

TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN MỘT KHOẢNG

I. Phương pháp

1. Xét hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

• Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

• Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a > 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m ?$

• Để $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a < 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m ?$

Lưu ý: Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$

• $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

• $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

2. Xét hàm số nhất biến $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

• Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}, \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

• Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = \frac{a.d - b.c}{(cx+d)^2}$

• Để $f(x)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c > 0 \Rightarrow m ?$

• Để $f(x)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c < 0 \Rightarrow m ?$

• Để $f(x)$ đồng biến trên $(h;k) \Leftrightarrow \begin{cases} a.d - b.c > 0 \\ (h;k) \subset D \end{cases} \Rightarrow m ?$

• Để $f(x)$ nghịch biến trên $(h;k) \Leftrightarrow \begin{cases} a.d - b.c < 0 \\ (h;k) \subset D \end{cases} \Rightarrow m ?$

3. Chú ý: Một số bài toán thì ta phải cô lập tham số m , tức là biến đổi $f'(x,m) \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow g(x) \geq m (\leq m)$

Bước 1. Xác định tham số để hàm số f xác định trên khoảng đã cho.

Bước 2. Tính $f'(x,m)$

Bước 3. Để giải bài toán dạng này, ta thường sử dụng các tính chất sau.

Nếu hàm số đồng biến trên $(a;b)$ thì

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in [a;b] \rightarrow g(x) \geq h(m), \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow \min_{[a;b]} g(x) \geq h(m)$$

Nếu hàm số đồng biến trên $(a; b)$ thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in [a; b] \rightarrow g(x) \leq h(m), \forall x \in [a; b]$
 $\Leftrightarrow \min_{x \in [a; b]} g(x) \leq h(m)$

II. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tìm m để hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2025$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm điều kiện của m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x - 10$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Ví dụ 3. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 2$ đồng biến trên $(-\infty; 2)$.

Ví dụ 4. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2m - 3)x + 2025$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = \frac{x - 3}{x - m}$ với m là tham số. Tìm m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = \frac{mx + 4m}{x + m}$ với m là tham số. Tìm m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.

Ví dụ 7. Tìm m để hàm số $y = \frac{x + 7}{2x + m}$ nghịch biến trên $(-2; +\infty)$.

Ví dụ 8. Tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{-x + 1}{x - 2m}$ đồng biến trên $(2; 10)$.

Ví dụ 9. Tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trong $(-\infty; -1)$.

Ví dụ 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 6x^2 + mx - 5$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$.

Ví dụ 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m - 1)x^2 + m - 2$