

PHẦN 1: MỞ ĐẦU

I. Lý do chọn đề tài .

Toán học có nguồn gốc từ thực tế và là chìa khóa trong hầu hết các hoạt động của con người, nó có mặt ở khắp nơi. Toán học là kết quả của sự trừu tượng hóa các sự vật hiện tượng trong thực tế trên những phương diện khác nhau và có vai trò rất quan trọng trong việc thực hiện mục tiêu chung của giáo dục phổ thông. Mặc dù là ngành khoa học có tính trừu tượng cao nhưng toán học có mối liên hệ chặt chẽ với thực tế và có thể ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau: là công cụ để học tập các môn học trong nhà trường , nghiên cứu nhiều ngành khoa học và là công cụ để hoạt động trong sản xuất và đời sống thực tế.

Bên cạnh đó thực trạng học toán ở các trường phổ thông, đa số các em chỉ học lý thuyết và làm bài tập mà thiếu thực hành và liên hệ kiến thức với thực tế. Học sinh đang học toán chỉ giới hạn trong phạm vi bốn bức tường của lớp học , thành thử không để ý đến những tương quan toán học quen thuộc trong thế giới những sự vật hiện tượng xung quanh, không biết ứng dụng những kiến thức toán học đã thu nhận vào thực tế.

Với sự đổi mới mạnh mẽ của bộ giáo dục và đào tạo về cách dạy và học trong trường phổ thông, đặc biệt là có thể đưa toán thực tế nói chung và bài toán thực tế về khối nón, khối trụ, khối cầu nói riêng vào các đề thi môn toán THPT Quốc Gia 2017 và những năm tiếp theo.

Để giúp các em học sinh có cách nhìn mới mẻ các bài toán thể tích khối đa diện và có thể ứng dụng toán học vào thực tế và đặc biệt giúp các em có một tài liệu ôn thi THPT Quốc Gia về bài toán thực tế tôi mạnh dạn đưa ra ý tưởng “ ứng dụng thể tích khối nón, khối trụ, khối cầu vào giải các bài thực tế ”.

II. Mục đích nghiên cứu.

- Mục đích của sang kiến kinh nghiệm này là giúp các em học sinh tìm hiểu mối liên hệ của một số kiến thức trong chương trình toán phổ thông với thực tiễn

- Giúp học sinh hứng thú hơn trong việc giải các bài tập khó về thể tích khối nón, khối trụ, khối cầu đồng thời giúp các em sáng tạo hơn trong ứng dụng toán học trong thực tế .

III. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu.

1. Đối tượng nghiên cứu.

- Học sinh lớp 12, học sinh dự thi vào các trường Đại học và Cao đẳng.
- Kiến thức về thể tích khối nón, khối trụ, khối cầu lớp 12 trung học phổ thông.

2. Phạm vi nghiên cứu :

- Hình học lớp 12 phổ thông trung học.
- Sách giáo khoa và tài liệu tham khảo luyện thi đại học, tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi ,các đề thi thử của các trường , sở giáo dục và các đề thi vào các trường Đại học và Cao đẳng những năm trước.

IV. Phương pháp nghiên cứu.

- Phương pháp nghiên cứu lí luận.
- Phương pháp nghiên cứu thông qua thực tế giảng dạy.

V. Những điểm mới của sáng kiến kinh nghiệm.

- Có hệ thống bài tập hay, khó và mới.
- Giúp các em hình thành tư duy giải các bài toán khó về thể tích khối nón, khối trụ, khối cầu
- Giúp các em học sinh nhìn nhận rõ hơn về ứng dụng toán học vào thực tế đời sống.

PHẦN 2 - NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

“ỨNG DỤNG THỂ TÍCH KHỐI NÓN, KHỐI TRỤ, KHỐI CẦU VÀO GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ”

I. Cơ sở lý luận.

1. Khái niệm khối nón, khối trụ, khối cầu.
2. Phương pháp tính diện tích, thể tích khối nón, khối trụ, khối cầu.
3. Kỹ năng đánh giá bất đẳng thức trong bài toán thể tích lớn nhất, nhỏ nhất.

II. Tình hình thực tế trước khi thực hiện đề tài.

Với sự thay đổi của kì thi THPT Quốc Gia 2017, các bài toán thực tế có thể sẽ được đưa vào các đề thi. Như đề thi minh họa lần 1 và lần 2 của Bộ Giáo Dục và Đào tạo đều có các bài toán thực tế nói chung và bài toán ứng dụng thể tích khối nón, khối trụ, khối cầu để giải toán thực tế nói riêng. Trước khi thực hiện đề tài này nhiều học sinh có tâm lý sợ các bài tập về thể tích khối nón, khối trụ, khối cầu đặc biệt là các bài toán liên hệ thực tế.

Đây là một dạng toán mới và khó nên đa số học sinh khi gặp dạng toán này còn lúng túng và không giải được. Học sinh chưa biết phối hợp một cách khéo léo giữa lý thuyết, các bài tập cơ bản để hình thành tư duy để giải quyết các bài toán khó, nhất là các bài toán thực tế. Đặc biệt dạng toán thực tế nguồn tài liệu còn rất hạn chế.

Từ thực tế trên, sau đây Tôi xin trình bày phương pháp ứng dụng thể tích khối nón, khối trụ, khối cầu vào giải các bài toán thực tế.

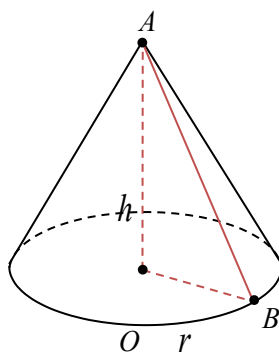
III. Các dạng toán và phương pháp giải

1. Kiến thức cơ bản

Khối nón: Diện tích xung quanh của khối nón $S_{xq} = 2\pi rl$

Diện tích toàn phần của khối trụ $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}}$

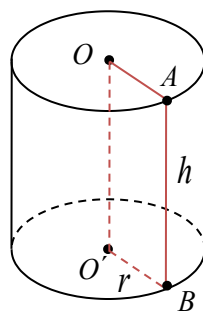
Thể tích của khối trụ $V = Bh = \pi r^2 h$



Khối trụ: Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi rl$

Diện tích toàn phần của khối trụ $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}}$

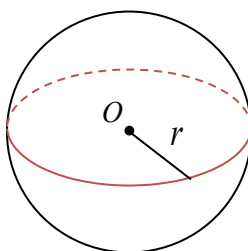
Thể tích của khối trụ $V = Bh = \pi r^2 h$



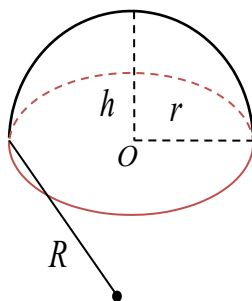
□

Khối cầu: Diện tích của khối cầu $S = 4\pi r^2$

Thể tích của khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



Thể tích chỏm cầu $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$



2. Các dạng toán và phương pháp giải

Vấn đề 1 : Ứng dụng khối nón vào giải bài toán thực tế .

Bài 1: Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích 27cm^3 . Với chiều cao h và bán kính đáy là r . Tìm r để lượng giấy tiêu thụ ít nhất.

Giải

Ta có: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{3V}{\pi r^2}$ nên độ dài đường sinh là:

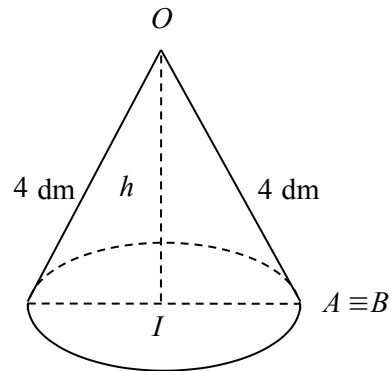
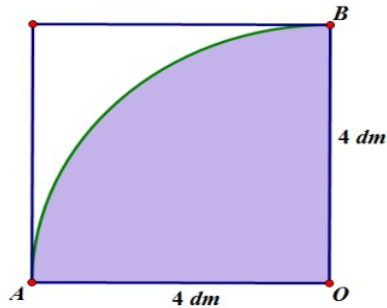
$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{3V}{\pi r^2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{81}{\pi r^2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^4} + r^2}$$

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi r l = \pi r \sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^4} + r^2} = \pi \sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^2} + r^4}$

Áp dụng BĐT Cauchy ta được giá trị nhỏ nhất là khi $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.

Bài 2: Từ miếng tôn hình vuông cạnh bằng 4 dm, người ta cắt ra hình quạt tâm O bán kính $OA = 4$ dm (xem hình) để cuộn lại thành một chiếc phễu hình nón (khi đó OA trùng với OB). Tính chiều cao của chiếc phễu.

Giải



Ta có cung AB có độ dài bằng $\frac{\pi}{2} \cdot 4 = 2\pi$.

Dựa vào đề bài ta thấy có thể tạo thành hình nón đỉnh O , đường sinh OA .

Để cuộn lại thành một chiếc phễu hình nón (khi đó OA trùng với OB) thì chu vi C đường tròn đáy bằng độ dài cung AB bằng 2π . Khi đó bán kính đáy là

$$C = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

Xét tam giác OIA vuông tại I có $OA = 4$ dm, $IA = R = 1$ dm.

$h = OI$ trong đó $OI^2 = OA^2 - IA^2 = 4^2 - 1^2 = 15 \Rightarrow OI = \sqrt{15}$ Vậy $h = \sqrt{15}$.

Bài 3: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50cm . Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Tính bán kính của hình nón.

Giải

Đặt $a = 50\text{ cm}$. Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là x, y ($x, y > 0$).

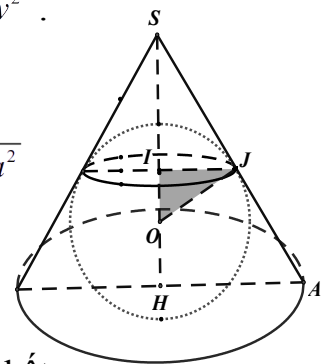
Ta có $SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Khi đó diện tích toàn phần của hình nón là $S_p = \pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2}$.

Theo giả thiết ta có $\pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2} = \pi a^2 \Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 = a^2$

$$\Leftrightarrow x \sqrt{x^2 + y^2} = a^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 (x^2 + y^2) = a^4 + x^4 - 2a^2 x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^4}{y^2 + 2a^2}$$

Khi đó thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^4}{y^2 + 2a^2} \cdot y = \frac{1}{3} \pi a^4 \cdot \frac{y}{y^2 + 2a^2}$

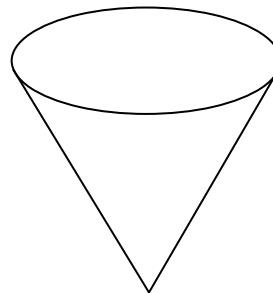
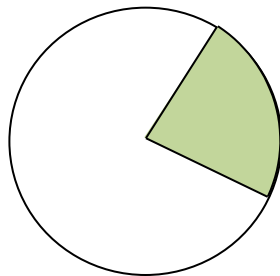


V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y^2 + 2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\text{Ta có } \frac{y^2 + 2a^2}{y} = y + \frac{2a^2}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{2a^2}{y}} = 2\sqrt{2}a$$

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y = \frac{2a^2}{y}$, tức là $y = a\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2} = 25\text{ cm}$

Bài 4: Với một miếng tôn hình tròn có bán kính bằng $R = 6\text{cm}$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này và gấp phần còn lại thành hình nón (Như hình vẽ). Tính thể tích lớn nhất của hình nón có khi người ta cắt cung tròn của hình quạt.



Giải

Gọi x ($x > 0$) là chiều dài cung tròn của phần được xếp làm hình nón.

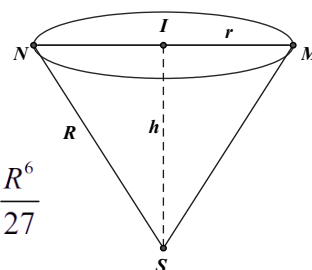
Như vậy, bán kính R của hình tròn sẽ là đường sinh của hình nón và đường tròn đáy của hình nón sẽ có độ dài là x . Bán kính r của đáy được xác định bởi đẳng thức $2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$.

Chiều cao của hình nón là: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$.

Thể tích của khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$.

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có:

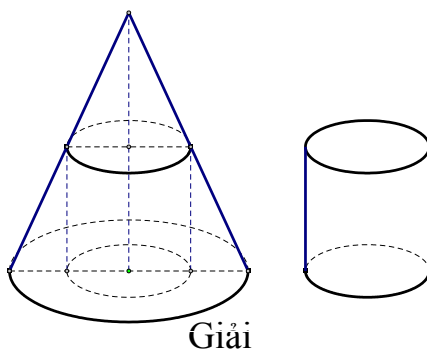
$$V^2 = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \leq \frac{4\pi^2}{9} \left(\frac{\frac{x^2}{8\pi^2} + \frac{x^2}{8\pi^2} + R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}{3} \right) = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{R^6}{27}$$



Do đó V lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{x^2}{8\pi^2} = R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} R\sqrt{6} \Leftrightarrow x = 6\sqrt{6}\pi$.

(Lưu ý bài toán có thể sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, tuy nhiên lời giải bài toán sẽ dài hơn)

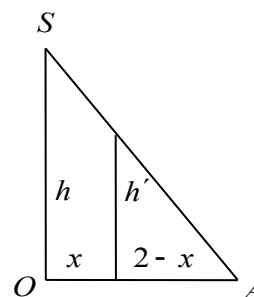
Bài 5: Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r = 2m$, chiều cao $h = 6m$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Tính V .



Giả sử khối trụ có bán kính đáy và đường cao lần lượt là r, h' ($0 < x < 2; 0 < h' < 6$)

Ta có: $\frac{h'}{6} = \frac{2-x}{2} \Leftrightarrow h' = 6 - 3x$

Thể tích khối trụ: $V = \pi x^2 h' = \pi x^2 (6 - 3x) = 6\pi x^2 - 3\pi x^3$



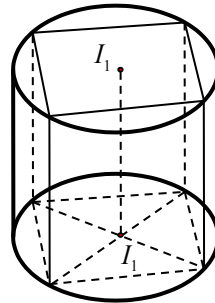
$$V'(x) = 12\pi x - 9\pi x^2; V'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Khi đó ta có thể suy ra được với $x = \frac{4}{3}$ thì V đạt giá trị lớn nhất bằng $V = \frac{32\pi}{9} (\text{m}^2)$

Vấn đề 2 : Ứng dụng khối trụ vào giải bài toán thực tế .

Bài 1: Một khối gỗ hình trụ có chiều cao $2m$, người ta xẻ bớt phần vỏ của khối gỗ đó theo bốn mặt phẳng song song với trục để tạo thành một khối gỗ hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất bằng 1m^3 . Tính đường kính của khối gỗ hình trụ đã cho.

Giải



Ta có diện tích mặt của khối gỗ hình hộp nằm ở hai đầu là $S = \frac{1}{2}$.

Mặt này là hình vuông (vì trong tất cả các hình chữ nhật nội tiếp một hình tròn thì hình vuông có diện tích lớn nhất), có cạnh là $a = \sqrt{S} = \frac{1}{2}$.

Đường kính của khối gỗ hình trụ chính là đường chéo của mặt hình vuông.

Do đó đường kính là $d = R\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1 \text{ m}$.

Bài 2 :Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r . Tính tỉ số $\frac{h}{r}$ sao

cho chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất?

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử thể tích của hình trụ là $V = 1$ và giá cho mỗi đơn vị diện tích bằng 1.

Theo bài ta có $h = \frac{1}{\pi r^2} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{1}{\pi r^3}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_1 = 2\pi r \cdot h = 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} = \frac{2}{r}$.

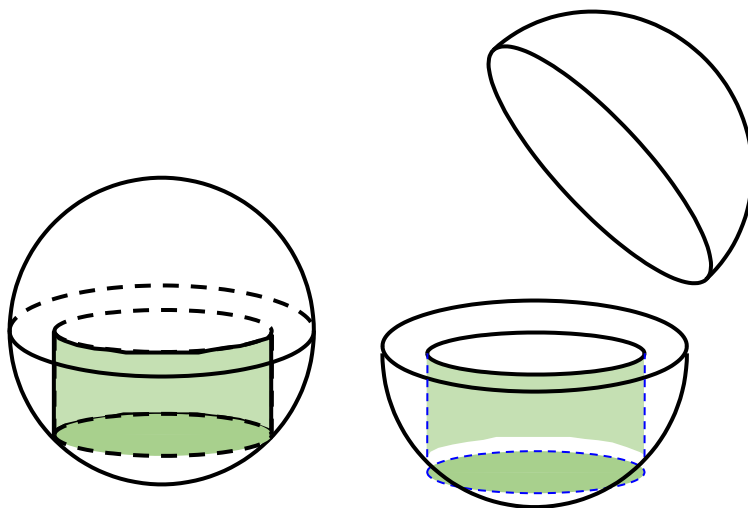
Diện tích mặt đáy $S_2 = \pi r^2$.

Suy ra giá vật liệu để làm hình trụ là $f = \frac{2}{r} \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2\pi r^2 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + 6\pi r^2 \geq 3\sqrt[3]{12\pi}$

$$f = \frac{2}{r} \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2\pi r^2 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + 6\pi r^2 \geq 3\sqrt[3]{12\pi}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{r} = 6\pi r^2 \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{6\pi}$ nên $\frac{h}{r} = \frac{1}{\pi r^3} = \frac{1}{\pi \frac{1}{6\pi}} = 6$

Bài 3: Một công ty mỹ phẩm chuẩn bị ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai với thiết kế một khối cầu như viên ngọc trai, bên trong là một khối trụ nằm trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng như hình vẽ. Theo dự kiến, nhà sản xuất có dự định để khối cầu có bán kính là $R = 3\sqrt{3}cm$. Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem để thể tích thực ghi trên bìahộp là lớn nhất (với mục đích thu hút khách hàng).



Giải

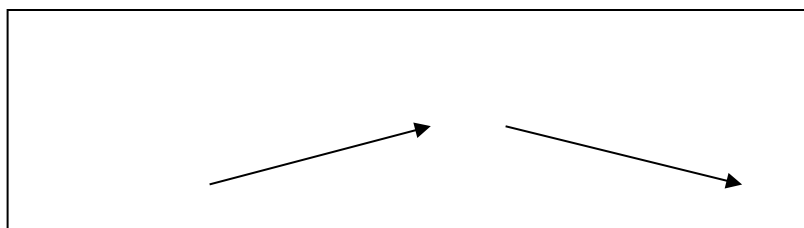
Xét mặt cắt như hình vẽ

Gọi h, r ($h > 0, r > 0$) lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối trụ nằm trong nửa khối cầu

Ta có $r^2 + h^2 = 27 \Leftrightarrow r^2 = 27 - h^2$ Ta có $V = \pi r^2 h = \pi h (27 - h^2) = -\pi h^3 + 27\pi h$.

Vậy ta có $V' = -3\pi h^2 + 27\pi$; $V' = 0 \Leftrightarrow h = 3$.

Ta có bảng biến thiên



Vậy thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem là $54(\text{cm}^3)$

Bài 4: Một công ty dự kiến chi 1 tỉ đồng để sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ có dung tích 5 lít. Biết rằng chi phí để làm mặt xung quanh của thùng đó là 100.000 đ/m², chi phí để làm mặt đáy là 120.000 đ/m². Hãy tính số thùng sơn tối đa mà công ty đó sản xuất được. (giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể).

Giải

Gọi chiều cao hình trụ là h ($h > 0$)(m). Bán kính đáy hình trụ là x ($x > 0$)(m)

Thể tích khối trụ là : $V = \pi x^2 h = \frac{5}{1000} \Rightarrow h = \frac{5}{1000\pi x^2}(\text{m})$.

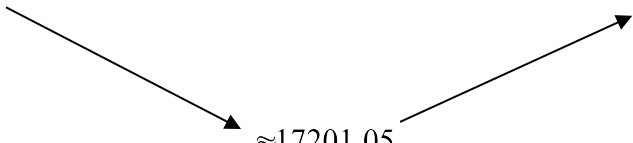
Diện tích mặt xung quanh là : $S_{xq} = 2\pi x h = \frac{1}{100x}$.

Diện tích hai đáy là : $S_{\text{đáy}} = 2\pi x^2$

Số tiền cần làm một thùng sơn là : $f(x) = \frac{1000}{x} + 240000\pi x^2$ ($x > 0$).

Ta có : $f'(x) = -\frac{1000}{x^2} + 480000\pi x$ khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{480\pi}}$

Bảng biến thiên :

x	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{480\pi}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Vậy với số tiền 1 tỉ đồng thì công ty có thể sản xuất tối đa là : $\frac{10^9}{17201,05} \approx 58135$ thùng.

Bài 5: Một người thợ xây, muốn xây dựng một bồn chứa nước hình trụ tròn với thể tích là 150 m³ (như hình vẽ bên). Đáy làm bằng bê tông, thành làm bằng tôn và bề làm bằng nhôm. Tính chi phí thấp nhất để bồn chứa nước (làm tròn đến hàng nghìn). Biết giá thành các vật liệu như sau: bê tông 100 nghìn đồng một m², tôn 90 một m² và nhôm 120 nghìn đồng một m².

Giải

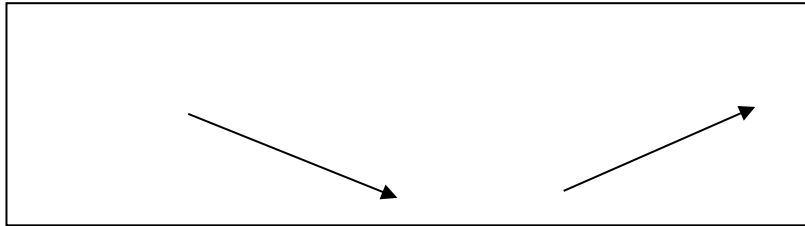
Gọi r, h (m^2) ($r > 0, h > 0$) lần lượt là bán kính đường tròn đáy và đường cao của hình trụ. theo đề ta có $\pi r^2 h = 150 \Leftrightarrow h = \frac{150}{\pi r^2}$.

Khi đó chi phí làm nên bồn chứa nước được xác định theo

hàm số $f(r) = 220\pi r^2 + 90.2\pi r \frac{150}{\pi r^2} = 220\pi r^2 + \frac{27000}{r}$ (nghìn đồng).

$$f'(r) = 440\pi r - \frac{27000}{r^2}; f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{675}{11\pi}} = a$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào BBT ta suy ra chi phí thấp nhất là $f(a) = f\left(\sqrt[3]{\frac{675}{11\pi}}\right) \approx 15038,38797$ nghìn đồng.

Bài 6: Một xưởng làm cơ khí nhận làm những chiếc thùng phi với thể tích theo yêu cầu là 2000π lít mỗi chiếc. Tính bán kính đáy và chiều cao của chiếc thùng để tiết kiệm vật liệu nhất?

Giải

Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của thùng.

Gọi V, S_{tp} lần lượt là thể tích và diện tích toàn phần của thùng.

$$V = 2000\pi (\text{lít}) = 2000\pi (\text{dm}^3) = 2\pi (\text{m}^3). \text{ Mà } V = \pi R^2 h = 2\pi \Rightarrow h = \frac{2}{R^2}$$

$$S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + 2\pi R \frac{2}{R^2} = 2\left(\pi R^2 + \frac{2\pi}{R}\right) = 2\left(\pi R^2 + \frac{\pi}{R} + \frac{\pi}{R}\right) \geq 2\sqrt[3]{\pi R^2 \cdot \frac{\pi}{R} \cdot \frac{\pi}{R}} = 2\pi.$$

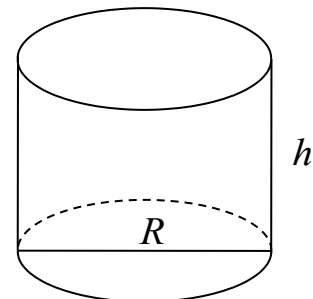
Để tiết kiệm vật liệu nhất thì S_{tp} nhỏ nhất $\Leftrightarrow \pi R^2 = \frac{\pi}{R} \Leftrightarrow R = 1 \Rightarrow h = 2$.

Bài 7: Khi sản xuất vỏ lon sữa hình trụ, nhà sản xuất luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là thấp nhất, tức diện tích toàn phần của vỏ lon hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích của lon sữa bằng 1 dm^3 thì nhà sản xuất cần phải thiết kế hình trụ có bán kính đáy R bằng bao nhiêu để chi phí nguyên liệu thấp nhất?

Giải

Diện tích toàn phần của vỏ lon là $S_{tp} = 2\pi R h + 2\pi R^2$ (1)

Theo giả thiết $V = \pi R^2 h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$ (2)



Từ (1) và (2) ta có $S_{tp} = \frac{2}{R} + 2\pi R^2$.

Xét hàm số $S(R) = \frac{2}{R} + 2\pi R^2 \Rightarrow S'(R) = -\frac{2}{R^2} + 4\pi R$

Ta có $S'(R) = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

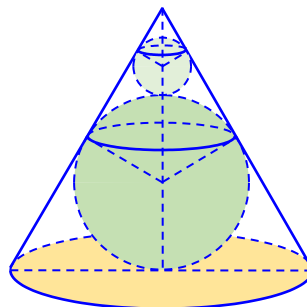
Bảng biến thiên

R	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$	$-\infty$	
$S'(R)$			-	0	+
$S(R)$			$2.\sqrt[3]{2\pi} + 2\pi.\sqrt[3]{4\pi^2}$		

Vậy $\text{Min } S(R) = 2\sqrt[3]{2\pi} + 2\pi\sqrt[3]{4\pi^2}$ tại $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

Vấn đề 3 : Ứng dụng khối cầu vào giải bài toán thực tế .

Bài 1: Người ta chế tạo ra một món đồ chơi cho trẻ em theo các công đoạn như sau: Trước tiên, chế tạo ra một mặt nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\beta = 60^\circ$ bằng thủy tinh trong suốt. Sau đó đặt hai quả cầu nhỏ bằng thủy tinh có bán kính lớn, nhỏ khác nhau sao cho 2 mặt cầu tiếp xúc với nhau và đều tiếp xúc với mặt nón. Quả cầu lớn tiếp xúc với cả mặt đáy của mặt nón. Cho biết chiều cao của mặt nón bằng 9cm. Bỏ qua bề dày của những lớp vỏ thủy tinh, hãy tính tổng thể tích của hai khối cầu.



Lời giải

Gọi R là bán kính của hình nón. r_1, r_2 lần lượt là bán kính quả cầu lớn và quả cầu nhỏ.

Thiết diện qua trục của hình nón như sau:

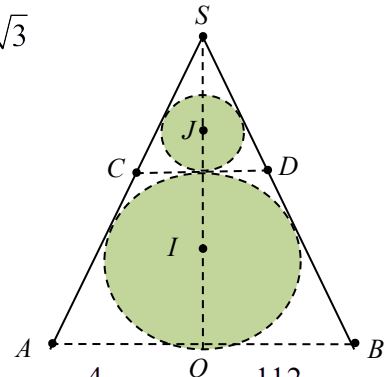
$$SAB \text{ là tam giác đều nên } SO = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{2SO}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Gọi } I \text{ là tâm tam giác } SAB, r_1 = \frac{SO}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

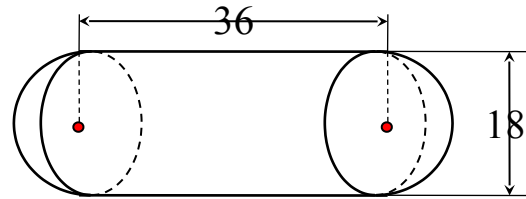
$$\text{Tam giác } SCD \text{ có chiều cao là } SH = \frac{SO}{3} = 3$$

$$\text{Gọi } J \text{ là tâm tam giác } SCD, r_2 = \frac{SH}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{Tổng thể tích hai quả cầu là: } V = \frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi(r_1^3 + r_2^3) = \frac{4}{3}\pi(27 + 1) = \frac{112}{3}\pi.$$



Bài 2: Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ như hình vẽ bên. Các kích thước được ghi (cùng đơn vị dm). Tính thể tích của bồn chứa.



Giải

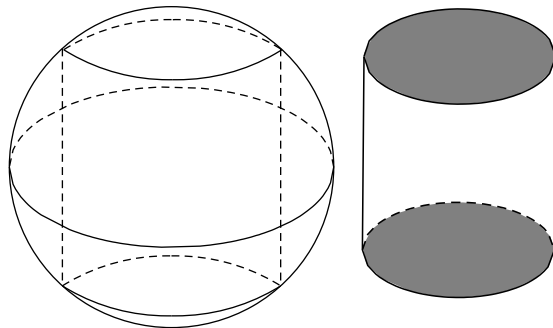
Gọi V_1 là thể tích hình trụ có đường cao $36 (dm)$ và bán kính đường tròn đáy $9 (dm)$.

V_2 là thể tích nửa hình cầu có bán kính $9 (dm)$.

$$\text{Ta có } V_1 = \pi \cdot 9^2 \cdot 36 = 2916\pi (dm^3) \text{ và } V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot 9^3 = 486\pi (dm^3)$$

$$\text{Do đó } V = V_1 + 2V_2 = 3888\pi (dm^3)$$

Bài 3: Một khối đá có hình là một khối cầu có bán kính R , người thợ thủ công mỹ nghệ cần cắt và gọt viên đá đó thành một viên đá cảnh có hình dạng là một khối trụ. Tính thể tích lớn nhất có thể của viên đá cảnh sau khi đã hoàn thiện.



Giải

Giả sử $2x$ là chiều cao hình trụ ($0 < x < R$) (xem hình vẽ)

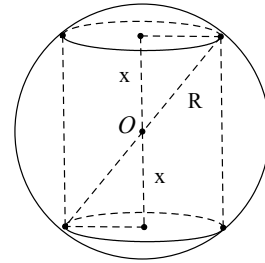
Bán kính của khối trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Thể tích khối trụ là: $V = \pi(R^2 - x^2)2x$.

Xét hàm số $V(x) = \pi(R^2 - x^2)2x$, ($0 < x < R$)

có $V'(x) = 2\pi(R^2 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Bảng biến thiên:



Bài 4: Một khối cầu bằng thủy tinh có bán kính 4 dm, người ta muốn cắt bỏ một chỏm cầu có diện tích mặt cắt là $15\pi(\text{dm}^2)$ để lấy phần còn lại làm bể nuôi cá. Hỏi thể tích nước tối đa mà bể cá này có thể chứa là bao nhiêu?

Giải

Gọi V, V_C, V_{Ch} lần lượt là thể tích tối đa của bể nuôi cá có thể chứa, thể tích khối cầu bằng thủy tinh và thể tích chỏm cầu bị cắt bỏ.

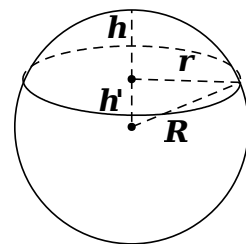
Khi đó: $V = V_C - V_{Ch} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$

Ta có: $\begin{cases} R = 4(\text{dm}) \\ S = 4\pi r^2 = 15\pi(\text{dm}^2) \Rightarrow r^2 = 15 \end{cases}$

Khi đó: $h' = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{4^2 - 15} = 1 \Rightarrow h = R - h' = 3(\text{dm})$

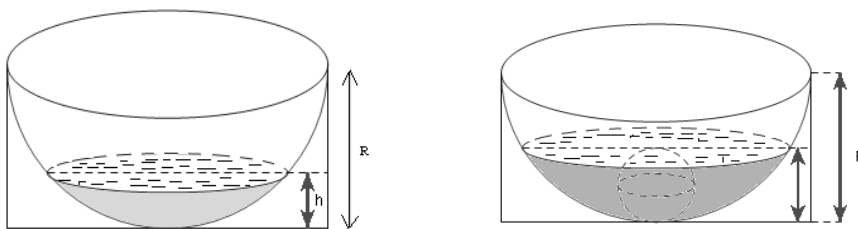
Vậy thể tích nước tối đa mà bể cá này có thể chứa là:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 - \pi \cdot 3^2 \left(4 - \frac{3}{3} \right) = \frac{175}{3}\pi(\text{dm}^3)$$



Bài 5: Một chậu nước hình bán cầu bằng nhôm có bán kính $R = 10\text{cm}$, đặt trong một khung hình hộp chữ nhật (hình 1). Trong chậu có chứa sẵn một khối nước hình chỏm cầu có chiều cao $h = 4\text{cm}$. Người ta bỏ vào chậu một viên bi hình cầu bằng kim loại thì mặt nước dâng lên vừa phủ kín viên bi (hình 2). Tính bán kính của viên bi (lấy số gần đúng). (Cho biết thể tích khối chỏm cầu là $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$)

Giải



Gọi x là bán kính viên bi hình cầu. Điều kiện: $0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5$

Thể tích viên bi là $V_{bi} = \frac{4}{3}\pi x^3$.

Thể tích khối nước hình chỏm cầu khi chưa thả viên bi vào

$$V_1 = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = 16\pi \left(10 - \frac{4}{3} \right) = \frac{416\pi}{3}$$

Khi thả viên bi vào thì khối chỏm cầu gồm khối nước và viên bi có

$$\text{thể tích là: } V_2 = \pi (2x)^2 \left(R - \frac{2x}{3} \right) = \frac{4\pi x^2 (30 - 2x)}{3}$$

Ta có phương trình:

$$V_2 - V_1 = V_{bi} \Leftrightarrow \frac{4\pi x^2 (30 - 2x)}{3} - \frac{416\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Leftrightarrow 4\pi x^2 (30 - 2x) - 416\pi = 4\pi x^3$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 30x^2 + 104 = 0$$

Giải phương trình ta có các nghiệm: $x_1 \approx 9,6257 > 5$ (loại); $x_2 \approx 2,0940 < 5$ (thỏa mãn), và $x_3 \approx -1,8197$ (loại).

Vậy bán kính viên bi là: $r \approx 2,09$ (cm).

PHẦN 3: BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Cối xay gió của Đôn ki hô tê (từ tác phẩm của Xéc van téc). Phần trên của cối xay gió có dạng một hình nón. Chiều cao của hình nón là 40 cm và thể tích của nó là 18000 cm^3 . Tính bán kính của đáy hình nón (làm tròn đến kết quả chữ số thập phân thứ hai).

Bài 2: Người ta xếp 7 viên bi có cùng bán kính r vào một cái lọ hình trụ sao cho tất cả các viên bi đều tiếp xúc với đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với 6 viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính diện tích đáy của cái lọ hình trụ.

Bài 3: Một công ty dự kiến làm một đường ống thoát nước thải hình trụ dài 1 km , đường kính trong của ống (không kể lớp bê tông) bằng 1 m ; độ dày của lớp bê tông

bằng 10cm . Biết rằng cứ một khối bê tông phải dùng 10 bao xi măng. Tính số bao xi măng công ty phải dùng để xây dựng đường ống thoát nước (lấy số gần đúng).

Bài 4: Một cốc nước có dạng hình trụ đựng nước chiều cao 12cm , đường kính đáy 4cm , lượng nước trong cốc cao 8cm . Thả vào cốc nước 3 viên bi có cùng đường kính 2cm . Hỏi nước dâng cao cách miệng cốc bao nhiêu xăng-ti-mét?

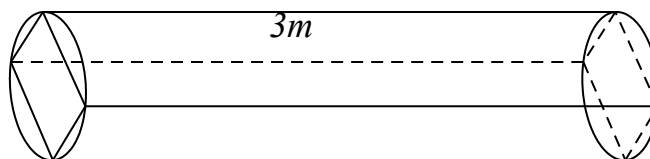
Bài 5: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m , có bán kính đáy 1m , với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5\text{m}$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3)

Bài 6: Trong một chiếc hộp hình trụ người ta bỏ vào đó 2016 quả banh tennis, biết rằng đáy của hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả banh và chiều cao hình trụ bằng 2016 lần đường kính của quả banh. Gọi V_1 là tổng thể tích của 2016 quả banh và V_2 là thể tích của khối trụ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

Bài 7: Người ta cần chế tạo một ly dạng hình cầu tâm O, đường kính $2R$. Trong hình cầu có một hình trụ tròn xoay nội tiếp trong hình cầu. Nước chỉ chứa được trong hình trụ. Tính bán kính đáy r của hình trụ để ly chứa được nhiều nước nhất.

Bài 8: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m , có bán kính đáy 1m , với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5\text{m}$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3)

Bài 9: Một khúc gỗ hình trụ có chiều cao 3m , đường kính đáy 80cm . Người ta cưa 4 tấm bìa để được một khối lăng trụ đều nội tiếp trong khối trụ. Tính tổng thể tích của 4 tấm bìa bị cưa, xem mạch cưa không đáng kể.



Bài 10: Một hãng dược phẩm cần một số lọ đựng thuốc dạng hình trụ với dung tích $16\pi \text{ cm}^3$. Tính bán kính đáy R của lọ để ít tốn nguyên liệu sản xuất lọ nhất

Bài 11: Cần xẻ một khúc gỗ hình trụ có đường kính $d = 40\text{ cm}$ và chiều dài $h = 3\text{ m}$ thành một cái xà hình hộp chữ nhật có cùng chiều dài. Tính lượng gỗ tối thiểu bị bỏ đi (lấy giá trị gần đúng)

Bài 12: Một cốc nước có dạng hình trụ chiều cao là 15cm , đường kính đáy là 6cm , lượng nước ban đầu trong cốc cao 10cm . Thả vào cốc nước 5 viên bi hình cầu có cùng đường kính là 2cm . Hỏi sau khi thả 5 viên bi, mực nước trong cốc cách miệng cốc bao nhiêu cm ? (Kết quả làm tròn sau dấu phẩy 2 chữ số).

PHẦN 4: KẾT QUẢ THỰC HIỆN

Quá trình vận dụng sáng kiến kinh nghiệm này của bản thân tôi đã và đang đạt được một số kết quả hết sức khả quan, tích cực. Qua những lần kiểm tra – đánh giá, tôi thấy được tỉ lệ số học sinh giải các bài toán khó ngày càng tăng. Từ những học sinh khi gặp những bài toán thực tế là bỏ qua không đọc đề thì đã dần làm được một số bài. Với sáng kiến này của Tôi đã giúp các em học sinh có thêm những kiến thức kĩ năng khi giải các bài toán thực tế trong ứng dụng khối nón, khối trụ, khối cầu. Đồng thời giúp các em hứng thú hơn trong giải các bài toán thực tế và việc vận dụng toán học vào thực tế. Các em không còn quá lúng túng, e dè, lo ngại khi giải bài toán về khối nón, khối trụ, khối cầu liên quan tới bài toán thực. Đặc biệt nó sẽ giúp ích cho các em tự tin hơn có thêm kỹ năng giải toán để bước vào kì thi THPT Quốc Gia.

Đó chính là những nguyên nhân đi đến những kết quả tương đối khả quan của đợt khảo sát vừa qua. Cụ thể:

Khi chưa áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

Lớp	Tổng Số bài	8.0 – 10.0		6,5 – 7,9		5.0 – 6.4		3.5 – 4.9		0.0 – 3.4	
		SL	%	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
12A3	43	0	0	3	7	7	16,3	13	30,2	20	46,5
Tổng	43	Trên TB: 10 chiếm 23,3%						Dưới TB 33 chiếm 76,7%			

Khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

Lớp	Tổng Số bài	8.0 – 10.0		6,5 – 7,9		5.0 – 6.4		3.5 – 4.9		0.0 – 3.4	
		SL	%	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
12A3	43	3	7	10	23,3	13	30,2	10	23,3	7	16,2
Tổng	43	Trên TB: 26 chiếm 60,5%						Dưới TB: 17 chiếm 39,5%			

PHẦN 5: KẾT LUẬN.

Ứng dụng thể tích khối nón, khối trụ, khối cầu vào giải các bài toán thực tế là dạng toán khó và cũng mới mẻ với học sinh. Có thể dạng toán thực tế này sẽ được Bộ Giáo Dục và Đào tạo đưa vào kì thi THPT Quốc Gia năm 2017 và những năm tới. Qua chuyên đề này, học sinh sẽ có nhiều kĩ năng và kinh nghiệm trong việc giải các bài toán thực tế trong ứng dụng thể tích khối đa diện. Chuyên đề này cũng giúp các em học sinh hiểu rõ được tầm quan trọng trong áp dụng toán học vào thực tế. Đề tài này của tôi chắc hẳn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong quý thầy cô, đồng nghiệp cùng đọc và đóng góp ý kiến cho tôi, để đề tài của tôi được hoàn thiện hơn.

Xin chân trọng cảm ơn!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa lớp 11, lớp 12 THPT.
2. Đề minh họa Bộ giáo dục và đào tạo lần 1, lần 2 năm 2017.
3. Đề thi thử THPTQG của các trường THPT , các sở giáo dục năm 2016 - 2017.
- 4 .Nguyễn Văn Bello (2005), Góp phần rèn luyện cho học sinh năng lực vận dụng kiến thức toán học để giải quyết một số bài toán có nội dung thực tiễn, luận văn Thạc sĩ giáo dục học, trường Đại học Vinh

XÁC NHẬN CỦA HỆ TRƯỞNG	<i>Thanh Hoá, ngày 25 tháng 05 năm 2017</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác.
Lê Quốc Tuấn	Lê Đức Huy