏi môn toán lớp 9, website tailieumontoan.com giới thiệu đến thầy cô và các em bộ đề thi học sinh giỏi toán lớp 9 của các tỉnh Hải Dương có hướng dẫn giải cụ thể. Đây là bộ đề thi mang tính chất thực tiễn cao, giúp các thầy cô và các em học sinh luyện thi học sinh giỏi lớp 9 có một tài liệu bám sát đề thi để đạt được thành tích cao, mang lại vinh dự cho bản thân, gia đình và nhà trường. Bộ đề gồm nhiều Câu toán hay được các thầy cô trên cả nước sưu tầm và sáng tác, ôn luyện qua sẽ giúp các em phát triển tư duy môn toán từ đó thêm yêu thích và học giỏi môn học này, tạo được nền tảng để có những kiến thức nền tốt đáp ứng cho việc tiếp nhận kiến thức ở các lớp, cấp học trên được nhẹ nhàng và hiệu quả hơn.

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng có thể dùng tuyển tập đề toán này để giúp con em mình học tập. Hy vọng Tuyển tập đề thi học sinh giỏi lớp 9 cấp tỉnh Hải Dương này sẽ có thể giúp ích nhiều cho học sinh phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Bộ đề này được viết theo hình thức Bộ đề ôn thi, gồm: đề thi và hướng dẫn giải đề ngay dưới đề thi đó dựa trên các đề thi chính thức đã từng được sử dụng trong các kì thi học sinh giỏi toán lớp 9 ở các tỉnhr Hải Dương.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ bộ đề này!

MỤC LỤC

Phần 1. Đề thi

ĐỀ SỐ	TỈNH THÀNH
1.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2018-2019
2.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2017-2018
3.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2016-2017
4.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2015-2016
5.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2014-2015
6.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2013-2014
7.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2012-2013
8.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2011-2012
9.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2010-2011
10.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2009-2010
11.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2008-2009 (đề 3)
12.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2008-2009 (đề 2)
13.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2008-2009 (đề 1)
14.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2006-2007
15.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2005-2006
16.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2004-2005
17.	Đề thi học sinh giỏi toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2003-2004

Phần 2. Đáp án

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 1

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH

LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019

MÔN THI: TOÁN

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: *(2,0 điểm)*

1) a) Cho $P=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+3}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\dfrac{3\sqrt{z}}{\sqrt{xz}+3\sqrt{z}+3}$ và $xyz=9$. Tính $\sqrt{10P-1}$.

b) Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn: $x+y+z+\sqrt{xyz}=4$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-z)(4-x)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}=8+\sqrt{xyz}$.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\dfrac{x^2}{(x+2)^2}+3=3x^2-6x$.

2) b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=2x \\ x(x+y)^2+x-2=2y^2 \end{cases}$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2+x+2y^2+y=2xy^2+xy+3$.

b) Chứng minh rằng $a_1^3+a_2^3+a_3^3+...+a_n^3$ chia hết cho 3, biết $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ là các chữ số của 2019^{2018}.

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác MNP có 3 góc M,N,P nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi Q là trung điểm của NP và các đường cao MD,NE,PF của tam giác MNP cắt nhau tại H.

Chứng minh rằng:

a) $MH=2OQ$.

b) Nếu $MN+MP=2NP$ thì $\sin N+\sin P=2\sin M$.

c) $ME.FH+MF.HE=\sqrt{2}R^2$ biết $NP=R\sqrt{2}$.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{ab^2}{a+b}+\dfrac{bc^2}{b+c}+\dfrac{ca^2}{c+a}$ biết a,b,c là các số dương thỏa mãn $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=3$.

----------------HẾT---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 2

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017 – 2018
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$. Rút gọn $B=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}$ (với $0\le x\le \dfrac{1}{4}$)

b) Cho $x,y,z\neq 0$ và đôi một khác nhau thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2zx}+\frac{1}{z^2+2xy}\right)\left(x^{2016}+y^{2017}+z^{2018}\right)=xy+yz+zx \quad (*)$$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x-10}\right)=7$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-xy=2 \\ x^3=x+y \end{cases}$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm các số thực x sao cho $x+\sqrt{2018}$ và $\dfrac{7}{x}-\sqrt{2018}$ đều là số nguyên.

b) Tìm các số tự nhiên có dạng $\overline{ab}$. Biết rằng $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2$ là một số chia hết cho 3267.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ có $BDC=90^0$, đường phân giác của góc BAD cắt cạnh BC và đường thẳng CD tại E và F. Gọi O và O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và ΔCEF.

1) Chứng minh rằng O' thuộc đường tròn (O);

2) Khi DE vuông góc với BC

a) Tiếp tuyến của (O) tại D cắt BC tại G. Chứng minh rằng $BG.CE=BE.CG$;

b) Đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại H (H khác C). Kẻ tiếp tuyến chung IK (I thuộc đường tròn (O), K thuộc đường tròn (O') và H, I, K nằm cùng phía bờ OO'. Dựng hình bình hành $CIMK$. Chứng minh rằng $OB+O'C>HM$.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2\le 3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{x^2}{x^4+yz}+\dfrac{y^2}{y^4+zx}+\dfrac{z^2}{z^4+xy}$.

-----------------**HẾT**----------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH**
TỈNH HẢI DƯƠNG	LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016 – 2017
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**MÔN THI: TOÁN**
	Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 3

(Đề thi có một trang)

Bài 1. (*2,0 điểm*)

a) Cho biểu thức: $P=\sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ (với $-1\le x\le 1$).

Tính giá trị của biểu thức P khi $x=-\dfrac{1}{2019}$

2. Cho a,b,c là ba số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$.

Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{a}}{1+a}+\dfrac{\sqrt{b}}{1+b}+\dfrac{\sqrt{c}}{1+c}=\dfrac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$

Bài 2. (*2,0 điểm*)

a) Giải phương trình: $2x^2-2x+1=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)$.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+(y+1)^2=xy+x+1 \\ 2x^3=x+y+1 \end{cases}$.

Bài 3. (*2,0 điểm*)

a) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7$.

b) Tìm các số tự nhiên n sao cho $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương.

Bài 4. (*3,0 điểm*)

1) Cho tam giác nhọn $ABC(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H $(D\in BC;E\in AC;F\in AB)$. Tia EF cắt tia CB tại P, AP cắt đường tròn $(O;R)$ tại M (M khác A).

a) Chứng minh $PE.PF=PM.PA$ và AM vuông góc với HM;

b) Cho cạnh BC cố định, điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Xác định vị trí của A để diện tích tam giác BHC đạt giá trị lớn nhất.

2) Cho tam giác ABC có góc A nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O. Một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A(I không trùng với B,C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. (*1,0 điểm*) Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}}+\dfrac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}}+\dfrac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}}\le 3$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 4
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (2,0 điểm)

a) Cho $x=3-\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức $A=x^5-8x^4+17x^3+6x^2-116x+104$.

b) Cho *x*, *y* là hai số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)}=x+y-\sqrt{x^2+y^2}.$$

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2-20x+24+8.\sqrt{3(x-1)}=0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+4y^2+3=4x \\ x^3+12x+8y^3=6x^2+9 \end{cases}$.

Câu 3 (2,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên $x,\ y$ thoả mãn: $5x^2+5y^2+6xy-20x-20y+24=0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho n^4+n^3+1 là số chính phương.

Câu 4 (3,0 điểm)

1) Cho tam giác *ABC* có $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. Chứng minh rằng: $\sin\dfrac{A}{2}\le\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$.

2) Cho tam giác *ABC* có $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ $(c<a,\ c<b)$. Gọi *M, N* lần lượt là các tiếp điểm của cạnh *AC* và cạnh *BC* với đường tròn tâm *O* nội tiếp tam giác *ABC*. Đường thẳng *MN* cắt tia *AO* tại *P* và cắt tia *BO* tại *Q*. Gọi *E, F* lần lượt là trung điểm của *AB* và *AC*.

a) Chứng minh rằng: $\dfrac{MP}{a}=\dfrac{NQ}{b}=\dfrac{PQ}{c}$.

b) Trên đoạn thẳng *NC* lấy điểm *I* sao cho *MF* = *NI*. Chứng minh *IQ* đi qua trung điểm của *NF*.

Câu 5 (1,0 điểm) Cho *x*, *y*, *z* là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{x}{y+z+2x}}+\sqrt{\frac{y}{z+x+2y}}+\sqrt{\frac{z}{x+y+2z}}.$$

----------------HẾT---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 5

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014 – 2015
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (2,0 điểm):

a) Tính giá trị của biểu thức: A = $2x^3+3x^2-4x+2$

với $x=\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-1$

b) Cho x, y thỏa mãn:

$$\sqrt{x+2014}+\sqrt{2015-x}-\sqrt{2014-x}=\sqrt{y+2014}+\sqrt{2015-y}-\sqrt{2014-y}$$

Chứng minh: $x=y$

Câu 2 (2,0 điểm):

a) Giải phương trình $x^3+(x+1)\sqrt{x+1}+2\sqrt{2}=\left(x+\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)^3$

b) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}3x^2+xy-4x+2y=2\\ x(x+1)+y(y+1)=4\end{cases}$

Câu 3 (2,0 điểm):

a) Tìm số nguyên tố *p* sao cho các số $2p^2-1;\ 2p^2+3;\ 3p^2+4$ đều là số nguyên tố.

b) Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $3x^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2-18x=27$.

Câu 4 (3,0 điểm): Cho đường tròn (*O;R*) đường kính *BC*. Gọi *A* là điểm thỏa mãn tam giác ABC nhọn. *AB, AC* cắt đường tròn trên tại điểm thứ hai tương ứng là *E* và *D*. Trên cung BC không chứa D lấy *F*($F \neq B, C$). *AF* cắt *BC* tại *M*, cắt đường tròn (*O;R*) tại *N*($N \neq F$) và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *ADE* tại *P*($P \neq A$).

a) Giả sử $BAC=60^0$, tính *DE* theo *R*.

b) Chứng minh *AN.AF = AP.AM*

c) Gọi *I, H* thứ tự là hình chiếu vuông góc của *F* trên các đường thẳng *BD, BC*. Các đường thẳng *IH* và *CD* cắt nhau ở *K*. Tìm vị trí của *F* trên cung BC để biểu thức $\dfrac{BC}{FH}+\dfrac{BD}{FI}+\dfrac{CD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5 (1,0 điểm): Cho các số dương *x, y, z* thay đổi thỏa mãn: $xy+yz+zx=xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M=\dfrac{1}{4x+3y+z}+\dfrac{1}{x+4y+3z}+\dfrac{1}{3x+y+4z}$.

----------------HẾT---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 6
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2013 – 2014
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (2 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2-\sqrt{1-x^2}}$ với $-1\le x\le 1.$

b) Cho *a* và *b* là các số thỏa mãn a > b > 0 và $a^3-a^2b+ab^2-6b^3=0$.

Tính giá trị của biểu thức $B=\dfrac{a^4-4b^4}{b^4-4a^4}$.

Câu 2 (2 điểm).

a) Giải phương trình $x^2(x^2+2)=4-x\sqrt{2x^2+4}.$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3=2x+y \\ y^3=2y+x \end{cases}$.

Câu 3 (2 điểm).

a) Tìm các số nguyên dương *x, y* thỏa mãn phương trình $xy^2+2xy+x=32y$.

b) Cho hai số tự nhiên *a, b* thỏa mãn $2a^2+a=3b^2+b$.

Chứng minh rằng $2a+2b+1$ là số chính phương.

Câu 4 (3 điểm). Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O, R). H là một điểm di động trên đoạn OA (H khác A). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt cung nhỏ AB tại M. Gọi K là hình chiếu của M trên OB.

a) Chứng minh $\mathrm{HKM}=2\mathrm{AMH}$.

b) Các tiếp tuyến của (O, R) tại A và B cắt tiếp tuyến tại M của (O, R) lần lượt tại D và E. OD, OE cắt AB lần lượt tại F và G. Chứng minh OD.GF = OG.DE.

c) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB theo R.

Câu 5 (1 điểm). Cho *a, b, c* là các số thực dương thỏa mãn $2ab+6bc+2ac=7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=\dfrac{4ab}{a+2b}+\dfrac{9ac}{a+4c}+\dfrac{4bc}{b+c}$.

----------------HẾT---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 6
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012 – 2013
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (2,0 điểm):

a) Rút gọn biểu thức: $A = \left(\sqrt{x-\sqrt{50}} - \sqrt{x+\sqrt{50}}\right)\sqrt{x+\sqrt{x^2-50}}$ với $x \ge \sqrt{50}$

b) Cho $x+\sqrt{3}=2$. Tính giá trị của biểu thức: $B = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 20x + 2018$

Câu 2 (2,0 điểm):

a) Giải phương trình $\dfrac{4x}{x^2-5x+6} + \dfrac{3x}{x^2-7x+6} = 6$

b) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+4\sqrt{xy}=16 \\ x+y=10 \end{cases}$

Câu 3 (2,0 điểm):

a) Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2+3ab-11b^2$ chia hết cho 5 thì a^4-b^4 chia hết cho 5.

b) Cho phương trình $ax^2+bx+1=0$ với a, b là các số hữu tỉ. Tìm a, b biết $x = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ là nghiệm của phương trình.

Câu 4 (3,0 điểm): Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không nằm trên đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

a) Chứng minh 4 điểm O, M, N, I cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

c) Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME.

Câu 5 (1,0 điểm):

Cho $A_n = \dfrac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n < 1$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 7

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2011 – 2012
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (2,5 điểm).

a) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{x^2-5x+6+3\sqrt{x^2-6x+8}}{3x-12+(x-3)\sqrt{x^2-6x+8}}$

b) Phân tích thành nhân tử: $a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3$

Tìm x biết: $\left(x^2+x+2\right)^3-\left(x+1\right)^3=x^6+1$

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ xy+3y^2+x=3 \end{cases}$

b) Giải phương trình: $\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^3-\left(x-3\right)^3=16$

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$8x^2+23y^2+16x-44y+16xy-1180=0.$$

b) Cho n là số nguyên dương và m là ước nguyên dương của $2n^2$. Chứng minh rằng n^2+m không là số chính phương.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho đường tròn (O;R) và AB là đường kính. Gọi d là đường trung trực của OB. Gọi M và N là hai điểm phân biệt thuộc đường thẳng d. Trên các tia OM, ON lấy lần lượt các điểm M′ và N′ sao cho OM′.OM = ON′.ON $=R^2$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, M′, N′ thuộc một đường tròn.

b) Khi điểm M chuyển động trên d, chứng minh rằng điểm M′ thuộc một đường tròn cố định.

c) Tìm vị trí điểm M trên d để tổng MO + MA đạt giá trị nhỏ nhất.

Tìm vị trí điểm M trên d nhưng M không nằm trong đường tròn (O;R) để tổng MO + MA đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5 (0,5 điểm). Trong các hình bình hành ngoại tiếp đường tròn (O; r), hãy tìm hình bình hành có diện tích nhỏ nhất.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH**
TỈNH HẢI DƯƠNG	LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2010– 2011
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**MÔN THI: TOÁN**
	Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề
Đề số 8	
(Đề thi có một trang)	

Câu 1 (1,5 điểm). Phân tích đa thức $4(1+x)(1+y)(1+x+y)-3x^2y^2$ thành nhân tử

Câu 2 (2,5 điểm).

a) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+7x+10}+\sqrt{2x^2+x+4}=3(x+1)$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{4x^4}{1+4x^2}=y \\ \dfrac{4y^4}{1+4y^2}=z \\ \dfrac{4x^4}{1+4z^2}=x \end{cases}$

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Tìm các số nguyên dương *x, y, z* thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau $\dfrac{x-y\sqrt{2011}}{y-z\sqrt{2011}}$ là số hữu tỉ và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $20y^2-6xy=150-15x$.

Câu 4 (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có trung tuyến CM. Các đường cao AH, BD, CF cắt nhau tại I. Gọi E là trung điểm của DH. Đường thẳng qua C và song song với AH cắt BD tại P, đường thẳng qua C và song song với BD cắt AH tại Q.

a) Chứng minh PI.AB = AC.CI

b) Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác CDH. Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) CE cắt đường tròn ngoài tiếp tam giác ABC tại R (R khác C); CM cắt đường tròn (O) tại K (K khác C). Chứng minh AB là đường trung trực của đoạn KR.

Câu 5 (1,0 điểm)

a) Chứng minh $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{xy}}$, $\forall x,y$ thỏa mãn $xy\ge 1$

b) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $\dfrac{1}{2}\le a,b,c\le 2$. Chứng minh

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge\frac{22}{15}.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 9

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2009– 2010
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (2 điểm)

a) Cho x là số thực thỏa mãn $x^2 - 4x + 1 = 0$

Tính giá trị biểu thức: $A = x^5 + \dfrac{1}{x^5}$

b) Cho x; y; z là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} xyz = 2 \\ 2 + x + xy \neq 0 \end{cases}$

Tính giá trị biểu thức: $B = \dfrac{1}{1+y+yz} + \dfrac{2}{2+2z+xz} + \dfrac{2}{2+x+xy}$

Câu 2 (2,5 điểm)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (y^2 - 4y)(2y - x) = 2 \\ y^2 - 2y - x = 3 \end{cases}$

b) Giải phương trình $x^2 - 2x = 2\sqrt{2x-1}$

Câu 3 (1,5 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương n để $A = 2^9 + 2^{13} + 2^n$ là số chính phương.

Câu 4 (3 điểm) Cho đường tròn tâm O và dây AB cố định (O không thuộc AB). P là điểm di động trên đoạn AB (P khác A, B). Qua A, P vẽ đường tròn tâm C tiếp xúc với (O) tại A. Qua B, P vẽ đường tròn tâm D tiếp xúc với (O) tại B. Hai đường tròn (C) và (D) cắt nhau tại N (khác P).

a) Chứng minh: $ANP = BNP$

b) Chứng minh: $PNO = 90^\circ$

c) Chứng minh khi P di động thì N luôn nằm trên một cung tròn cố định.

Câu 5 (1 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$A = \dfrac{(x+y+1)^2}{xy+y+x} + \dfrac{xy+y+x}{(x+y+1)^2}$ (Với x; y là các số thực dương).

____________**Hết**____________

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 10
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2008– 2009
MÔN THI: TOÁN (Đề 3)
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (2,0 điểm)

1)Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

2)Rút gọn biểu thức sau : $A=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{5}$

Câu 2 (2,0 điểm)

1)Chứng minh rằng nếu phương trình : $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ có nghiệm

thì : $a^2+(b-2)^2-3>0$

2)Tìm giá trị của m để hệ phương trình :

$\begin{cases} mx^2+|x|-y=1-m \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ Có nghiệm duy nhất

Câu 3 (2,0 điểm)

1)Tìm các số nguyên dương a,b,c thoả mãn đồng thời các điều kiện :

$\sqrt{a-b+c}=\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$

2)Trên tờ giấy kẻ vô hạn các ô vuông và được tô bởi các màu đỏ hoặc xanh thoả mãn bất cứ hình chữ nhật nào kích thước 2x3 thì có đúng hai ô màu đỏ.Hỏi hình chữ nhật có kích thước 2010x2011 có bao nhiêu ô màu đỏ .

Câu4 (3,0 điểm)

1) Cho hình thoi ABCD cạnh a , gọi R và r lần lượt là các bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ABC.

a) Chứng minh : $\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{4}{a^2}$

b) Chứng minh : $S_{ABCD}=\frac{8R^3r^3}{(R^2+r^2)^2}$; (Kí hiệu S_{ABCD} là diện tích tứ giác ABCD)

2) Cho tam giác ABC cân tại A có $BAC=108^0$ .Chứng minh : $\frac{BC}{AC}$ là số vô tỉ.

Câu 5 (1,0 điểm) Cho $f(x)=ax^2+bx+c$ thoả mãn với mọi x sao cho $-1\le x\le 1$ và $|f(x)|\le p$. Tìm số q nhỏ nhất sao cho $|a|+|b|+|c|\le p.q$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 11
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2008– 2009
MÔN THI: TOÁN (Đề 2)
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: (1,5 điểm) Cho biểu thức A = $\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x\rangle 0, x\neq 1$

1) Rút gọn biểu thức A.
2) Chứng minh rằng $0 < A < 2$.

Câu 2: (2 điểm)

1) Cho các số dương a,b,c thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq 1.$$

2) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x(2008+\sqrt{2010-x^2})$

Câu 3: (2 điểm)

1) Giải phương trình: $\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{x}}}+\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\sqrt{2}$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2y^2-4y+3=0 & (1) \\ x^2+x^2y^2-2y=0 & (2) \end{cases}$

Câu 4 (3 điểm): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O;R) . Điểm M thuộc cung nhỏ BC. gọi I,K,H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên AB; AC; BC. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB; HK.

1) Chứng minh MQ ⊥ PQ.

2) Chứng minh : $\dfrac{AB}{MI}+\dfrac{AC}{MK}=\dfrac{BC}{MH}$

3) Cho tam giác ABC đều. Xác định vị trí của điểm M trên cung BC để MA + MB + MC đạt giá trị lớn nhất

Câu 5: Trên một đường tròn ta lấy 1000 điểm rồi đánh số theo thứ tự cùng chiều từ 1 đến 1000. Bắt đầu từ số 1 cứ 15 số ta gạch đI một số, tức là xoá các số 1,16, 31….. Tiếp tục quá trình này qua một số vòng cho đến khi số 1 bị xóa lần thứ 2. Hỏi trước lúc đó còn lại bao nhiêu số không bị xoá ?

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 12

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH

LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2008– 2009

MÔN THI: TOÁN (Đề 1)

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: (2,0 điểm) Cho biểu thức: $A = \dfrac{x\sqrt{x} - 4x - \sqrt{x} + 4}{2x\sqrt{x} - 14x + 28\sqrt{x} - 16}$

1) Tìm x để A có nghĩa, từ đó rút gọn biểu thức A.
2) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 2: (1,0 điểm) Cho a > 0; b > 0 và $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}$

Câu 3:(2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{x+1} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x}} - 1 = 0$

2) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + y + xy = 3 + 2\sqrt{3} \\ x^4 + y^4 = 18 \end{cases}$

Câu 4: (1,0 điểm) Cho hàm số f(x) = ax² + bx + c thoả mãn điều kiện $|f(-1)| \le 1$, $|f(0)| \le 1$ và $|f(1)| \le 1$. Chứng minh rằng: $|f(x)| \le \dfrac{5}{4}$ khi $|x| \le 1$

Câu 5 :(3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD,BE,CF. Lấy điểm M bất kì thuộc DF, kẻ MN song song với BC (N thuộc DE). Lấy điểm I trên đường thẳng DE sao cho $MAI = BAC$. Chứng minh rằng

a) Δ AMN là tam giác cân

b) AMNI là tứ giác nội tiếp

c) MA là phân giác của FMI

Câu 6:(1,0 điểm) Trong một kì thi có ba môn: Văn, Toán, Sử và điểm cho thang điểm 10 bậc bằng các số nguyên. Điểm Văn nhân với 3, điểm Toán nhân với 2, điểm sử nhân với 1. Ba giám khảoVăn, Toán, Sử cùng chép điểm của một thí sinh rồi cộng lại. Nhưng do vô ý, ông nào cũng chép điểm của hai ông kia và cung lẫn lộn điểm của người này ra người khác. Vì thế khi cộng xong giám khảo văn bảo thí sinh vừa đủ điểm đậu(tức 6x5=30điểm). Hai giám khảo kia thì bảo hỏng và đối chiếu số điểm thấy bằng nhau. Hỏi thật sự thí sinh ấy đậu hay hỏng thi?

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 13

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2006– 2007
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}(a-1)x-by=2a-b-2\\(c+4)x+cy=12b-4a+44\end{cases}$$

Tìm các số a, b, c để hệ phương trình có vô số nghiệm, trong đó có nghiệm $x=1$ và $y=3$.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

Tìm các số thực x để biểu thức $\sqrt[3]{3+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{x}}$ là số nguyên.

Câu 3 ***(3,0 điểm)***

1) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên *n* ($n\in\ \mathbb{N}^{\bullet}$) phương trình:

$$x^2+2(n-1)(n+1)x+1-6n^3-13n^2-6n=0$$

không có nghiệm hữu tỉ.

2) Tìm các số hữu tỉ a và b thoả mãn đẳng thức:

$$\sqrt{a\sqrt{7}}-\sqrt{b\sqrt{7}}=\sqrt{11\sqrt{7}-28}$$

Câu 4 ***(3,0 điểm)***

Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn tâm (O). Gọi CD là đường kính của đường tròn, qua D kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt đường thẳng AB tại E, nối E với O cắt cạnh BC, cạnh CA tại M và N.

1) Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh bốn điểm O, D, E, I nằm trên một đường tròn;
2) Chứng minh O là trung điểm của MN.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 14

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2005– 2006
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1 (2,0 điểm)

Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{a^3-5a+(a^2-1)\sqrt{a^2-9}+a^2+3}{a^3-5a+(a^2-1)\sqrt{a^2-9}-a^2-3}$

Bài 2 (1,5 điểm) Chứng minh rằng $\sin 18^0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

Bài 3 (3,5 điểm)

1) Cho phương trình $3x^2-(2p-1)x+p^2-6p+11=0$ (p là tham số)

Tìm các số hữu tỉ p để phương trình có ít nhất một nghiệm nguyên.

2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(\sqrt{x}-2y)(1-\dfrac{1}{2y\sqrt{x}})=3\\(x+4y^2)(1+\dfrac{1}{4xy^2})=25\end{cases}$$

Bài 4 (3,0 điểm) Cho hai đường tròn (O_1) , (O_2) cắt nhau tại A, B.

1) Một điểm M trên (O_1), qua M kẻ tiếp tuyến MD với đường tròn (O_2)

(D là tiếp điểm). Chứng minh rằng biểu thức $\dfrac{MD^2}{MA.MB}$ không phụ thuộc vào vị trí của M trên (O_1).

2) Kéo dài AB về phía B lấy điểm C, từ C kẻ hai tiếp tuyến CE và CF với đường tròn (O_1) (E, F là các tiếp điểm và F cùng phía với (O_2) bờ AB) đường thẳng BE và BF cắt đường tròn (O_2) tại P và Q, gọi I là trung điểm của PQ.

Chứng minh ba điểm E, F, I thẳng hàng.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2004– 2005
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 15
(Đề thi có một trang)

Bài 1(3, 5 điểm)

1) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2004x + 1 = 0$ và x_3, x_4 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2005x + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)$

2) Cho a, b, c, d là các số thực và $a^2 + b^2 < 1$. Chứng minh phương trình $(a^2 + b^2-1)x^2 - 2(ac + bd -1)x + c^2+ d^2- 1 = 0$ luôn có nghiệm.

Bài 2 (1, 5 điểm)

Cho hai số tự nhiên m và n thoả mãn $\frac{m+1}{n}+\frac{n+1}{m}$ là số nguyên.

Chứng minh ước chung lớn nhất của m và n không lớn hơn $\sqrt{m+n}$

Bài 3 (3, 0 điểm)

Cho hai đường tròn (O_1)và (O_2) cắt nhau tại A và B, tiếp tuyến chung với hai đường tròn gần B có tiếp điểm là C và D, C $\in(O_1)$ và D $\in(O_2)$. Qua A kẻ đường thẳng song song với CD cắt đường tròn (O_1) tại M, và cắt đường tròn (O_2) tại N. Đường thẳng BC, BD cắt đường thẳng MN tại P và Q, đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E. Chứng minh:

1) Đường thẳng AE vuông góc với đường thẳng CD;
2) Tam giác EPQ là tam giác cân.

((O_1) là kí hiệu đường tròn tâm O_1)

Bài 4 (2, 0 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=1 \\ x^5+y^5=11 \end{cases}$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 15

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH

LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2003– 2004

MÔN THI: TOÁN

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1 : *(2,5 điểm)*

Giải phương trình :

$|xy - x - y + a| + |x^2y^2 + x^2y + xy^2 + xy - 4b| = 0$

$$a = \left(\sqrt{57} + 3\sqrt{6} + \sqrt{38} + 6\right)\left(\sqrt{57} - 3\sqrt{6} - \sqrt{38} + 6\right)$$

$$b = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$$

Bài 2 : *(2,5 điểm)*

Hai phương trình : $x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$; $x^2 + (b + 1)x + c = 0$ có nghiệm chung, đồng thời hai phương trình : $x^2 + x + a - 1 = 0$ và $x^2 + cx + b + 1 = 0$ cũng có nghiệm chung.

Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{2004a}{b+c}$

Bài 3 : *(3,0 điểm)*

Cho hai đường tròn tâm O_1 và tâm O_2 cắt nhau tại A, B. Đường thẳng O_1A cắt đường tròn tâm O_2 tại D, đường thẳng O_2A cắt đường tròn tâm O_1 tại C.

Qua A kẻ đường thẳng song song với CD cắt đường tròn tâm O_1 tại M và cắt đường tròn tâm O_2 tại N.

Chứng minh rằng :

1) Năm điểm B ; C ; D ; O1 ; O2 nằm trên một đường tròn.

2) BC + BD = MN.

Bài 4 : *(2,0 điểm)* Tìm các số thực x và y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 3$ và $x + y$ là một số nguyên.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đề số 1

Câu 1: *(2,0 điểm)*

a) Ta có $xyz=9\Rightarrow P=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{xyz}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\dfrac{\sqrt{xyz}\sqrt{z}}{\sqrt{zx}+\sqrt{xyz}\sqrt{z}+\sqrt{xyz}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{y}+1+\sqrt{yz}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\frac{\sqrt{yz}}{1+\sqrt{yz}+\sqrt{y}}=1\Rightarrow\sqrt{10P-1}=3.$$

b) Ta có $x+y+z+\sqrt{xyz}=4\Rightarrow 4x+4y+4z+4\sqrt{xyz}=16$.

Do đó

$$\sqrt{x(4-y)(4-z)}=\sqrt{x(16-4y-4z+yz)}=\sqrt{x\left(4x+4\sqrt{xyz}+yz\right)}=\sqrt{x\left(2\sqrt{x}+\sqrt{yz}\right)^2}$$

$$=\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+\sqrt{yz}\right).$$

Tương tự ta có $\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-z)(4-x)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}$

$$=\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+\sqrt{yz}\right)+\sqrt{y}\left(2\sqrt{y}+\sqrt{zx}\right)+\sqrt{z}\left(2\sqrt{z}+\sqrt{xy}\right)=2(x+y+z)+3\sqrt{xyz}$$

$$=2\left(4-\sqrt{xyz}\right)+3\sqrt{xyz}=8+\sqrt{xyz}$$ (đpcm).

Câu 2: *(2,0 điểm)*

a) ĐKXĐ: $x\neq -2$.

Phương trình đã cho tương đương $x^2+3\left(x^2+4x+4\right)=\left(3x^2-6x\right)\left(x^2+4x+4\right)$

$$\Leftrightarrow 3x^4+6x^3-16x^2-36x-12=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-6\right)\left(3x^2+6x+2\right)=0$$

Xét phương trình $x^2-6=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}$.

Xét phương trình $3x^2+6x+2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\pm\sqrt{6};\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{3}\right\}$.

b) Từ phương trình $x^2+y^2+xy+1=2x\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2xy+2=4x$.

Khi đó ta có $2x^2+x(x+y)^2+x-2+2xy+2=4x\Leftrightarrow x\left[(x+y)^2+2(x+y)-3\right]=0$

$$\Leftrightarrow x(x+y-1)(x+y+3)=0.$$

Xét $x=0$ thế vào phương trình $x^2+y^2+xy+1=2x$ ta được $y^2+1=0$. Phương trình vô nghiệm.

Xét $x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x$ thế vào phương trình $x^2+y^2+xy+1=2x$ ta được $x^2-3x+2=0$

$\Rightarrow x=1$ hoặc $x=2$.

- Với $x=1 \Rightarrow y=0$.
- Với $x=2 \Rightarrow y=-1$.

Xét $x+y+3=0 \Leftrightarrow y=-x-3$ thế vào phương trình $x^2+y^2+xy+1=2x$ ta được $x^2+x+10=0$. Phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $S=\{(1;0);(2;-1)\}$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

a) Ta có $x^2+x+2y^2+y=2xy^2+xy+3 \Leftrightarrow x^2-x+2x-2+2y^2-2xy^2+y-xy=1$

$$\Leftrightarrow (1-x)\left(2y^2+y-x-2\right)=1.$$

Ta xét các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} 1-x=-1 \\ 2y^2+y-x-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2y^2+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$. Chọn nghiệm $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

TH2: $\begin{cases} 1-x=1 \\ 2y^2+y-x-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y^2+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ (loại).

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương $(x;y)=(2;1)$.

b) Vì $2019^{2018} \vdots 3$ nên $\left(a_1+a_2+...+a_n\right) \vdots 3$. Xét hiệu:

$\left(a_1^3+a_2^3+...+a_n^3\right)-\left(a_1+a_2+...+a_n\right)=\left(a_1-1\right)a_1\left(a_1+1\right)+\left(a_2-1\right)a_2\left(a_2+1\right)+...+\left(a_n-1\right)a_n\left(a_n+1\right)$ chia hết cho 3. Do đó $a_1^3+a_2^3+a_3^3+...+a_n^3$ chia hết cho 3 (đpcm).

Câu 4: *(3,0 điểm)*

a) Kẻ đường kính MK.

Ta có $MPK=MNK=90^0$ hay $KP \perp MP$ và $KN \perp MN$. Suy ra $KP // NH$ và $KN // PH$ nên tứ giác $KPHN$ là hình bình hành. Suy ra H,Q,K thẳng hàng.

Xét ΔKMH có $OM=OK$, $OH=QK$ nên OQ là đường trung bình của ΔKMH.

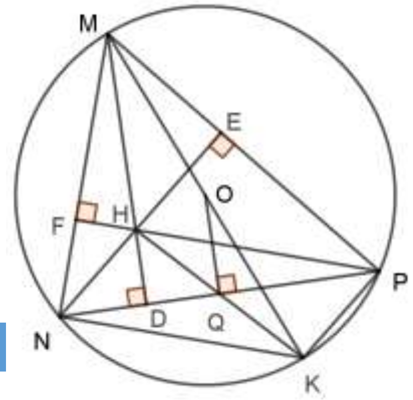
Suy ra $MH=2OQ$ (đpcm).

b) Ta có $\sin MNP=\sin MKP=\dfrac{MP}{MK}=\dfrac{MP}{2R} \Rightarrow 2R=\dfrac{MP}{\sin MNP}$.

Tương tự ta cũng có $2R=\dfrac{MN}{\sin MPN}$ và $2R=\dfrac{NP}{\sin NMP}$.

Do đó $\dfrac{MN}{\sin MPN}=\dfrac{MP}{\sin MNP}=\dfrac{NP}{\sin NMP}=\dfrac{MN+MP}{\sin MPN+\sin MNP}$

$=\dfrac{2NP}{\sin MPN+\sin MNP}$



$\Rightarrow \sin MPN + \sin MNP = 2\sin NMP$ (đpcm).

c) Ta có $NP = R\sqrt{2} \Rightarrow NQ = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng định lí Pitago ta có $OQ = \sqrt{NO^2 - NQ^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{2}} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = NQ$.

Khi đó ΔNOQ vuông cân tại Q $\Rightarrow NOQ = 45° \Rightarrow NOP = 90° \Rightarrow NMP = 45°$

$\Rightarrow NHF = PHE = 45°$. Do đó các tam giác NHF và PHE vuông cân. Suy ra $NH = \sqrt{2}FH$ và $PH = \sqrt{2}HE$.

Theo câu a) $MH = 2OQ = R\sqrt{2}$.

Mặt khác $\Delta NDH \backsim \Delta MEH \Rightarrow \dfrac{ND}{ME} = \dfrac{NH}{MH} = \dfrac{\sqrt{2}FH}{R\sqrt{2}} = \dfrac{FH}{R} \Rightarrow ME.FH = R.ND$.

Tương tự $\Delta PDH \backsim \Delta MFH \Rightarrow MF.HE = R.PD$.

Suy ra $ME.FH + MF.HE = R.(ND + PD) = R.NP = \sqrt{2}R^2$ (đpcm).

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Từ giả thiết $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{1}{ab} = 3 \Rightarrow a + b + c = 3abc$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$P = \frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{a+b}.\frac{bc^2}{b+c}.\frac{ca^2}{c+a}} = \frac{3abc}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Lại có $\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \dfrac{a+b+b+c+c+a}{3} = \dfrac{2(a+b+c)}{3} = 2abc$.

Suy ra $P \geq \dfrac{3}{2}$.

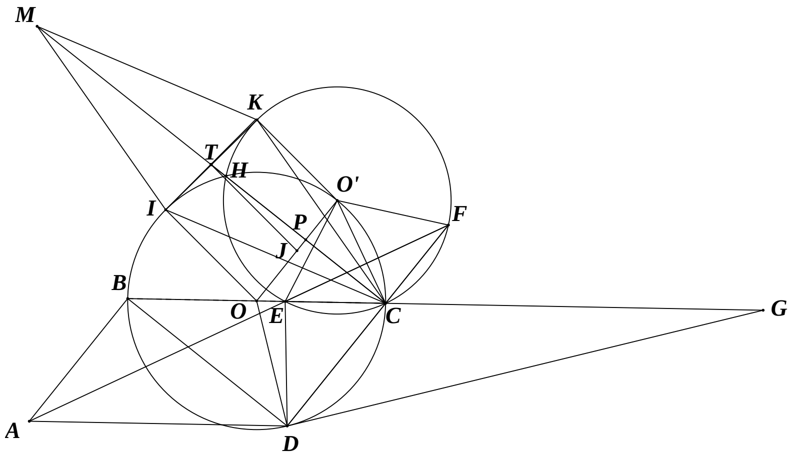
Vậy GTNN của P là $\dfrac{3}{2}$, đạt được khi $a = b = c = 1$.

Đề số 2

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

CÂU	Ý	Nội dung	Điểm
1	a	Ta có $A = \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \dfrac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) + \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = 2x.$	0,5
		Do đó $B = 1 - \sqrt{2A - 4\sqrt{x} + 1} = 1 - \lvert 2\sqrt{x} - 1 \rvert = 1 - (1 - 2\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}.$	0,5
	b	Từ giả thiết $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0 \Rightarrow xy + yz + zx = 0$	0,25
		$\Rightarrow x^2 + 2yz = x^2 + yz - xy - zx = (x - y)(x - z)$	0,25

		Tương tự: $y^2+2zx=(y-x)(y-z);z^2+2xy=(z-x)(z-y)$ $\dfrac{1}{x^2+2yz}+\dfrac{1}{y^2+2zx}+\dfrac{1}{z^2+2xy}=\dfrac{1}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{1}{(z-x)(z-y)}$ $=\dfrac{y-x+x-z+z-y}{(x-y)(x-z)(y-z)}=0$ Suy ra đpcm	0,5
2	a	$\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x-10}\right)=7$ ĐKXĐ: $x\ge 2$ Đặt $\sqrt{x+5}=a>0;\sqrt{x-2}=b\ge 0\Rightarrow a^2-b^2=7.$ Ta có phương trình $(a-b)(1+ab)=a^2-b^2\Leftrightarrow(a-b)(a-1)(b-1)=0$ Do $a\ne b$ nên +) $a=1\Rightarrow\sqrt{x+5}=1\Rightarrow x=-4(ktm)$ +) $b=1\Rightarrow\sqrt{x-2}=1\Rightarrow x=3(tm)$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$	0,25 0,25 0,25 0,25
	b	Từ $x^3=x+y\Rightarrow 2x^3=2(x+y)\Rightarrow 2x^3=(x^2+y^2-xy)(x+y)$ $2x^3=x^3+y^3\Rightarrow x^3=y^3\Rightarrow x=y$ Thế vào phương trình $x^2+y^2-xy=2\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$ Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x,y)=\left\{\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\right\}$	
3	a	Tìm các số thực x sao cho $x+\sqrt{2018}$ và $\dfrac{7}{x}-\sqrt{2018}$ đều là số nguyên. ĐKXĐ: $x\ne 0$ Đặt $a=x+\sqrt{2018};\ b=\dfrac{7}{x}-\sqrt{2018}\ (a,b\in\mathbb{Z})$ $\Rightarrow b=\dfrac{7}{a-\sqrt{2018}}-\sqrt{2018}\Leftrightarrow ab-2025=(b-a)\sqrt{2018}$ Nếu $a\ne b$ thì vế phải là số vô tỉ còn vế trái là số nguyên, vô lí. Nếu $a\ne b\Rightarrow ab-2025=0\Rightarrow a=b=\pm 45$ Với $a=45\Rightarrow x=\dfrac{7}{45+\sqrt{2018}}=45-\sqrt{2018}$ Với $a=-45\Rightarrow x=\dfrac{7}{-45+\sqrt{2018}}=-45-\sqrt{2018}$	
	b	Ta có $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2=(10a+b)^2-(10b+a)^2=99(a^2-b^2)$ Vì $3267=99.33$ Nên $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2\ \vdots\ 3267\Rightarrow a^2-b^2\ \vdots\ 33$ hay $(a-b)(a+b)$ chia hết cho 3 và 11. Nếu $a=b$ thỏa mãn yêu cầu bài toán Nếu $a\ne b$ vì $1\le a;b\le 9$ nên ta được hai số 47 và 74. Vậy các số cần tìm là 11; 22; 33; 44; 47; 55; 66; 74; 77; 88; 99.	

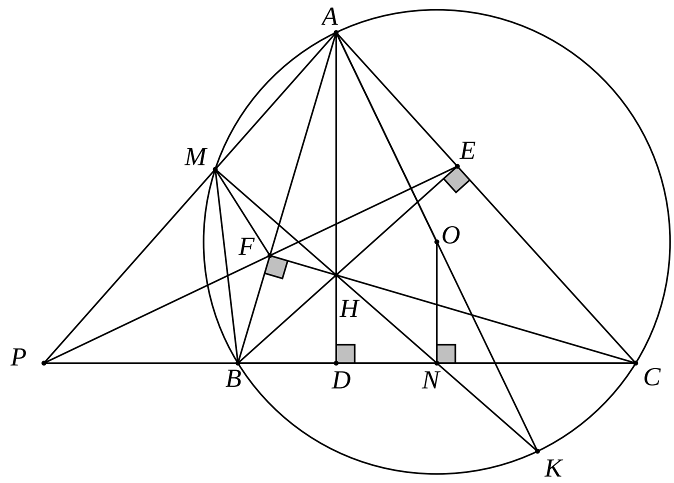
	b		
4	a	Ta có $BAE = DAE(gt); BAE = EFC; DAE = FEC \Rightarrow EFC = FEC \Rightarrow \Delta EFC$ cân tại C $\Rightarrow CE = CF$. Lại có $BEA = FEC \Rightarrow BEA = BAE \Rightarrow \Delta ABE$ cân tại $BA = CD \Rightarrow BE = CD$ mà $B \Rightarrow BA = BE$ Do đó $BC = DF\,(1)$ Mặt khác, $\Delta O'CF$ cân $O'CF = O'FC$ vì $CE = CF$ nên $O'CE = O'CF \Rightarrow O'CE = O'FC\,(2)$ Và $O'C = O'F\,(3)$ Từ (1) (2) (3) suy ra $\Delta BO'C = \Delta DO'F$ Do đó $O'BC = O'CF$ suy ra tứ giác $BDCO'$ nội tiếp đường tròn hay $O' \in (O)$.	
	b	Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông BCD và phương tích của đường tròn ta có: $\begin{cases} DG^2 = CG.BG \\ DE^2 = BE.CE \end{cases} \Rightarrow DG^2 - DE^2 = CG.BG - CG.BG \Rightarrow GE^2 = CG.BG - CG.BG$ $\Rightarrow (CE + CG)^2 = CG.BG - CG.BG \Leftrightarrow CE^2 + 2CE.CG + CG^2 = CG.BG - CG.BG$ $\Rightarrow CE^2 + CE.CG + BE.CE = CG.BG - CG^2 - CE.CG$ $\Leftrightarrow CE(CE + CG + BE) = CG.(BG - CG - CG) \Leftrightarrow CE.BG = CG.BE$	
	c)	Tia CH cắt IK tại N. Áp dụng phương tích của đường tròn ta có $NK^2 = NH.NC = NI^2 \Rightarrow NK = NI$ Mà $CIMK$ là hình bình hành, do đó M, N, H, C thẳng hàng. Gọi J là trung điểm của OO' thì NJ là đường trung bình của hình thang vuông $OIKO'$. Suy ra $OB + O'C = OI + O'K = 2NJ$. Gọi T là điểm đối xứng của H qua N, P là giao điểm của CH và OO'. Ta có $PH = PC,\ OO' \perp CH$ Suy ra $NJ > NP \Rightarrow 2NJ > 2NP = NH + PH + NP = NT + PC + NP = TC = HM$ Vậy $OB + O'C > HM$.	
5		Từ giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 \le 3xyz \Rightarrow \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} \le 3$	

		Áp dụng bất đẳng thức Cauchay ta có: $x^4+yz\ge 2x^2\sqrt{yz}\Rightarrow \frac{x^2}{x^4+yz}\le \frac{1}{2\sqrt{yz}}$ Tương tự ta có $P\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)$ Mặt khác $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$ $\Rightarrow P\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}.\frac{xy+yz+zx}{xyz}\le \frac{1}{2}.\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}\le \frac{3}{2}$ Vậy GTLN của $P=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=y=z=1.$	

Đề số 3

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1 **(2,0)**	a	$P=\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$ $\Rightarrow P^2=(1-x)\left(2+2\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}\right)=2(1-x)(1+\lvert x\rvert)$ Mà $P=\sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}\ge 0\Rightarrow P=\sqrt{2}(1-x)$ Với $x=-\frac{1}{2019}\Rightarrow P=\frac{2019}{2018}\sqrt{2}.$	1,0
	b	Đặt $x=\sqrt{a};y=\sqrt{b};z=\sqrt{c}\Rightarrow xy+yz+zx=1\Rightarrow a+1=(x+y)(x+z).$ Tương tự: $b+1=(y+x)(y+z);c+1=(z+x)(z+y)$ Khi đó ta có: $\frac{\sqrt{a}}{1+a}+\frac{\sqrt{b}}{1+b}+\frac{\sqrt{c}}{1+c}=\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$	1,0
2 **(2,0)**	a	$2x^2-2x+1=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)$ $\Leftrightarrow \left(x^2-x+2\right)+\left(x^2-x-1\right)=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)$ (1) Đặt $t=\sqrt{x^2-x+2}-1\Rightarrow x^2-x+2=(t+1)^2$ thay vào phương trình (1) ta được $(t-x)(t-x+1)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}t=x\\t=x+1\end{array}\right.$.	1,0

		Với $t=x \Rightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2-x-2=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$. Với $t=x-1 \Rightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2-x-2=x \end{cases} \Leftrightarrow x=2$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm Với $x=\dfrac{1}{3};x=2$.	
	b	$\begin{cases} x^2+(y+1)^2=xy+x+1 \\ 2x^3=x+y+1 \end{cases} \quad (I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y+1)^2-x(y+1)=1 \\ 2x^3=x+y+1 \end{cases} \quad (II)$ Đặt $t=y+1$ ta có hệ $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t^2-xt=1 \\ 2x^2=(x+t)(x^2+t^2-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t^2-xt=1 \\ x=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t=1 \\ x=t=-1 \end{cases}$. Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(1;0);(-1;-2)$.	1,0
3 **(2,0)**	**a**	Ta có $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7 \Leftrightarrow (x-2y)(2x-y+3)=-7$ Xét các trường hợp ta có $(x;y)=(3;2);(-5;-6);(-7;-4);(1;4)$.	1,0
	b	Do $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương nên $\sqrt{n^2+2n+18}$ là số tự nhiên. Đặt $\sqrt{n^2+2n+18}=k \quad (k\in\mathbb{N})$ $\Leftrightarrow n^2+2n+18=k^2 \Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1)=17$ Do k,n đều là số tự nhiên nên $k+n+1>k-n-1$ Xét $\begin{cases} k+n+1=17 \\ k-n-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=9 \\ n=7 \end{cases} \Rightarrow n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9=81=9^2\,(tm)$ Vậy $n=7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán	1,0

4 **(3,0)**	1		

a) Do BE, CF là các đường cao của tam giác ABC

nên $BFC = BEC = 90^0 \Rightarrow BFEC$ nội tiếp đường tròn$\Rightarrow PBF = PEC.$

Từ đó suy ra $\Delta PBF \# \Delta PEC(g-g) \Rightarrow \dfrac{PB}{PE} = \dfrac{PF}{PC} \Rightarrow PE.PF = PB.PC \quad (1)$

Tứ giác AMBC nội tiếp đường tròn $\Rightarrow PBM = PAC.$

Từ đó suy ra $\Delta PBM \# \Delta PAC(g-g) \Rightarrow \dfrac{PB}{PE} = \dfrac{PM}{PC} \Rightarrow PB.PC = PM.PA \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $PE.PF = PM.PA.$

Từ $PE.PF = PM.PA \Rightarrow \dfrac{PE}{PM} = \dfrac{PA}{PF}$

suy ra $\Delta PMF \# \Delta PEA(c-g-c) \Rightarrow PMF = PEA \Rightarrow AMFE$ nội tiếp (3)

Do $AEH = AFH = 90^0 \Rightarrow AEHF$ nội tiếp (4)

Từ (3) và (4) suy ra 5 điểm A, M, F, H, E cùng thuộc một đường tròn đường kính $AH \Rightarrow AMH = 90^0 \Rightarrow AM \perp HM.$

b) Kẻ đường kính AK của đường tròn $(O).$

Gọi N là trung điểm của cạnh $BC.$

Chứng minh được tứ giác BHCK là hình bình hành, có N là trung điểm của BC nên N là trung điểm của $HK.$

Suy ra ON là đường trung bình của tam giác $AHK \Rightarrow AH = 2ON.$

Ta có tam giác OBC cân tại O suy ra ON là đường trung tuyến, cũng đồng thời là đường cao, đường phân giác.

Khi đó $NOC = \frac{1}{2}BOC = \alpha$ không đổi (vì ba điểm O, B, C cố định)

Do đó $S_{BHC} = \frac{1}{2}BC.HD = \frac{1}{2}BC\left(AD - AH\right) \le \frac{1}{2}BC\left(AN - 2ON\right)$

$S_{BHC} \le \frac{1}{2}BC\left(AO + ON - 2ON\right) = \frac{1}{2}BC\left(AO - ON\right)$

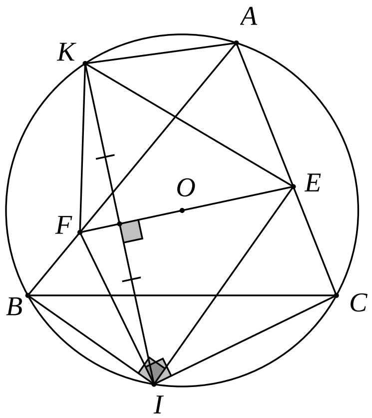
Mà $ON = \cos\alpha \Rightarrow S_{BHC} \le \frac{1}{2}BC\left(R - R\cos\alpha\right) = \frac{1}{2}BC.R\left(1 - \cos\alpha\right)$ không đổi.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow D \equiv N$ và ba điểm A, O, N thẳng hàng

Khi đó A là điểm chính giữa của cung lớn $BC.$

Vậy khi A là điểm chính giữa của cung lớn BC thì diện tích tam giác BHC đạt giá trị lớn nhất là $MaxS_{BHC} = \frac{1}{2}BC.R\left(1 - \cos\alpha\right)$

2



Gọi K là điểm đối xứng của I qua EF.

Xét trường hợp K trùng với điểm $A.$

Khi đó KI là dây cung của (O). Mà EF là đường trung trực của KI suy ra EF đi qua $O.$

Xét trường hợp điểm K không trùng với điểm $A.$

Ta có $CIF + BIE = 180^0 \Rightarrow EIF + BIC = 180^0 \quad (1)$

Lại có tứ giác $ABIC$ nội tiếp đường tròn (O) nên $BAC + BIC = 180^0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BAC = EIF \Rightarrow EAF = EIF$

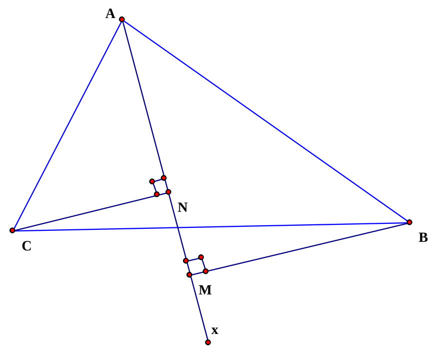
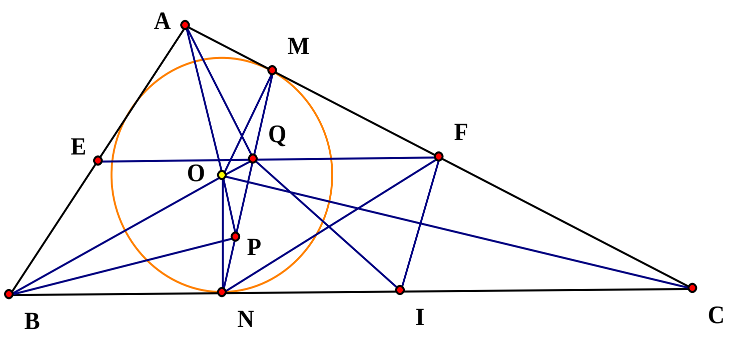
		Lại có $EIF = EKF \Rightarrow EAF = EKF \Rightarrow A, E, F, K$ cùng thuộc một đường tròn. Giả sử tứ giác $AEFK$ nội tiếp (h.vẽ)$\Rightarrow KAF = KEF \Rightarrow KAB = KEF \quad (3)$ Mà $IEF = KEF \quad (4)$ Mặt khác $IEF = BIK$ (cùng phụ với KIE). $\quad (5)$ Từ (3) ; (4) ; (5) suy ra $KAB = BIK \Rightarrow AKBI$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow K \in (O)$ Khi đó KI là dây cung của (O). Mà EF là đường trung trực của KI suy ra EF đi qua O. Vậy EF luôn đi qua điểm O cố định.	
5 **(1,0)**		Đặt $M = \dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}} + \dfrac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}} + \dfrac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}}$ Nhận thấy $6a^2+8ab+11b^2 = (2a+3b)^2 + 2(a-b)^2 \geq (2a+3b)^2$ $\Rightarrow \dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}} \leq \dfrac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b}$ Mà $\dfrac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b} \leq \dfrac{3a+2b}{5} \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ luôn đúng $\Rightarrow \dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}} \leq \dfrac{3a+2b}{5} \quad (1)$ Chứng minh tương tự: $\dfrac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}} \leq \dfrac{3b+2c}{5} \quad (2); \dfrac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}} \leq \dfrac{3c+2a}{5} \quad (3)$ Cộng theo vế của ba bất đẳng thức (1);(2);(3) ta được $M \leq \dfrac{3a+2b}{5} + \dfrac{3b+2c}{5} + \dfrac{3c+2a}{5} = a+b+c$ Mặt khác $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) = 9 \Rightarrow a+b+c \leq 3$ Suy ra $M = a+b+c \leq 3$. Dấu "="xảy ra $a=b=c=1$. Vậy $MaxM = 3 \Leftrightarrow a=b=c=1$.	1,0

Đề số 4

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	a	Cho $x=3-\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức $$A=x^5-8x^4+17x^3+6x^2-116x+104.$$	**1,00**
		Ta có: $x=3-\sqrt{5}\Leftrightarrow 3-x=\sqrt{5}\Rightarrow(3-x)^2=5\Rightarrow x^2-6x+4=0$	0,25
		$A=x^5-8x^4+17x^3+6x^2-116x+104$ $=(x^5-6x^4+4x^3)-2(x^4-6x^3+4x^2)+(x^3-6x^2+4x)+20(x^2-6x+4)+24$	0,25
		$A=x^3(x^2-6x+4)-2x^2(x^2-6x+4)+x(x^2-6x+4)+20(x^2-6x+4)+24$	0,25
		$A=24$	0,25
1	b	Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng: $$\sqrt{2\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)}=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$$	**1,00**
		Ta có: $2\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)=2\left[x^2+y^2-(x+y)\sqrt{x^2+y^2}+xy\right]$	0,25
		$=(x^2+y^2+2xy)-2(x+y)\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$ $=(x+y)^2-2(x+y)\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2=\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$ (*)	0,25
		Do $x>0$, $y>0$ nên $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy>x^2+y^2$ Suy ra : $x+y>\sqrt{x^2+y^2}$	0,25
		Khai căn hai vế đẳng thức (*) ta được điều phải chứng minh.	0,25
2	a	Giải phương trình: $x^2-20x+24+8.\sqrt{3(x-1)}=0$ (1)	**1,00**
		Điều kiện: $x\geq 1$ Ta có: (1) $\Leftrightarrow(x^2-8x+16)-(12x-12-8\sqrt{3x-3}+4)=0$ $\Leftrightarrow(x-4)^2=(2\sqrt{3x-3}-2)^2$	0,25

		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=2\sqrt{3x-3}-2 \\ x-4=2-2\sqrt{3x-3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sqrt{3x-3}=x-2 & (2) \\ 2\sqrt{3x-3}=6-x & (3) \end{array}\right.$	0,25
		Giải (2): $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4(3x-3)=x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-16x+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=8+4\sqrt{3}$	0,25
		Giải (3): $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x^2-24x+48=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=12-4\sqrt{6}$ KL: Phương trình (1) có nghiệm: $x=8+4\sqrt{3}$ và $x=12-4\sqrt{6}$	0,25
2	b	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+4y^2+3=4x & (1) \\ x^3+12x+8y^3=6x^2+9 & (2) \end{cases}$.	**1,00**
		Ta có: (1) $\Leftrightarrow 9=12x-3x^2-12y^2$, thế vào phương trình (2) và thu gọn ta được: $x^3+8y^3=3(x^2-4y^2) \Leftrightarrow (x+2y)(x^2-2xy+4y^2-3x+6y)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y=0 \\ x^2-2xy+4y^2-3x+6y=0 \end{array}\right.$.	0,25
		*) TH1: $x+2y=0 \Leftrightarrow y=\frac{-x}{2}$, thế vào phương trình (1) ta được $2x^2+3=4x \Leftrightarrow 2x^2-4x+3=0$, phương trình vô nghiệm.	0,25
		*) TH2: $x^2-2xy+4y^2-3x+6y=0$, trừ vế theo vế của phương này với phương trình (1) ta được: $-2xy-3x+6y-3=-4x \Leftrightarrow 2xy-x-6y+3=0 \Leftrightarrow (x-3)(2y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right.$	0,25
		+ Nếu x =3 thay vào phương trình (1) ta được: $4y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$, cặp (x;y) = (3;0) thoả mãn phương trình (2). + Nếu $y=\frac{1}{2}$, thay vào phương trình (1) ta được: $(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, cặp (x;y) = $\left(2;\frac{1}{2}\right)$ thoả mãn phương trình (2). Vậy nghiệm của hệ đã cho là (x; y) = (3;0) và (x;y) = (2; 1).	0,25

3	a	Tìm các số nguyên *x*, *y* thoả mãn: $5x^2+5y^2+6xy-20x-20y+24=0$ (*)	**1,00**
		Ta có: (*) $\Leftrightarrow 5(x+y)^2-4xy-20(x+y)+24=0$. Đặt x + y = a, xy = b thu được: $5a^2-4b-20a+24=0 \Rightarrow b=\dfrac{5a^2-20a+24}{4}$ (1)	0,25
		Mặt khác: $(x-y)^2\ge 0 \Rightarrow (x+y)^2-4xy\ge 0 \Rightarrow a^2\ge 4b$ hay $b\le \dfrac{a^2}{4}$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) được: $\dfrac{5a^2-20a+24}{4}\le \dfrac{a^2}{4} \Leftrightarrow a^2-5a+6\le 0 \Leftrightarrow (a-2)(a-3)\le 0 \Leftrightarrow 2\le a\le 3$	0,25
		Vì *a* nguyên nên *a* = 2 hoặc *a* = 3. +) Với a = 2 $\Rightarrow$ b = 1 ta có: $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$. +) Với a =3 $\Rightarrow$ $b=\dfrac{9}{4}$ (loại) Vậy x = 1, y = 1 thoả mãn yêu cầu.	0,25
3	b	Tìm tất cả các số nguyên dương *n* sao cho n^4+n^3+1 là số chính phương.	**1,00**
		Đặt $A = n^4+n^3+1$ +) Nếu n = 1 thì A = 3, không là số chính phương. +) Nếu n = 2 thì A = 25, là số chính phương.	0,25
		+) Nếu n > 2 ta có: $4A=4n^4+4n^3+4=(2n^2+n)^2+4-n^2<(2n^2+n)^2$	0,25
		$4A=4n^4+4n^3+4>4n^4+4n^3+4+n^2-8n^2-4n=(2n^2+n-2)^2$ $\Rightarrow (2n^2+n-2)^2<4A<(2n^2+n)^2$	0,25
		Vì A là số chính phương nên 4A cũng là số chính phương. Do đó ta được 4A = $(2n^2+n-1)^2 \Leftrightarrow 4n^4+4n^3+4=(2n^2+n-1)^2 \Leftrightarrow 3n^2+2n+3=0$,	0,25

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">vô nghiệm. Vậy n = 2 là số cần tìm duy nhất.</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td colspan="2">Cho tam giác ABC có: $AB = c,\ AC = b,\ BC = a.$
Chứng minh rằng: $\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.</td><td>1,00</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Kẻ Ax là tia phân giác của góc BAC
kẻ $BM \perp Ax$ tại M, $CN \perp Ax$ tại N.
Từ hai tam giác vuông AMB và ANC có:
$\sin MAB = \sin\frac{A}{2} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow BM = c.\sin\frac{A}{2}$</td><td>
</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">và $\sin NAC = \sin\frac{A}{2} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow NC = b.\sin\frac{A}{2}$, do đó: $BM + NC = (b+c).\sin\frac{A}{2}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Ta luôn có: $BM + NC \le BC = a \Rightarrow (b+c).\sin\frac{A}{2} \le a \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{b+c}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Do $b+c \ge 2\sqrt{bc}$ nên $\frac{1}{b+c} \le \frac{1}{2\sqrt{bc}}$, do đó: $\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}$ (Dấu đẳng thức xảy ra khi b = c).</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td colspan="2">a) Chứng minh rằng: $\frac{MP}{a} = \frac{NQ}{b} = \frac{PQ}{c}$.</td><td>1,00</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Hình vẽ:

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Ta có (O) nội tiếp tam giác ABC nên AO và BO là phân giác</td><td></td></tr>
</table>

		$\Rightarrow BOP = \frac{1}{2}\left(BAC + ABC\right)$; CM = CN $\Rightarrow \Delta CMN$ cân tại C. $\Rightarrow BNP = 180^0 - MNC = 180^0 - \frac{180^0 - ACB}{2} = 180^0 - \frac{BAC + ABC}{2}$ $\Rightarrow BOP + BNP = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác BOPN nội tiếp.	0,25
		$\Rightarrow OBN = OPM$ (cùng bù với OPN) hay $OBC = OPM$ (1) Mặt khác: $OMC = ONC = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác OMCN nội tiếp $\Rightarrow OMN = OCN$ hay $OMP = OCB$ (2). Từ (1) và (2) ta được hai tam giác OBC và OPM đồng dạng. $\Rightarrow \frac{PM}{BC} = \frac{OP}{OB} = \frac{OM}{OC}$.	0,25
		Chứng minh tương tự ta được: +) Hai tam giác OQN và OAC đồng dạng $\Rightarrow \frac{QN}{AC} = \frac{ON}{AC} \Rightarrow \frac{QN}{AC} = \frac{OM}{OC}$ (do OM = ON) +) Hai tam giác OPQ và OBA đồng dạng $\Rightarrow \frac{PQ}{BA} = \frac{OP}{OB}$	0,25
		Vậy ta được: $\frac{PM}{BC} = \frac{QN}{AC} = \frac{PQ}{AB} \Leftrightarrow \frac{MP}{a} = \frac{NQ}{b} = \frac{PQ}{c}$ (đpcm)	0,25
4	2	b) Trên đoạn thẳng *NC* lấy điểm *I* sao cho *MF* = *NI*. Chứng minh *IQ* đi qua trung điểm của *NF*.	**1,00**
		Ta có tứ giác AOQM nội tiếp $\Rightarrow AMO = AQO \Rightarrow AQO = 90^0 \Rightarrow \Delta AQB$ vuông tại Q $\Rightarrow QE = BE = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta BEQ$ cân tại E $\Rightarrow EQB = EBQ \Rightarrow EQB = QBC$ (do $QBC = EBQ$) $\Rightarrow EQ//BC$	0,25
		Mặt khác: E, F lần lượt là trung điểm của AB và AC $\Rightarrow EF//BC$ $\Rightarrow E, Q, F$ thẳng hàng $\Rightarrow QF//NI$ (1)	0,25

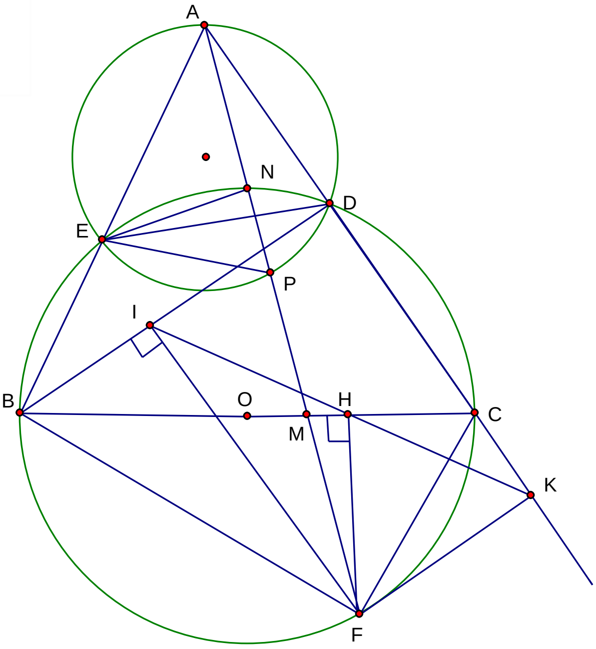
		Lại có: CM =CN, MF = NI (gt) $\Rightarrow \dfrac{MF}{CM}=\dfrac{NI}{CN}\Rightarrow FI//MN\Rightarrow FI//NQ$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) ta được tứ giác FINQ là hình bình hành, do đó IQ đi qua trung điểm của NF.	0,25
5		Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $$P=\sqrt{\frac{x}{y+z+2x}}+\sqrt{\frac{y}{z+x+2y}}+\sqrt{\frac{z}{x+y+2z}}.$$	**1,00**
		Chứng minh: Với hai số thực dương a, b ta có: $\dfrac{1}{a+b}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ (*) , dấu bằng xảy ra khi a = b.	0,25
		Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $$\sqrt{\frac{x}{y+z+2x}.\frac{1}{4}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y+z+2x}+\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x}{y+z+2x}}\le\frac{x}{y+z+2x}+\frac{1}{4}$$	0,25
		Áp dụng (*): $\dfrac{1}{y+z+2x}=\dfrac{1}{(x+y)+(x+z)}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x+z}\right)$ $$\Rightarrow\frac{x}{y+z+2x}\le\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}\right)\Rightarrow\sqrt{\frac{x}{y+z+2x}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}+1\right)$$	0,25
		Tương tự ta được: $\sqrt{\dfrac{y}{z+x+2y}}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{y}{y+x}+1\right)$ $$\sqrt{\frac{z}{x+y+2z}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{z}{z+x}+\frac{z}{z+y}+1\right)$$ $$\Rightarrow P\le\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+x}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}+\frac{z}{z+y}+3\right)=\frac{3}{2}$$ Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{3}{2}$ khi x = y = z	0,25

Đề số 5

CÂU	PHẦN	NỘI DUNG	ĐIỂM
		Đặt $a=\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$, $a>0$ $a^2=4+2\sqrt{4-\frac{5+\sqrt{5}}{2}}=4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=4+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=3+\sqrt{5}\Rightarrow a=\sqrt{3+\sqrt{5}}$	0,25
	a) 1,0điểm	$\Rightarrow x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-1=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}-1=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}-1=\sqrt{2}-1$	0,25
		$x=\sqrt{2}-1\Rightarrow x^2+2x-1=0$	0,25
		$B = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ $B = 2x(x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 2x - 1) + 1 = 1$	0,25
Câu1 2,0 điểm		$\sqrt{x+2014}+\sqrt{2015-x}-\sqrt{2014-x}=\sqrt{y+2014}+\sqrt{2015-y}-\sqrt{2014-y}$ (1) ĐKXĐ: $-2014\le x;y\le 2014$ $(1)\Leftrightarrow\sqrt{x+2014}-\sqrt{y+2014}+\sqrt{2015-x}-\sqrt{2015-y}+\sqrt{2014-y}-\sqrt{2014-x}=0$ Nếu x khác y và $-2014\le x;y\le 2014$ thì $\sqrt{x+2014}+\sqrt{y+2014}>0$; $\sqrt{2015-x}+\sqrt{2015-y}>0$; $\sqrt{2014-x}+\sqrt{2014-y}>0$, do đó (1)	0,25
	b) 1,0điểm	$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2014}+\sqrt{y+2014}}-\frac{1}{\sqrt{2015-x}+\sqrt{2015-y}}+\frac{1}{\sqrt{2014-x}+\sqrt{2014-y}}\right)=0\ (2)$	0,25
		Khi đó dễ chứng tỏ $\frac{1}{\sqrt{2014-x}+\sqrt{2014-y}}-\frac{1}{\sqrt{2015-x}+\sqrt{2015-y}}>0$	0,25
		Mà $x-y\neq 0$ nên (2) vô lý vì VT(2) luôn khác 0 Nếu x = y dễ thấy (1) đúng. Vậy x = y.	0,25
Câu 2 2,0 điểm	a) 1,0 điểm	$x^3+(x+1)\sqrt{x+1}+2\sqrt{2}=\left(x+\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)^3$ (1) ĐKXĐ: $x\ge -1$ Đặt: $y=\sqrt{x+1};z=\sqrt{2}$ Khi đó (1) có dạng : $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3$ (2)	0,25

		Chứng minh được (2) $\Leftrightarrow$ (x + y)(x + z)(z + x) = 0	
		Với: x + y = 0 $\Leftrightarrow x+\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=-x \Rightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (Thỏa mãn)	0,25
		Với: x + z = 0 $\Leftrightarrow x+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$ (không thỏa mãn).	0,25
		Với: y + z = 0 $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{2}=0$ - vô nghiệm Vậy phương trình có nghiệm: $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$	0,25
	b) 1,0 điểm	$\begin{cases}3x^2+xy-4x+2y=2\\ x(x+1)+y(y+1)=4\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+xy-4x+2y-2=0\\ x^2+y^2+x+y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0\\ x^2+y^2+x+y-4=0\end{cases}$	0.25
		Ta có: $2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0 \Leftrightarrow (y+x-2)(y-2x+1)=0$ $\Leftrightarrow y=2-x$ hoặc $y=2x-1$	0.25
		Với $y=2-x$ thay vào (2) ta được: $x^2-2x+1=0$ suy ra x = 1 Ta được nghiệm (1;1)	0.25
		$y=2x-1$ thay vào (2) ta được: $5x^2-x-4=0$, suy ra $x=1; x=\dfrac{-4}{5}$ Ta được nghiệm (1;1) và $(\dfrac{-4}{5};\dfrac{-13}{5})$ Vậy hệ có nghiệm (1;1) và $(\dfrac{-4}{5};\dfrac{-13}{5})$	0.25
Câu 3 **2,0 điểm**	a) 1.0 điểm	Tìm số nguyên tố p sao cho các số $2p^2-1;\ 2p^2+3;\ 3p^2+4$ đều là số nguyên tố. +) Nếu p=7k+i; k,i nguyên, i thuộc tập $\{\pm1;\pm2;\pm3\}$. Khi đó p^2 chia cho 7 có thể dư: 1;4;2	0.25
		Xét $p>2 \Rightarrow 2p^2-1;\ 2p^2+3\ \&\ 3p^2+4>7$	0.25

		Nếu p^2 chia cho 7 dư 1 thì $3p^2+4$ chia hết cho 7 nên trái GT Nếu p^2 chia cho 7 dư 4 thì $2p^2-1$ chia hết cho 7 nên trái GT Nếu p^2 chia cho 7 dư 2 thì $2p^2+3$ chia hết cho 7 nên trái GT	
		+) Xét p=2 thì $3p^2+4$=16 (loại)	0.25
		+) Xét p=7k, vì p nguyên tố nên p=7 là nguyên tố, có: $2p^2-1=97;\ 2p^2+3=101;\ 3p^2+4=151$ đều là các số nguyên tố Vậy p =7	0.25
		Giả thiết $\Leftrightarrow 3(x-3)^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2=54(1)$ +) Lập luận để $z^2 \vdots 3 \Rightarrow z \vdots 3 \Rightarrow z^2 \vdots 9 \Rightarrow z^2 \geq 9(*)$	0,25
		$(1) \Leftrightarrow 3(x-3)^2+2z^2+3y^2(z^2-6)=54(2)$ $(2) \Rightarrow 54=3(x-3)^2+2z^2+3y^2(z^2-6) \geq 3(x-3)^2+2.9+3y^2.3$ $(x-3)^2+3y^2 \leq 12$ $\Rightarrow y^2 \leq 4 \Rightarrow y^2=1; y^2=4$ vì y nguyên dương	0,25
	b) 1,0 điểm	Nếu $y^2=1 \Leftrightarrow y=1$ thì (1) có dạng: $3(x-3)^2+5z^2=72 \Rightarrow 5z^2 \leq 72 \Rightarrow z^2 \leq \frac{72}{5} \Rightarrow z^2=9 \Rightarrow z=3$(vì có(*)) Khi đó $3(x-3)^2=27 \Rightarrow (x-3)^2=9$, x nguyên dương nên tìm được x = 6	0,25
		Nếu $y^2=4 \Leftrightarrow y=2$(vì y nguyên dương) thì (1) có dạng: $3(x-3)^2+14z^2=126 \Rightarrow 14z^2 \leq 126 \Rightarrow z^2 \leq 9 \Rightarrow z^2=9 \Rightarrow z=3$(vì z nguyên dương) Suy ra $(x-3)^2=0 \Rightarrow x=3$(vì x nguyên dương) Đáp số $\begin{cases} x=3 \\ y=2; \\ z=3 \end{cases} \begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$	0,25
Câu 4 **3,0 điểm**	a) 1,0 điểm	Vẽ hình (1 trường hợp)	

			0,25
		Sđ $BAC = \dfrac{180^0 - \text{sd}DE}{2} \Rightarrow \text{sd}DE = 60^0$	0,25
		Suy ra $EOD = 60^0$ nên tam giác OED đều	0,25
		suy ra ED = R.	0,25
	b) 1,0 điểm	$APE = ADE$ (2 góc nội tiếp chắn cung AE) $ABM = ADE$ (Cùng bù với góc EDC) Suy ra: $ABM = APE$ nên tam giác APE đồng dạng với tam giác ABM	0,25
		Nên $\dfrac{AE}{AP} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow AE.AB = AM.AP$ (1)	0,25
		Tương tự chứng minh tam giác ANE đồng dạng với tam giác ABF $\dfrac{AE}{AN} = \dfrac{AF}{AB} \Rightarrow AE.AB = AN.AF$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) suy ra: $AN.AF = AP.AM$	0,25

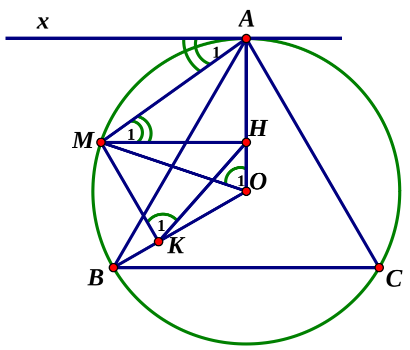
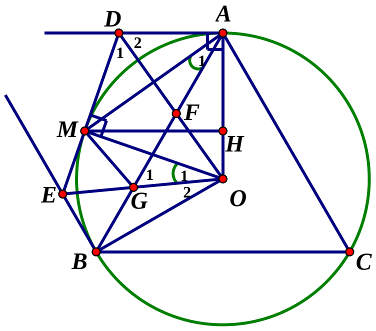
	c) 1,0 điểm	Xét I nằm giữa B, D(Nếu I nằm ngoài B,D thì vai trò K với DC sẽ như I với BD) Tứ giác BIHF, BDCF nội tiếp nên $FHK = FCK$ (cùng bằng FBD), suy ra tứ giác CKFH nội tiếp nên $FKC = 90^0$.	0,25
		Lý luận tam giác DFK đồng dạng tam giác BFH nên: $\frac{DK}{FK} = \frac{BH}{FH}$ Tương tự tam giác CFK đồng dạng tam giác BFI nên: $\frac{CK}{FK} = \frac{BI}{FI}$ Suy ra: $\frac{DC}{FK} = \frac{BH}{FH} - \frac{BI}{FI}$	0,25
		$\frac{DC}{FK} + \frac{BD}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{BD}{FI} - \frac{BI}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{ID}{FI}$ Mà $\frac{ID}{FI} = \frac{HC}{FH}$ suy ra: $\frac{DC}{FK} + \frac{BD}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{HC}{FH} = \frac{BC}{FH}$	0,25
		Vậy $\frac{BC}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{CD}{FK} = \frac{2BC}{FH}$ nên $\frac{BC}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{CD}{FK}$ nhỏ nhất khi FH lớn nhất khi F là trung điểm cung BC	0,25
Câu 5 **1,0 điểm**		Có $xy + yz + zx = xyz \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1(1)$ Ta chứng minh với x, y dương: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ (*) $(*) \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right)(x+y) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2\frac{y}{x} + b^2\frac{x}{y} \geq 2ab$ $\Leftrightarrow \left(a\sqrt{\frac{y}{x}} - b\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 \geq 0$ luôn đúng; "=" $\Leftrightarrow a\sqrt{\frac{y}{x}} - b\sqrt{\frac{x}{y}} = 0 \Leftrightarrow a = b\frac{x}{y}$	0,25
		Áp dụng(*) ta có: $\frac{1^2}{y} + \frac{1^2}{z} \geq \frac{(1+1)^2}{y+z} = \frac{2^2}{y+z}$ $("=" \Leftrightarrow y : z = 1)$ $\Rightarrow \frac{2^2}{2y} + \frac{2^2}{y+z} \geq \frac{(2+2)^2}{3y+z} = \frac{4^2}{3y+z}$ $("=" \Leftrightarrow 2y = y+z \Leftrightarrow y = z)$	0,25

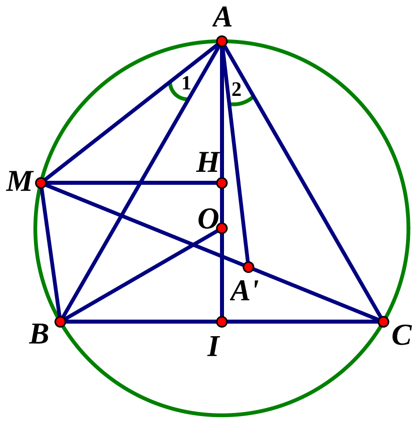
		$\Rightarrow \frac{4^2}{4x}+\frac{4^2}{3y+z} \ge \frac{(4+4)^2}{4x+3y+z}=\frac{64}{4x+3y+z}("=" \Leftrightarrow 4x=3y+z)$	
		$\Rightarrow \frac{64}{4x+3y+z} \le \frac{4^2}{4x}+\frac{2^2}{2y}+\frac{1^2}{y}+\frac{1^2}{z}=\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}("=" \Leftrightarrow 4x=3y+z \,\&\, y=z \Leftrightarrow$ x=y=z)	0,25
		Tương tự: $\frac{64}{x+4y+3z} \le \frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{3}{z}("=" \Leftrightarrow x=y=z)$ $\frac{64}{3x+y+4z} \le \frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{4}{z}("=" \Leftrightarrow x=y=z)$ $M=\frac{1}{4x+3y+z}+\frac{1}{x+4y+3z}+\frac{1}{3x+y+4z} \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{8}$ (theo (1)) Vậy M đạt GTLN là $\frac{1}{8}$ khi x = y = z = 3(theo (1))	0,25

Đề số 7

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a: **(1,0 đ)**	$A=\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)}{2-\sqrt{1-x^2}}$	0.25
	$=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$	0.25
	$=\sqrt{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2}=\sqrt{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(2+2\sqrt{1-x^2}\right)}$	0.25
	$=\sqrt{2x^2}=\lvert x\rvert\sqrt{2}$	0.25
Câu 1b: **(1,0 đ)**	$a^3-a^2b+ab^2-6b^3=0 \Leftrightarrow (a-2b)(a^2+ab+3b^2)=0$ (*)	0.25
	Vì a > b > 0 $\Rightarrow a^2+ab+3b^2>0$ nên từ (*) ta có a = 2 b	0.25
	Vậy biểu thức $B=\frac{a^4-4b^4}{b^4-4a^4}=\frac{16b^4-4b^4}{b^4-64b^4}$	0.25

	$B=\frac{12b^4}{-63b^4}=\frac{-4}{21}$	0.25
Câu 2a: **(1,0 đ)**	Đặt $t=x\sqrt{2x^2+4}\Rightarrow t^2=2\left(x^4+2x^2\right)\Rightarrow\ x^2\left(x^2+2\right)=\frac{t^2}{2}$ ta được phương trình $\frac{t^2}{2}=4-t\Leftrightarrow t^2+2t-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4\\t=2\end{array}\right.$ Với t = -4 ta có $x\sqrt{2x^2+4}=-4\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\2\left(x^4+2x^2\right)=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\x^4+2x^2-8=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\x^2=2\end{cases}\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$ Với t =2 ta có $x\sqrt{2x^2+4}=2\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\2\left(x^4+2x^2\right)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^4+2x^2-2=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2=\sqrt{3}-1\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{\sqrt{3}-1}$. Kết luận nghiệm của phương trình.	0.25 0.25 0.25 0.25
Câu 2b: **(1,0 đ)**	Từ hệ ta có $x^3(2y+x)=y^3(2x+y)\Leftrightarrow(x^2-y^2)\left(2xy+x^2+y^2\right)=0$ $\Leftrightarrow(x+y)^3(x-y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x=-y\end{array}\right.$ * Với x = y ta tìm được (x ; y) = (0; 0); $(\sqrt{3};\sqrt{3});(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$ * Với x = - y ta tìm được (x ; y) = (0; 0); $(1;-1);(-1;1)$ Vậy hệ phương trình có nghiệm (x ; y) = (0; 0); $\sqrt{3};\sqrt{3});(-\sqrt{3};-\sqrt{3});(-1;1);(1;-1)$	0.25 0.25 0.25 0.25
Câu 3a: **(1,0 đ)**	$xy^2+2xy+x=32y\Leftrightarrow x(y+1)^2=32y$ Do y nguyên dương $\Rightarrow y+1\neq0\Rightarrow x=\frac{32y}{(y+1)^2}$	0.25
	Vì $(y,y+1)=1\Rightarrow(y+1)^2\in U(32)$	0.25
	mà $32=2^5\Rightarrow(y+1)^2=2^2$ và $(y+1)^2=2^4$(Do $(y+1)^2>1$)	0.25
	*Nếu $(y+1)^2=2^2\Rightarrow y=1;x=8$	0.25

	*Nếu $(y+1)^2=2^4 \Rightarrow y=3; x=6$ Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là: $\begin{cases} x=8 \\ y=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$	
Câu 3b: **(1,0 đ)**	$2a^2+a=3b^2+b \Leftrightarrow (a-b)(2a+2b+1)=b^2$ (*)	0.25
	Gọi d là ước chung của (a - b, 2a + 2b + 1) ($d \in \mathbb{N}^*$). Thì $\begin{cases} (a-b) \vdots d \\ (2a+2b+1) \vdots d \end{cases} \Rightarrow (a-b)(2a+2b+1) \vdots d^2$ $\Rightarrow b^2 \vdots d^2 \Rightarrow b \vdots d$	0.25
	Mà $(a-b) \vdots d \Rightarrow a \vdots d \Rightarrow (2a+2b) \vdots d$ mà $(2a+2b+1) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d=1$	0.25
	Do đó (a - b, 2a + 2b + 1) = 1. Từ (*) ta được $a-b$ và $2a+2b+1$ là số chính phương => $2a+2b+1$ là số chính phương.	0.25
Câu 4a: **(1,0 đ)**	 Qua A kẻ tia tiếp tuyến Ax của (O). Ta có $A_1=\frac{1}{2}O_1=\frac{1}{2}$sđ AM (1)	0.25
	Có Ax // MH (cùng vuông góc với OA) $\Rightarrow A_1=M_1$ (2)	0.25
	Tứ giác MHOK nội tiếp $\Rightarrow O_1=K_1$ (cùng chắn MH) (3)	0.25
	Từ (1), (2), (3) ta có $M_1=\frac{1}{2}K_1$ hay $HKM=2AMH$.	0.25
Câu 4b: **(1,0 đ)**	 Có tứ giác AOMD nội tiếp (4)	0.25

	$A_1 = \frac{1}{2}$sđ BM ; $O_1 = O_2 = \frac{1}{2}$sđ BM $\Rightarrow A_1 = O_1 \Rightarrow$ tứ giác AMGO nội tiếp (5)	0.25
	Từ (4), (5) ta có 5 điểm A, D, M, G, O cùng nằm trên một đường tròn $\Rightarrow G_1 = D_2 = D_1$	0.25
	$\Rightarrow \Delta OGF$ và ΔODE đồng dạng $\Rightarrow \frac{OG}{OD} = \frac{GF}{DE}$ hay OD.GF = OG.DE.	0.25
Câu 4c: **(1,0 đ)**	 Trên đoạn MC lấy điểm A′ sao cho MA′ = MA $\Rightarrow \Delta AMA'$ đều $\Rightarrow A_1 = A_2\left(=60^0 - BAA'\right)$ $\Rightarrow \Delta MAB = \Delta A'AC \Rightarrow MB = A'C$	0.25
	$\Rightarrow MA + MB = MC$ Chu vi tam giác MAB là $MA + MB + AB = MC + AB \le 2R + AB$	0.25
	Đẳng thức xảy ra khi MC là đường kính của (O) => M là điểm chính giữa cung AM => H là trung điểm đoạn AO Vậy giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là 2R + AB	0.25
	Gọi I là giao điểm của AO và BC $\Rightarrow AI = \frac{3}{2}R = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$ Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là 2R + AB = $(2+\sqrt{3})R$	0.25
Câu 5: **(1,0 đ)**	Từ gt : $2ab + 6bc + 2ac = 7abc$ và a,b,c > 0 Chia cả hai vế cho abc > 0 $\Rightarrow \frac{2}{c} + \frac{6}{a} + \frac{2}{b} = 7$ đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ 2z + 6x + 2y = 7 \end{cases}$	0.25

	Khi đó $C=\frac{4ab}{a+2b}+\frac{9ac}{a+4c}+\frac{4bc}{b+c}=\frac{4}{2x+y}+\frac{9}{4x+z}+\frac{4}{y+z}$	
	$\Rightarrow C=\frac{4}{2x+y}+2x+y+\frac{9}{4x+z}+4x+z+\frac{4}{y+z}+y+z-(2x+y+4x+z+y+z)$	0.25
	$=\left(\frac{2}{\sqrt{x+2y}}-\sqrt{x+2y}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{4x+z}}-\sqrt{4x+z}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{y+z}}-\sqrt{y+z}\right)^2+17\ge 17$	0.25
	Khi $x=\frac{1}{2}, y=z=1$ thì C = 17 Vậy GTNN của C là 17 khi a =2; b =1; c = 1	0.25

Đề số 6

CÂU	PHẦN	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 1 2,0 điểm	a) 1,0 điểm	Ta có : $A^2=\left(\sqrt{x-\sqrt{50}}-\sqrt{x+\sqrt{50}}\right)^2\left(x+\sqrt{x^2-50}\right)$ $A^2=\left(x-\sqrt{50}+x+\sqrt{50}-2\sqrt{x^2-50}\right)\left(x+\sqrt{x^2-50}\right)$ $A^2=\left(2x-2\sqrt{x^2-50}\right)\left(x+\sqrt{x^2-50}\right)$ $A^2=2\left(x^2-x^2+50\right)$ $A^2=100$ Nhưng do theo giả thiết ta thấy $A=\left(\sqrt{x-\sqrt{50}}-\sqrt{x+\sqrt{50}}\right)\sqrt{x+\sqrt{x^2-50}}<0$ $\Rightarrow$ A= -10	0,25 0,25 0,25 0,25đ
	b) 1,0 điểm	$x+\sqrt{3}=2 \Rightarrow x-2=-\sqrt{3}\Rightarrow (x-2)^2=3$ $\Rightarrow x^2-4x+1=0$ $B = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 20x + 2018$ $B = (x^5 - 4x^4 + x^3) + (x^4 - 4x^3 + x^2) + 5(x^2 - 4x + 1) + 2013$ $B = x^3(x^2 - 4x + 1) + x^2(x^2 - 4x + 1) + 5(x^2 - 4x + 1) + 2013$ B = 2013	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 2 2,0 điểm	a) 1.0 điểm	Nhận xét x = 0 không là nghiệm của phương trình Với $x\neq 0$, phương trình đã cho tương đương với: $\frac{4}{x-5+\frac{6}{x}}+\frac{3}{x-7+\frac{6}{x}}=6$ Đặt $t=x-7+\frac{6}{x}$ phương trình trở thành	

<table>
<tr><td></td><td></td><td>

$\frac{4}{t+2}+\frac{3}{t}=6 \quad (1)\left(t\neq 0; t\neq -2\right)$

$(1)\Leftrightarrow 4t+3t+6=6t^2+12t \Leftrightarrow 6t^2+5t-6=0$

Giải phương trình ta được $t_1=\frac{-3}{2}; t_2=\frac{2}{3}$ (thỏa mãn)

Với $t_1=\frac{-3}{2}$ ta có $x-7+\frac{6}{x}=\frac{-3}{2}\Leftrightarrow 2x^2-11x+12=0$

Giải phương trình ta được $x_1=\frac{3}{2}; x_2=4$ (thỏa mãn)

Với $t_2=\frac{2}{3}$ ta có $x-7+\frac{6}{x}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3x^2-23x+18=0$

Giải phương trình ta được $x_3=\frac{23+\sqrt{313}}{6}; x_4=\frac{23-\sqrt{313}}{6}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là : $x_1=\frac{3}{2}; x_2=4;$

$x_3=\frac{23+\sqrt{313}}{6}; x_4=\frac{23-\sqrt{313}}{6}$

</td><td>0,25

0,25

0,25

0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>b)
1,0 điểm</td><td>

$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}+4\sqrt{xy}=16\\ x+y=10\end{cases}$ (I) ($x;y\geq 0$)

Đặt S= $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; P = $\sqrt{xy}$ ($S\geq 0; P\geq 0$) hệ (I) có dạng

$\begin{cases}S+4P=16\\ S^2-2P=10\end{cases}$ (II)

Giải hệ (II) và đối chiếu điều kiện ta được $\begin{cases}S=4\\ P=3\end{cases}$

Khi đó $\sqrt{x};\sqrt{y}$ là 2 nghiệm của phương trình $t^2-4t+3=0$

Giải phương trình ta được $t_1=3$; $t_2=1$

Từ đó suy ra hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $\begin{cases}x=9\\ y=1\end{cases}; \begin{cases}x=1\\ y=9\end{cases}$

</td><td>0,25

0,25

0,25

0,25</td></tr>
<tr><td>Câu 3
2,0
điểm</td><td>a)
1.0
điểm</td><td>

$4a^2+3ab-11b^2\vdots 5\Rightarrow\left(5a^2+5ab-10b^2\right)-\left(4a^2+3ab-11b^2\right)\vdots 5$

$\Rightarrow a^2+2ab+b^2\vdots 5$

$\Rightarrow(a+b)^2\vdots 5$

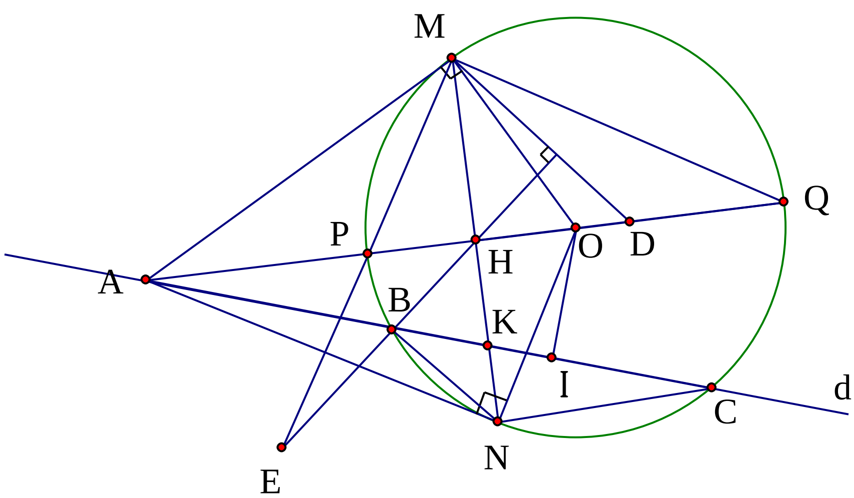
$\Rightarrow a+b\vdots 5$ (Vì 5 là số nguyên tố)

$\Rightarrow a^4-b^4=\left(a^2+b^2\right)(a+b)(a-b)\vdots 5$

</td><td>0.25

0,25
0,25

0,25</td></tr>
</table>

	b) 1,0 điểm	$x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=4-\sqrt{15}$ $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ là nghiệm của phương trình nên ta có $a\left(4-\sqrt{15}\right)^2+b\left(4-\sqrt{15}\right)+1=0$ $a\left(31-8\sqrt{15}\right)+b\left(4-\sqrt{15}\right)+1=0$ $\Leftrightarrow -\sqrt{15}(8a+b)+31a+4b+1=0$ Vì $a,b\in Q$ nên $(8a+b),\ (31a+4b+1)\in Q$ Do đó nếu $8a+b\neq 0$ thì $\sqrt{15}=\dfrac{31a+4b+1}{8a+b}\in Q$ (Vô lí) Suy ra $\begin{cases}8a+b=0\\31a+4b+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-8\end{cases}$	0,25 0,25 0,25đ 0,25
Câu 4 **3,0** **điểm**			
	a) 1,0 ®iÓm	I là trung điểm của BC (dây BC không đi qua O) $\Rightarrow OI\perp BC\Rightarrow OIA=90^0$ Ta có $AMO=90^0$ (do AM là hai tiếp tuyến (O)) $ANO=90^0$ (do AN là hai tiếp tuyến (O)) Suy ra 4 điểm O, M, N, I cùng thuộc đường tròn đường kính OA	0,25 0,25 0,25 0.25
	b) 1,0 điểm	AM, AN là hai tiếp tuyến (O) cắt nhau tại A nên OA là tia phân giác MON mà ΔOMN cân tại O nên $OA\perp MN$ ΔABN đồng dạng với ΔANC (vì ANB=ACN=$\dfrac{1}{2}$ sđ NB và CAN chung) suy ra $\dfrac{AB}{AN}=\dfrac{AN}{AC}\Rightarrow AB.AC=AN^2$ ΔANO vuông tại N đường cao NH nên ta có $AH.AO = AN^2$ Suy ra AB.AC = AH.AO ΔAHK đồng dạng với ΔAIO (vì $AHK=AIO=90^0$ và OAI chung)	 0,25 0,25

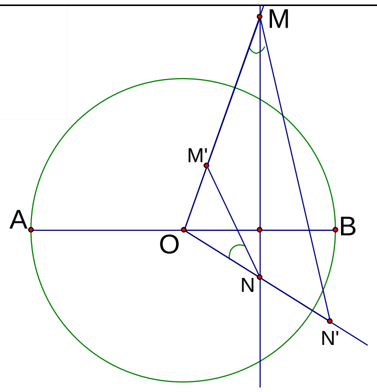
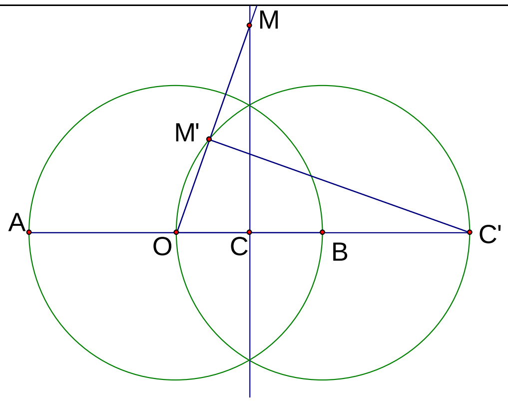
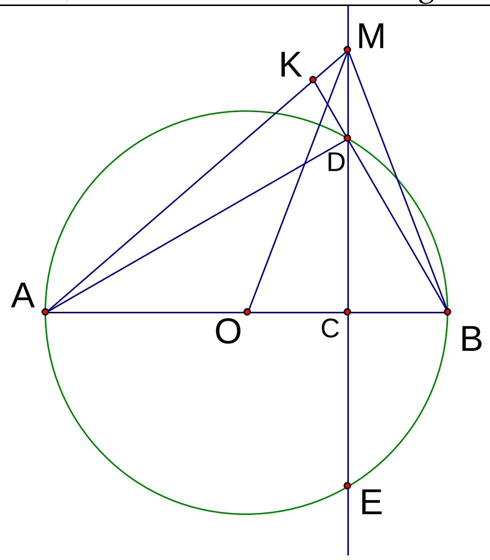
		$\Rightarrow \frac{AH}{AI}=\frac{AK}{AO} \Rightarrow AI.AK=AH.AO$ $\Rightarrow AI.AK=AB.AC$ $\Rightarrow AK=\frac{AB.AC}{AI}$ Ta có A,B,C cố định nên I cố định suy ra AK cố định mà A cố định, K là giao điểm của dây BC và dây MN nên K thuộc tia AB suy ra K cố định	0,25 0,25
	c) 1,0 điểm	Ta có $PMQ=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Xét ΔMHE và ΔQDM có $MEH=DMQ$ (cùng phụ với DMP), $EMH=MQD$ (cùng phụ với MPO) $\Rightarrow \frac{ME}{MQ}=\frac{MH}{DQ}$ ΔPMH đồng dạng với ΔMQH $\Rightarrow \frac{MP}{MQ}=\frac{MH}{HQ}=\frac{MH}{2DQ}$ $\Rightarrow \frac{MP}{MQ}=\frac{1}{2}\frac{ME}{MQ}$ $\Rightarrow$ ME = 2 MP $\Rightarrow$ P là trung điểm ME.	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 5 1,0 điểm		$A_n=\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}}=\frac{\sqrt{2n-1}}{(2n+1)(2n-1)}$ $A_n=\frac{\sqrt{2n-1}}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{\sqrt{2n-1}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$ Vì $\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}>0$ và $\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\frac{2}{\sqrt{2n-1}}$ nên $A_n<$ $\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}} (\forall n\in\mathbb{N}^*)$ Do đó: $A_1+A_2+A_3+...+A_n<1-\frac{1}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt5}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ $A_1+A_2+A_3+...+A_n<1-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<1$	0,25 0,25 0,25 0,25

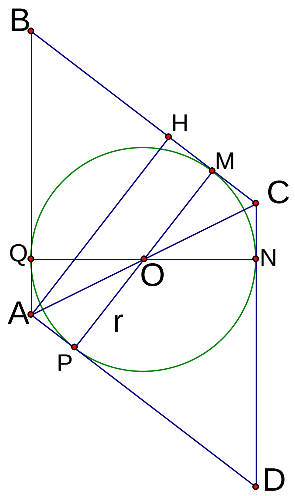
Đề số 7

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	a	Rút gọn biểu thức: $A=\frac{x^2-5x+6+3\sqrt{x^2-6x+8}}{3x-12+(x-3)\sqrt{x^2-6x+8}}$	**1,5**
		ĐKXĐ: x ≤ 2 hoặc x > 4	0,25

		$A=\dfrac{(x-2)(x-3)+3\sqrt{(x-2)(x-4)}}{3(x-4)+(x-3)\sqrt{(x-2)(x-4)}}$	0,25
		* Trường hợp 1: x ≤ 2, ta có:	
		$A=-\dfrac{(2-x)(3-x)+3\sqrt{(2-x)(4-x)}}{3(4-x)+(3-x)\sqrt{(2-x)(4-x)}}=-\dfrac{\left(\sqrt{2-x}\right)^2(3-x)+3\sqrt{2-x}\sqrt{4-x}}{3\left(\sqrt{4-x}\right)^2+(3-x)\sqrt{2-x}\sqrt{4-x}}$	0,25
		$=-\dfrac{\sqrt{2-x}\left[(3-x)\sqrt{2-x}+3\sqrt{4-x}\right]}{\sqrt{4-x}\left[3\sqrt{4-x}+(3-x)\sqrt{2-x}\right]}=-\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{4-x}}$ (vì x ≤ 2 nên $3\sqrt{4-x}+(3-x)\sqrt{2-x}>0$)	0,25
		* Trường hợp 2: x >4, ta có: $3\sqrt{x-4}+(x-3)\sqrt{x-2}>0$ nên:	
		$A\overset{(1)}{=}\dfrac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2(x-3)+3\sqrt{x-2}\sqrt{x-4}}{3\left(\sqrt{x-4}\right)^2+(x-3)\sqrt{x-2}\sqrt{x-4}}=\dfrac{\sqrt{x-2}\left[(x-3)\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-4}\right]}{\sqrt{x-4}\left[3\sqrt{x-4}+(x-3)\sqrt{x-2}\right]}=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-4}}$	(1)0,25 0,25
	b	Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3$	**0,5**
		Ta có $a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-(a+b+c)^3$	
		$=(a+b+c)^3-3c(a+b)(a+b+c)-3ab(a+b)-(a+b+c)^3$	0,25
		$=-3(a+b)\left[c(a+b+c)+ab\right]=-3(a+b)\left[a(b+c)+c(b+c)\right]=-3(a+b)(b+c)(a+c)$ (*)	0,25
		Tìm x biết: $\left(x^2+x+2\right)^3-(x+1)^3=x^6+1$	**0,5**
		Ta có: $\left(x^2\right)^3+(x+1)^3+1^3-\left(x^2+x+2\right)^3=0$	
		$\Leftrightarrow -3\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)(x+2)=0$ (Theo (*)).	0,25
		Vì $x^2+x+1=0; x^2+1=0$ vô nghiệm . KL: x = -2	0,25
2	a	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & (1) \\ xy+3y^2+x=3 & (2) \end{cases}$	**1,0**
		(1) $\Leftrightarrow \left(x^2-y^2\right)+y(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y)=0$, ta được $x=y$ hoặc $x=-2y$	0,25
		* Với x = y, từ (2) ta có: $4x^2+x-3=0$, ta được $x_1=-1, x_2=\dfrac{3}{4}$	0,25
		* Với x = -2y, từ (2) ta có $y^2-2y-3=0$, ta được $y_1=-1, y_2=3$ Nếu $y=-1\Rightarrow x=2$. Nếu $y=3\Rightarrow x=-6$	0,25
		Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) là: (-1; -1); $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right)$; (2; -1); (-6; 3).	0,25
	b	Giải phương trình: $\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^3-(x-3)^3=16$	**1,0**
		$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x-3}{x-2}-x+3\right)^3+3\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)(x-3)\left(\dfrac{x-3}{x-2}-x+3\right)=16$, (ĐKXĐ: x $\ne 2$)	0,25
		$\Leftrightarrow -\left[\dfrac{(x-3)^2}{x-2}\right]^3-3\left[\dfrac{(x-3)^2}{x-2}\right]^2=16$. Đặt $t=\dfrac{(x-3)^2}{x-2}$, ta được $t^3+3t^2+16=0$ (*)	0,25

		$(*) \Leftrightarrow (t^3+4t^2)-(t^2-16)=0 \Leftrightarrow t^2(t+4)-(t+4)(t-4)=0 \Leftrightarrow (t+4)(t^2-t+4)=0$ Lý luận để có $t = -4$	0,25
		Với t = - 4, thì $\frac{(x-3)^2}{x-2}=-4$ hay $x^2-6x+9=-4x+8 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1(TM)$. Vậy $x=1$	0,25
3	a	Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $8x^2+23y^2+16x-44y+16xy-1180=0$	**1,0**
		Biến đổi phương trình đã cho ta được $8(x+y+1)^2+15(y-2)^2=1248$	0,25
		$\Rightarrow (y-2)^2 \le \frac{1248}{15} \Rightarrow (y-2)^2 \le 83$. Do $8(x+y+1)^2, 1248$ đều chia hết cho 8; (15;8)=1 nên $(y-2)^2$ là số chính phương&chia hết cho 8 $\Rightarrow (y-2)^2 \in \{0;16;64\}$. Ta có các TH sau:	0,25
		* $\begin{cases}(y-2)^2=0\\ 8(x+y+1)^2=1248\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2\\ (x+3)^2=156\end{cases}$ Do 156 không c.phương nên TH này vô nghiệm * $\begin{cases}(y-2)^2=16\\ 8(x+y+1)^2+15.16=1248\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(y-2)^2=16\\ (x+y+1)^2=126\end{cases}$ Do 126 không c.phương nên TH này vô nghiệm	0,25
		* $\begin{cases}(y-2)^2=64\\ 8(x+y+1)^2+15.64=1248\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=10\\ y=-6\end{array}\right.\\ (x+y+1)^2=36\end{cases}$ Ta được $\begin{cases}y=10\\ (x+11)^2=36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=10\\ \left[\begin{array}{l}x=-5\\ x=-17\end{array}\right.\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}y=-6\\ (x-5)^2=36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-6\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=11\end{array}\right.\end{cases}$ Vậy (x; y) là (-5; 10); (-17; 10); (-1; -6); (11; -6)	0,25
	b	Cho n là số nguyên dương và m là ước nguyên dương của $2n^2$. CMR: n^2+m không là số chính phương.	**1,0**
		Giả sử n^2+m là số chính phương. Đặt $n^2+m=k^2$ (1) (với k nguyên dương) Theo bài ta có $2n^2 = mp$ (p nguyên dương) $\Rightarrow m=2n^2:p$, thay vào (1) ta có:	0,25
		$n^2+\frac{2n^2}{p}=k^2 \Rightarrow n^2p^2+2pn^2=p^2k^2 \Rightarrow n^2(p^2+2p)=(pk)^2$	0,25
		Do n^2, $(pk)^2$ chính phương, nên p^2+2p phải chính phương.	0,25
		Mặt khác $p^2<p^2+2p<(p+1)^2$, tức p^2+2p không chính phương. Nên giả sử sai. Vậy n^2+m không chính phương	0,25
4	a	Chứng minh rằng bốn điểm M, N, M′, N′ thuộc một đường tròn.	**1,0**

			$\dfrac{OM'}{ON} = \dfrac{ON'}{OM}$ (vì OM′.OM = ON′.ON); MON chung nên $\Delta OM'N$ đ. dạng với $\Delta ON'M$ $\Rightarrow ONM' = OMN'$; $\Rightarrow OM'N = ON'M$ nên $M'MN' + M'NN' = 180^0$ (hoặc M′, N′ cùng nhìn M N dưới cùng một góc, khi M′ và N′ kề nhau - M, N cùng nằm trong hoặc cùng nằm ngoài(O))$\Rightarrow$ M, M′, N′, N thuộc một đường tròn. (*Thí sinh chỉ cần làm đúng 1 trường hợp cũng cho 0,5 đ*)	0,25 0,25 0,25 0,25
	b	Khi điểm M chuyển động trên *d*, chứng minh rằng điểm M′ thuộc một đường tròn cố định.		**1,0**
			Gọi giao của d với OB là C Lấy điểm C′ đối xứng với O qua B $\Rightarrow$ điểm C′ cố định trên tia OC	0,25
			Ta có: $OC.OC' = \dfrac{1}{2}BO.2BO = R^2$	0,25
			$\Rightarrow OC.OC' = OM'.OM \Rightarrow \dfrac{OC}{OM} = \dfrac{OM'}{OC'}$; MOC chung $\Rightarrow \Delta OCM$ đồng dạng với $\Delta OM'C'$	0,25
			$\Rightarrow OM'C = OCM = 90^0$.Vậy M′ thuộc đường tròn đường kính OC′ cố định.	0,25
	c	Tìm vị trí điểm M trên *d* để tổng MO + MA đạt giá trị nhỏ nhất theo hai trường hợp		**1,0**
			Gọi giao của d với (O;R) là D, E (hình vẽ) *TH1: Do d là trung trực của OB $\Rightarrow$ MO = MB.	0,25
			Ta có: MA + MO = MA + MB $\geq$ AB, dấu "="xảy ra khi M trùng C $\Rightarrow$MA + MO nhỏ nhất khi M trùng C (M$\in d$)	0,25
			*TH2: Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm D.	
			Gọi K là giao của tia BD với AM. Ta có MB + MK$\geq$KB = KD + DB KD + AK $\geq$ AD	0,25
			$\Rightarrow$MA + MO = MA + MB $\geq$ DA + DB, dấu "=" có khi M trùng với D	
			Tương tự khi M thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa E: MA + MO = MA + MB $\geq$ EA + EB, dấu "=" xảy ra khi M trùng với E	0,25

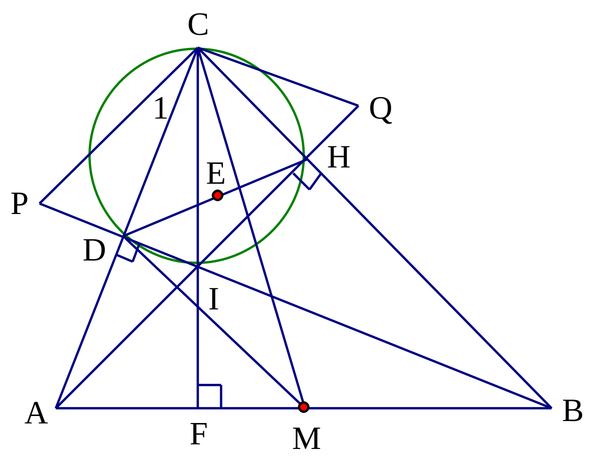
			Vậy MA + MO nhỏ nhất khi M trùng D hoặc M trùng E ($M \in d$, M không ở trong (O;R)).	
5	Trong các hình bình hành ngoại tiếp đường tròn (O; r), hãy tìm hình bình hành có diện tích nhỏ nhất.			**0,5**
			Theo bài ta suy ra các cạnh của hình hành là tiếp tuyến của đường tròn (O; r). Gọi M, N, P, Q lần lượt là tiếp điểm của đường tròn với các cạnh như hình vẽ. $\Rightarrow$ CM = CN; AP = AQ, BM = BQ; PD = DN $\Rightarrow$ CM + BM + AP + PD = CN + DN + AQ + BQ $\Rightarrow$ 2BC = 2AB $\Rightarrow$ BC = AB	0,25
			Kẻ $AH \perp BC$. Ta có $AB \geq AH$, dấu "=" có khi $ABC = 90^0$. Ta có: $OM \perp BC, OP \perp AD, AD // BC \Rightarrow$ P, O, M thẳng hàng, do đó AH = PM = 2r. S_{ABCD} = AH.BC = 2r.AB $\geq 2r.AH = 2r.2r$ $\Rightarrow S_{ABCD} \geq 4r^2$, dấu "=" xảy ra khi $ABC = 90^0$ Vậy trong các hình bình hành ngoại tiếp đường tròn (O; r) thì hình vuông có diện tích nhỏ nhất và bằng $4r^2$.	0,25

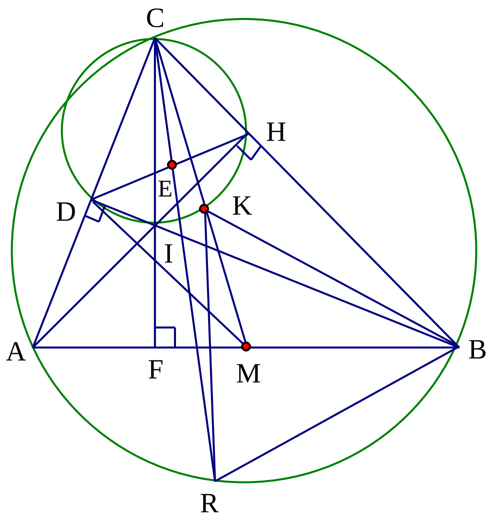
Đề số 8

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1		Phân tích đa thức $4(1+x)(1+y)(1+x+y)-3x^2y^2$ thành nhân tử	**1,50**
		A = $4(1+x+y+xy)(1+x+y)-3x^2y^2$	0,25
		$=4(1+x+y)^2+4(1+x+y)xy-3x^2y^2$	0,25
		$=[2(1+x+y)+xy]^2-(2xy)^2$	0,5
		$=(2+2x+2y-xy)(2+2x+2y+3xy)$	0,5
2	a	Giải phương trình $\sqrt{2x^2+7x+10}+\sqrt{2x^2+x+4}=3(x+1)$ (1)	**1,50**
		$2x^2+7x+10=2\left(x+\frac{7}{4}\right)^2+\frac{31}{8}>0,\ 2x^2+x+4=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{8}>0, \forall x \in \mathbb{R}$ Vậy TXĐ: $\mathbb{R}$ - Nếu $x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ thì VP(1) ≤ 0, VT(1) > 0 (không thỏa mãn)	0,5

		- Nếu $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ thì (1) $\Rightarrow 6x+6=3(x+1)\sqrt{2x^2+7x+10}-\sqrt{2x^2+x+4}$ $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+7x+10}-\sqrt{2x^2+x+4}=2$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $2\sqrt{2x^2+x+4}=3x+1$	0,5
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1\ge 0 \\ 4(2x^2+x+4)=9x^2+6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{3} \\ x^2+2x-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{3} \\ x=3,\ x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$	0,25
		Thử lại. Với x = 3 thì VT(1) = VP(1) = 12 Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 3	0,25
	b	Giải hệ phương trình	**1,00**
		- Nếu x = 0 thì hệ có nghiệm (x ; y ; z) là (0 ; 0 ; 0)	0,25
		- Nếu $x\ne 0 \Rightarrow y\ne 0; z\ne 0$. Ta có : $\begin{cases} \dfrac{1}{y}=\dfrac{1+4x^2}{4x^2} \\ \dfrac{1}{z}=\dfrac{1+4y^2}{4y^2} \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{1+4z^2}{4z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{y}=\dfrac{1}{x^2}+4 \\ \dfrac{4}{z}=\dfrac{1}{y^2}+4 \\ \dfrac{4}{x}=\dfrac{1}{z^2}+4 \end{cases}$	0,25
		Cộng theo vế các phương trình của hệ ta được $\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{x}+4\right)+\left(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{4}{y}+4\right)+\left(\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{4}{z}+4\right)=0$ $\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x}-2\right)^2+\left(\dfrac{1}{y}-2\right)^2+\left(\dfrac{1}{z}-2\right)^2=0$	0,25
		$\Leftrightarrow\ x=y=z=\dfrac{1}{2}$. Thử lại ta thấy $x=y=z=\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn hệ pt đã cho. Vậy hệ có 2 nghiệm (x ; y ; z) là (0 ; 0 ; 0), $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.	0,25
3	a	Tìm các số nguyên dương *x, y, z* thỏa mãn đồng thời hai điều kiện	**1,00**
		Ta có $\dfrac{x-y\sqrt{2011}}{y-z\sqrt{2011}}=\dfrac{m}{n}$ (1), trong đó m, n là các số nguyên thỏa mãn n > 0, (m, n) = 1.	0,25

		$(1) \Leftrightarrow nx - my = \sqrt{2011}(ny - mz)$ (2).	
		Vì $\sqrt{2011}$ là số vô tỉ và m, n, x, y, z là các số nguyên nên ta có (2) <=> nx – my = ny – mz = 0 $\Rightarrow \begin{cases} nx = my \\ ny = mz \end{cases} \Rightarrow xz = y^2$.	0,25
		Ta lại có : $x^2 + y^2 + z^2 = (x+z)^2 - 2xz + y^2$ $= (x+z)^2 - y^2 = (x+y+z)(x-y+z)$ Vì $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố và x + y + z là số nguyên lớn hơn 1 nên x – y + z = 1. Do đó $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$ (3)	0,25
		Nhưng x, y, z là các số nguyên dương nên $x^2 \geq x$; $y^2 \geq y$; $z^2 \geq z$ Suy ra $x^2 = x$, $y^2 = y$, $z^2 = z$ => x = y = z = 1. Khi đó $\dfrac{x - y\sqrt{2011}}{y - z\sqrt{2011}} = 1$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ (thỏa mãn) Vậy (x ; y ; z) = (1 ; 1 ; 1) thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25
	b	Tìm nghiệm nguyên của phương trình $20y^2 - 6xy = 150 - 15x$.	**1,00**
		Ta có : 150 – 15x = $20y^2$ – 6xy <=> 6xy – 15x = $20y^2$ – 150 <=> 3x(2y – 5) = 5($4y^2$ – 25) – 25 <=> (2y – 5)(10y + 25 – 3x) = 25 Xét 6 trường hợp sau	0,25
		+) $\begin{cases} 2y - 5 = 1 \\ 10y + 25 - 3x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn) +) $\begin{cases} 2y - 5 = 25 \\ 10y + 25 - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 58 \\ y = 15 \end{cases}$ (thỏa mãn)	0,25
		+) $\begin{cases} 2y - 5 = -1 \\ 10y + 25 - 3x = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{70}{3} \\ y = 2 \end{cases}$ (loại) +) $\begin{cases} 2y - 5 = -25 \\ 10y + 25 - 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = \dfrac{-74}{3} \end{cases}$ (loại)	0,25

		+) $\begin{cases} 2y-5=5 \\ 10y+25-3x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{70}{3} \\ y=5 \end{cases}$ (loại) +) $\begin{cases} 2y-5=-5 \\ 10y+25-3x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=0 \end{cases}$ (thỏa mãn) Vậy phương trình có 3 nghiệm (x ; y) là (10 ; 3), (58 ; 15), (10 ; 0).	0,25
4	a	Chứng minh PI.AB = AC.CI	**1,00**
		Chứng minh $PCB = 90^0$ $\Rightarrow ACB + C_1 = 90^0$ Ta có : $P + C_1 = 90^0$ $\Rightarrow ACB = P$ (1) 	0,25
		Chứng minh tứ giác ADIF nội tiếp $\Rightarrow CAB = PIC$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta PIC \sim \Delta CAB\ (g.g)$	0,25
		$\Rightarrow \dfrac{PI}{AC} = \dfrac{IC}{AB} \Rightarrow PI.AB = AC.IC$ (đpcm)	0,25
	b	Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn (O)	**1,00**
		Chứng minh tứ giác CDIH nội tiếp đường tròn (O) $\Rightarrow DCI$ là góc nội tiếp chắn cung DI (3)	0,25
		ΔADB có DM là đường trung tuyến $\Rightarrow \Delta MDB$ cân tại M $\Rightarrow MBD = MDB$ (4)	0,25
		Ta lại có $\Rightarrow MBD = DCI$ (cùng phụ với CAB) (5)	0,25
		Từ (4) và (5) $\Rightarrow MDB = DCI$ (6) Từ (3) và (6) suy ra MD là tiếp tuyến của đường tròn (O)	0,25
	c	Chứng minh AB là đường trung trực của đoạn KR	**1,00**

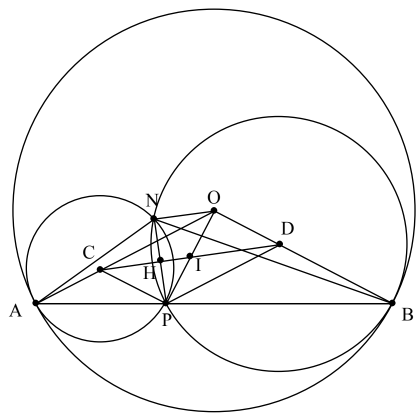
	c	 MD là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow MD^2 = MK.MC$ $\Rightarrow MB^2 = MK.MC\,(MD = MB)$ $\Rightarrow \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{MK}{MB}$ $\Rightarrow \Delta MBC \sim \Delta MKB\ (c.g.c)$ $\Rightarrow MBK = MCB\quad (7)$	0,25
		Chứng minh tứ giác ADHB nội tiếp $\Rightarrow CDH = ABC \Rightarrow \Delta CDH \sim \Delta CBA(g.g) \Rightarrow \dfrac{CD}{CB} = \dfrac{DH}{AB}$ $\Rightarrow \dfrac{CD}{DH} = \dfrac{CB}{AB} \Rightarrow \dfrac{CD}{DE} = \dfrac{CB}{MB} \Rightarrow \Delta CDE \sim \Delta CBM\ (g.g) \Rightarrow MCB = ACR\quad (8)$	0,25
		Ta lại có : $ACR = ABR$ (9) Từ (7), (8), (9) $\Rightarrow MBK = ABR \Rightarrow$ BA là phân giác của KBR	0,25
		Chứng minh tương tự ta được AB là phân giác của KAR Từ đó suy ra AB là đường trung trực của KR.	0,25
5	a	Chứng minh $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} \geq \dfrac{2}{1+\sqrt{xy}},\ \forall x, y > 0$ thỏa mãn $xy \geq 1$	**0,50**
		$(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1+\sqrt{xy}} + \dfrac{1}{1+y} - \dfrac{1}{1+\sqrt{xy}} \geq 0$ $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{xy}-x}{(1+x)(1+\sqrt{xy})} + \dfrac{\sqrt{xy}-y}{(1+y)(1+\sqrt{xy})} \geq 0$ $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)}{(1+x)(1+\sqrt{xy})} - \dfrac{\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)}{(1+y)(1+\sqrt{xy})} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x} - \dfrac{\sqrt{y}}{1+y}\right) \geq 0$	0,25
		$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x}y-\sqrt{y}-x\sqrt{y}}{(1+x)(1+y)}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{xy}-1\right)}{\left(1+\sqrt{xy}\right)(1+x)(1+y)} \geq 0$ BĐT cuối cùng đúng do $\sqrt{xy} \geq 1$.	0,25

		Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y$ hoặc $xy=1$	
	b	Chứng minh $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge\frac{22}{15}$	**0,50**
		$(2)\Leftrightarrow\frac{1}{1+\frac{b}{a}}+\frac{1}{1+\frac{c}{b}}+\frac{1}{1+\frac{a}{c}}\ge\frac{22}{15}$. Đặt $x=\frac{b}{a},\ y=\frac{c}{b},\ z=\frac{a}{c}$ thì $\frac{1}{4}\le x,y,z\le 4$ và $xyz=1$ BĐT trở thành $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\ge\frac{22}{15}$ Không giảm tổng quát, giả sử z nhỏ nhất suy ra $xy\ge 1$. Theo câu a $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\ge\frac{2}{1+\sqrt{xy}}+\frac{1}{1+z}=\frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{z}}}+\frac{1}{1+z}=\frac{2t}{t+1}+\frac{1}{t^2+1},\ t=\sqrt{z}$	0,25
		Ta sẽ CM $\frac{2t}{t+1}+\frac{1}{t^2+1}\ge\frac{22}{15},\forall\frac{1}{2}\le t\le 2$. Bằng biến đổi tương đương BĐT $\Leftrightarrow 8t^3-22t^2+23t-7\ge 0\Leftrightarrow(2t-1)(4t^2-9t+7)\ge 0$. BĐT cuối cùng đúng do $t\ge\frac{1}{2}$ và $4t^2-9t+7>0,\ \forall t$.	0,25

Đề số 9

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (2 đ)	a) Phương trình $x^2-4x+1=0$ có $\Delta'=4-1=3>0$ suy ra tồn tại x thỏa mãn $x^2-4x+1=0$ $x^2-4x+1=0\Leftrightarrow x^2+1=4x\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=4$ (do $x\ne 0$) Có $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=16-2=14$ $x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(x^2-x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})=4(14-1)=52$ $\Rightarrow A=x^5+\frac{1}{x^5}=(x^2+\frac{1}{x^2})(x^3+\frac{1}{x^3})-(x+\frac{1}{x})=14.52-4=724$	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) xyz = 2 $\Rightarrow x;y;z\ne 0$ Từ giả thiết có $B=\frac{x}{x+xy+xyz}+\frac{xyz}{xyz+2z+xz}+\frac{2}{2+x+xy}$	0,25

<table>
<tr><td></td><td>$=\frac{x}{2+x+xy}+\frac{xy}{xy+2+x}+\frac{2}{2+x+xy}$
$=\frac{x+xy+2}{2+x+xy}=1$</td><td>0,5
0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Câu 2
(2,5 đ)</td><td>a) $\begin{cases}(y^2-4y)(2y-x)=2\\ y^2-2y-x=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y^2-4y)(2y-x)=2\\ (y^2-4y)+(2y-x)=3\end{cases}$
Đặt $\begin{cases}y^2-4y=u\\ 2y-x=v\end{cases}$ suy ra có hệ $\begin{cases}uv=2\\ u+v=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v(3-v)=2\\ u=3-v\end{cases}$</td><td>0,25
0,25</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow\begin{cases}v^2-3v+2=0\\ u=3-v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\ v=2\end{cases};\begin{cases}u=2\\ v=1\end{cases}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>* $\begin{cases}u=1\\ v=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-4y=1\\ 2y-x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-4y-1=0\\ x=2y-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\pm\sqrt{5}\\ x=2y-2\end{cases}$
* $\begin{cases}u=2\\ v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-4y=2\\ 2y-x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-4y-2=0\\ x=2y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\pm\sqrt{6}\\ x=2y-1\end{cases}$</td><td>0,25
0,25</td></tr>
<tr><td>Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là:
$\begin{cases}x=2+2\sqrt{5}\\ y=2+\sqrt{5}\end{cases};\begin{cases}x=2-2\sqrt{5}\\ y=2-\sqrt{5}\end{cases};\begin{cases}x=3+2\sqrt{6}\\ y=2+\sqrt{6}\end{cases};\begin{cases}x=3-2\sqrt{6}\\ y=2-\sqrt{6}\end{cases}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>b) ĐK: $x\ge\frac{1}{2}$
Phương trình đã cho tương đương với:
$x^2-(2x-1)-2\sqrt{2x-1}-1=0\Leftrightarrow x^2-(\sqrt{2x-1}+1)^2=0$
$\Leftrightarrow(x-\sqrt{2x-1}-1)(x+\sqrt{2x-1}+1)=0$
$\Leftrightarrow x-\sqrt{2x-1}-1=0$ (vì $x\ge\frac{1}{2}$ nên $x+\sqrt{2x-1}+1>0$)
$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge0\\ (x-1)^2=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge1\\ x^2-4x+2=0\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge1\\ x_{1,2}=2\pm\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=2+\sqrt{2}$ (thỏa mãn ĐK $x\ge\frac{1}{2}$)
Nghiệm của phương trình là $x=2+\sqrt{2}$</td><td>0,25
0,25
0,25
0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Câu 3
(1,5 đ)</td><td>Xét n > 9 $\Rightarrow A=2^9+2^{13}+2^n=2^9(1+2^4+2^{n-9})$
Thấy $1+2^4+2^{n-9}$ là số lẻ nên A chia hết cho 2^9 nhưng không chia hết cho 2^{10} nên A không là số chính phương.
Xét n = 9 $\Rightarrow A=2^9+2^{13}+2^9=2^9(1+2^4+1)=9.2^{10}=96^2$ là số chính phương.</td><td>0,25
0,25</td></tr>
<tr><td>Xét n < 9 $\Rightarrow A=2^9+2^{13}+2^n=2^n(2^{9-n}+2^{13-n}+1)$
Do $2^{9-n}+2^{13-n}+1$ là số lẻ và A là số chính phương nên 2^n là số</td><td></td></tr>
</table>

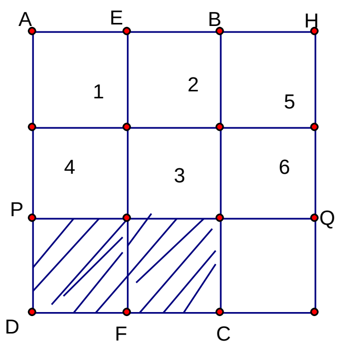
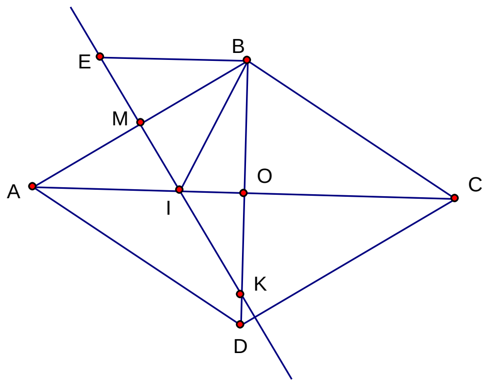
	chính phương nên n là số chẵn, $n \in \mathbb{N}^*$ suy ra $n \in \{2;4;6;8\}$ Khi đó A chính phương, 2^n chính phương suy ra $B = 2^{9-n} + 2^{13-n} + 1$ là số chính phương. Nhận xét số chính phương lẻ chỉ có thể tận cùng là 1; 5; 9. Với n = 2 $\Rightarrow B = 2^7 + 2^{11} + 1 = 2177$ (loại) Với n = 4 $\Rightarrow B = 2^5 + 2^9 + 1 = 545$, thấy B chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 nên B không là số chính phương. Với n = 6 $\Rightarrow B = 2^3 + 2^7 + 1 = 137$ (loại) Với n = 8 $\Rightarrow B = 2 + 2^5 + 1 = 35$ (loại). Vậy n = 9.	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 4 **(3 đ)**	a) Có (O) và (C) tiếp xúc trong tại A nên $\Rightarrow$ A, C, O thẳng hàng. Có (O) và (D) tiếp xúc trong tại B nên $\Rightarrow$ B, D, O thẳng hàng.  Xét (C) có $ANP = \frac{1}{2} ACP$ Có tam giác ACP cân tại C; tam giác AOB cân tại O $\Rightarrow APC = ABO (= CAP) \Rightarrow CP // OB$ $\Rightarrow ACP = AOB \Rightarrow ANP = \frac{1}{2} AOB$ (1) Chứng minh tương tự ta có: $DP // OA \Rightarrow BDP = AOB \Rightarrow BNP = \frac{1}{2} AOB$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $ANP = BNP$ (đ.p.c.m)	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) Gọi H là giao của NP và CD; I là giao của OP và CD. Theo chứng minh ở trên ta có CP // OB; DP // CO suy ra tứ giác CPDO là hình bình hành suy ra IO = IP Có (C) và (D) cắt nhau tại P và N suy ra $CD \perp NP$ (3) và HN = HP do đó HI là đường trung bình của tam giác PNO nên HI // NO hay CD // NO(4) Từ (3) và (4) suy ra $NO \perp NP$ hay $PNO = 90^\circ$ (đ.p.c.m)	0,25 0,25 0,25 0,25
	c) Theo chứng minh phần a) có $ANB = ANP + PNB = AOB \Rightarrow ANB = AOB$ (5) Lập luận để có N, O thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB (6) Từ (5), (6) suy ra điểm N thuộc cung tròn AOB của đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB Do A, B, O cố định nên N thuộc cung tròn cố định (đ.p.c.m)	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 5 **(1 đ)**	Đặt $\frac{(x+y+1)^2}{xy+y+x} = a; a > 0 \Rightarrow A = a + \frac{1}{a}$ Ta chứng minh bất đẳng thức $(x+y+1)^2 \geq 3(xy+y+x)$	0,25

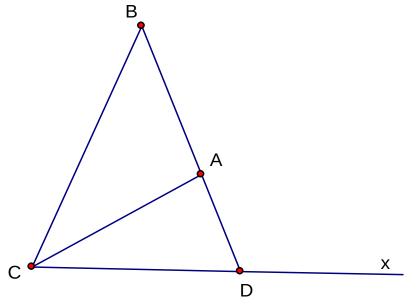
	Có: $(x+y+1)^2 \ge 3(xy+y+x) \Leftrightarrow 2(x+y+1)^2 - 6(xy+y+x) \ge 0$ $\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 0$ Đúng với mọi x; y. Đẳng thức xảy ra khi x = y =1 $\Rightarrow \dfrac{(x+y+1)^2}{xy+y+x} \ge 3 \Rightarrow a \ge 3$ (vì x; y > 0)	0,25
	Có $A = a + \frac{1}{a} = \frac{8a}{9} + (\frac{a}{9} + \frac{1}{a}) \ge \frac{8}{9}.3 + 2.\sqrt{\frac{a}{9}.\frac{1}{a}} = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow A \ge \frac{10}{3}$	0,25
	Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ \frac{a}{9} = \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow a = 3 \Leftrightarrow x = y = 1$ Vậy GTNN của A là $\frac{10}{3}$ đạt được $\Leftrightarrow x = y = 1$	0,25

Đề số 10

Câu	Phần	Nội dung	Điểm
Câu 1 2điểm	1) 1điểm	Ta có : $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ $= (a+b+c)^3 - \left[(a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3\right] =$	0,25
		$(a+b+c)^3 - \left[(a+b+c)^3 - 3(a+b)c(a+b+c) - 3ab(a+b)\right]$	0,25
		$=3(a+b)\left[c(a+b+c)+ab\right]$	0,25
		$= 3(a+b)(a+c)(b+c)$	0,25
	2) 1điểm	Đặt B = $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$,B>0 Ta có $B^2 = 4+\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 4 - \sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2\sqrt{(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}})(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}})}$ $B^2 = 8 + 2\sqrt{16-(10+2\sqrt{5})}$	0,25
		$B^2 = 8 + 2.\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} = 6 + 2\sqrt{5}$	0,25
		$B = \sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2} = \sqrt{5}+1$, Vì B > 0	0,25
		Vậy $A = \sqrt{5}+1-\sqrt{5} = 1$	0,25
Câu 2 2điểm	1) 1điểm	Giả sử $x = x_0$ Là một nghiệm của PT $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$;(1)Ta thấy $x_0 \ne 0$.Vì nếu $x_0 = 0$ dẫn đến 1= 0 vô lí $\Rightarrow x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + ax_0 + 1 = 0 \Rightarrow x_0^2 + ax_0 + b + \frac{a}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = 0$ $\Rightarrow \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 + a\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + b - 2 = 0;$ (2)	0,25

		Đặt $y = x_0 + \frac{1}{x_0}$ ta có PT(2) trở thành $y^2 + ay + b - 2 = 0$ và PT này luôn có nghiệm y thoả mãn ĐK $\|y\| = \left\|x_0 + \frac{1}{x_0}\right\| \ge 2$ hay $y^2 \ge 4$, (3)	0,25
		Ta chứng minh bất đẳng thức sau : $(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$,(*) Thật vậy : Thật vậy (*) $\Leftrightarrow 2abxy \le a^2y^2 + b^2x^2 \Leftrightarrow (ay-bx)^2 \ge 0$ (đúng) Đẳng thức xảy ra khi ay = bx áp dụng Bất đẳng thức (*) ta có $\Rightarrow -y^2 = ay + b - 2 \Rightarrow y^4 = (ay+b-2)^2 \le \left[a^2 + (b-2)^2\right]\left[y^2+1\right]$ $\Rightarrow y^4 - 1 < \left[a^2 + (b-2)^2\right]\left[y^2+1\right]$ $\Rightarrow y^2 - 1 < a^2 + (b-2)^2 \Rightarrow 3 \le y^2 - 1 < a^2 + (b-2)^2 \quad theo\,(3) \Rightarrow a^2 + (b-2)^2 > 3$	0,25 0,25
	2) 1điểm	Giả sử (x_0;y_0) là nghiệm duy nhất của hệ phương trình $\begin{cases} mx^2 + \|x\| - y = 1 - m \,,(1) \\ x^2 + y^2 = 1,(2) \end{cases}$ suy ra (-x_0;y_0) cũng là nghiệm của hệ.Từ đó ta có $-x_0 = x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$	0,25
		Với x_0=0 thay vào (2) suy ra $y_0 = \pm 1$ - Với x_0=0 và y_0 = - 1 thay vào (1) suy ra m = 0 Với m = 0 $\Rightarrow \begin{cases} \|x\| - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| = y + 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| = y + 1 \\ (y+1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| = y + 1 \\ 2y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| = y + 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -1 \end{array}\right. \end{cases}$ Hệ PT không có nghiệm duy nhất .Nên m = 0 loại	0,25
		-Với x_0 =0 và y_0 = 1 thay vào (1) suy ra m = 2 Với m = 2 $\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + \|x\| - y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + \|x\| + 1 = y;(3) \\ x^2 + y^2 = 1\,;(4) \end{cases}$ Từ (3)$\Rightarrow y \ge 1$ và Từ (4) $\Rightarrow y \le 1$ Vậy hệ PT có nghiệm duy nhất (x;y) =(0;1)	0,25
		Vậy m = 2 thì hệ PT có nghiệm duy nhất	0,25
Câu3 2điểm	1) 1điểm	Có $\sqrt{a-b+c} = \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}$ $\Leftrightarrow \sqrt{a-b+c} + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{c} \Leftrightarrow a - b + c + 2\sqrt{b(a-b+c)} + b = a + c + 2\sqrt{ac}$ $\Leftrightarrow b(a-b+c) = ac \Leftrightarrow (a-b)(b-c) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ b = c \end{array}\right.$	0,25
		Nếu a = b và a , c dương .Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{a} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow 2c + a = ac \Leftrightarrow (a-2)(c-1) = 2$ Vì a,b,c nguyên dương nên ta có các trường hợp sau : 1)$\begin{cases} a - 2 = 2 \\ c - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 = b \\ c = 2 \end{cases}$ 2)$\begin{cases} a - 2 = 1 \\ c - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow a = c = 3 = b$	0,25
		Nếu b = c và b,c dương .Ta có	0,25

		$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1 \Leftrightarrow 2a+b=ab \Leftrightarrow (b-2)(a-1)=2$ Vì a,b,c nguyên dương nên ta có các trường hợp sau : 1) $\begin{cases} b-2=2 \\ a-1=1 \end{cases} \Rightarrow a=b=3=c$ 2) $\begin{cases} b-2=2 \\ a-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=4=c \\ a=2 \end{cases}$	
		Vậy các cặp số nguyên dương (a;b;c) thoả mãn là (3;3;3) và(2;4;4)và (4;4;2)	0,25
	2) 1điểm	Ta chứng minh hình chữ nhật kích thước1x3 chứa đúng một ô màu đỏ (1) Thật vậy , nếu điều này không đúng tức là tồn tại một hình chữ nhật k nào đó có số ô màu đỏ khác 1.hay số ô màu đỏ của k là 0 hoặc 2. giả sử số ô màu đỏ của k là 2	0,25 0,25
		Xét hình chữ nhật ABCD theo giả thiết ABCD chứa đúng hai ô màu đỏ nên 1;2;3;4 màu xanh.lại suy ra các ô 5;6 đỏ (xét hình chữ nhật AHPQ) nên hình chữ nhật EHGF có ít nhất 3 ô màu đỏ.Mâu thuẩn. Nếu số ô màu đỏ của k là o thì trái với giả thiết  Vậy (1) được chứng minh	0,25
		Do đó ta chia hình chữ nhật kích thước 2010x2011 bằng 670x2011 hình chữ nhật 1x3và do (1) ta có số ô màu đỏ cần tìm là 2011.670 =1347370	0,25
Câu4 3điểm	 	Tứ giác ABCD là hình thoi nên AC là đường trung trực của đoạn thẳng BD,BD là đường trung trực của AC.Do vậy nếu gọi M,I,K là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng AB với AB,AC,BD thì ta có I,K là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADB,ABC Từ đó ta có KB = r và IB = R.Lấy một điểm E đối xứng với điểm I qua M , Ta có BEAI là hình thoi (vì có hai đường chéo EI và AB vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)	0,25
	1) 1điểm	Ta có $BAI = EBA$ mà $BAI + ABO = 90^0 \Rightarrow EBA + ABO = 90^0$	0,25
		Xét ΔEBK có $EBK = 90^0$,đường cao BM.Theo hệ thức trong tam giác vuông ta có $\frac{1}{BE^2}+\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{BM^2}$	0,25
		Mà BK = r , BE = BI = R; BM = $\frac{a}{2}$ Nên $\Rightarrow \frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{4}{a^2}$ (Đpcm)	0,25

	2) 1điểm	Xét ΔAOB và ΔAMI có $AOB = AMI = 90^0$ và A chung $\Delta AOB \sim \Delta AMI$ $\Rightarrow \frac{AO}{AB} = \frac{AM}{AI} \Rightarrow AO = \frac{AM.AB}{AI} = \frac{AB^2}{2R}$ Chứng minh tương tự ta được $BO = \frac{BM.AB}{BK} = \frac{AB^2}{2r}$	0,25 0,25
		Ta có $S_{ABCD} = 2.AO.OB = 2.\frac{AB^4}{4Rr}$ Mà theo định lí Pi ta go trong tam giác vuông AOB ta có $AB^2 = OA^2 + OB^2 = \frac{1}{4}AB^4\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}\right) \Rightarrow AB^2 = \frac{4R^2r^2}{R^2 + r^2}$ Từ đó ta có : $S_{ABCD} = \frac{8R^3r^3}{(R^2 + r^2)^2}$	0,25 0,25
	3) 1điểm		0,25
		Kẻ tia Cx sao cho CA là tia phân giác của BCx, tia Cx cắt đường thẳng AB tại D.Khi đó Ta có $DCA = ACB = 36^0 \Rightarrow \Delta DCA$ cân tại C , ΔBCD cân tại B $\Rightarrow AB = AC = DC$ .Theo tính chất đường phân giác trong tam giác BCD ta có $\frac{CB}{CD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{BC}{CA} = \frac{CA}{BD - CA}; BC = BD$ $\Rightarrow \frac{BC}{CA} = \frac{CA}{BC - CA} \Leftrightarrow BC(BC - CA) = CA^2 \Leftrightarrow BC^2 - BC.CA - CA^2 = 0$ $\Leftrightarrow \left(\frac{BC}{CA}\right)^2 - \left(\frac{BC}{CA}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{BC}{CA} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$	0,25 0,25
		$\frac{BC}{CA} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Vì $\frac{BC}{CA} > 0$).Vậy $\frac{BC}{AC}$ là số vô tỉ p	0,25
Câu 5 1điểm		Vì $f(x) = ax^2 + bx + c$ thoả mãn với mọi x sao cho $-1 \le x \le 1$ và $\|f(x)\| \le p$ .Nên : - Với x = 1 $\Rightarrow \|a + b + c\| \le p$ (1) - Với x = - 1 $\Rightarrow \|a - b + c\| \le p$ (2) - Với x = 0 $\Rightarrow \|c\| \le p$ (3)	0,25
		Từ (1) và (2) $\Rightarrow \|a + b + c\| + \|a - b + c\| \le 2p$ mà $\|a + b + c\| + \|a - b + c\| \ge 2\|b\|$ Nên suy ra : $\|b\| \le p$	0,25

		Ta có $\left\|-b-c\right\|=\left\|b+c\right\|\le\left\|c\right\|+\left\|b\right\|\le p+p=2p$ Kết hợp với (1): $\left\|a\right\|\le\left\|a+b+c\right\|+\left\|-b-c\right\|\le 3p\Rightarrow\left\|a\right\|\le 3p$	0,25
		$\Rightarrow\left\|a\right\|+\left\|b\right\|+\left\|c\right\|\le 5p$ .Vậy số q nhỏ nhất là 5	0,25