|  |  |
| --- | --- |
|  | **đề HSG THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**  **NĂm HỌC 2018 - 2019**  **MÔN TOÁN (NGÀY THI THỨ NHẤT)**  **Time: 180 Phút** |

**Câu 1.** **(5 điểm)** Xét dãy số  xác định bởi ,  và  với 

a) Chứng minh rằng , 

b) Với mỗi , đặt . Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  và tìm giới hạn đó.

**Bài 2.** Cho đa thức bậc ba .

a) Chứng minh rằng tồn tại các số thực  đôi một phân biệt sao cho .

b) Giả sử tồn tại 3 bộ số thực  với  gồm 9 số đôi một phân biệt sao cho  với . Đặt  với .

Chứng minh rằng .

**Bài 3 .** *( 5 điểm)*

Cho  là một dây cố định khác đường kính của đường tròn cố định. Gọi  là trung điểm của cung nhỏ . Xét đường tròn  thay đổi tiếp xúc với đoạn thẳng  và tiếp xúc trong với ( sao cho  khác phía với  so với đường thẳng ). Các đường thẳng qua vuông góc với ,  cắt đường thẳng  lần lượt tại các điểm .

a) Chứng minh rằng .

b) Gọi  là một điểm thuộc sao cho . Tiếp tuyến của  tại  cắt đoạn  tại  và đường thẳng  cắt  tại  khác . Vẽ đường tròn qua  và tiếp xúc ngoài với  tại . Chứng minh rằng điểm  luôn di động trên một đường tròn cố định khi  thay đổi.

**Câu 4.** Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc  hai điểm nguyên (hoành độ và tung độ là các số nguyên)  được gọi là “thân thiết” với nhau nếu  khác  và  với  là gốc tọa độ.

a) Hỏi có tất cả bao nhiêu điểm nguyên  với  thỏa mãn điểm  và điểm  “thân thiết” với nhau?

b) Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu điểm nguyên đôi một “thân thiết” với nhau?

🙢 **HẾT** 🙠

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Giải chi tiết đề HSG THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**  **NĂm HỌC 2018 - 2019**  **MÔN TOÁN(NGÀY THI THỨ NHẤT)**  **Time: 180 Phút** |

**Câu 1.** **(5 điểm)** Xét dãy số  xác định bởi ,  và  với 

a) Chứng minh rằng , 

b) Với mỗi , đặt . Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  và tìm giới hạn đó.

**Lời giải**

***Tác giả: Hà Lê , Phạm Thị Phương Thúy; Fb: Ha Le , thuypham***

Kiến thức sử dụng: Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai là phương trình sai phân dạng: , ,  với . Nếu  là hai nghiệm thực khác nhau thì , trong đó được xác định khi biết .

Ta có: .

Xét phương trình đặc trưng của dãy  là  với hai nghiệm ,  thỏa mãn , .

Khi đó ta có .

Với  ta có .

Với  ta có .

Từ (1) và (2) suy ra  và .

Ta có 

Đặt . Có  và , 

Ta có   (đpcm).

b) Trước hết ta chứng minh  với mọi  (bằng phương pháp quy nạp).

Với  mệnh đề đúng.

Giả sử mệnh đề đã cho đúng với  , ta có .

Ta chứng minh mệnh đề đúng với . Thật vậy:

(đpcm).

Ta có 

Ta có thể định nghĩa thêm  thì dãy số vẫn thỏa mãn hệ thức truy hồi.

Từ đó 

Theo câu a) ta có . Suy ra.

Vậy (đpcm).

**Bài 2.** Cho đa thức bậc ba .

a) Chứng minh rằng tồn tại các số thực  đôi một phân biệt sao cho .

b) Giả sử tồn tại 3 bộ số thực  với  gồm 9 số đôi một phân biệt sao cho  với . Đặt  với .

Chứng minh rằng .

**Lời giải**

a) Giả sử  là bộ 3 số thực đôi một phân biệt thỏa mãn .

Xét  với  khi đó .

Tương tự, , .

Từ đó ta cần có   .

Vậy chọn  thì ,  ta được bộ 3 số thực  đôi một phân

biệt thỏa mãn bài toán.

b) Giả sử tồn tại 3 bộ số thực  với  gồm 9 số đôi một phân biệt sao cho  với . Đặt  với .

Chứng minh rằng .

Giả sử .

Xét đa thức  suy ra  là đa thức bậc 9.

Ta có: .

.

.

Suy ra  là 3 nghiệm phân biệt của phương trình .

Tương tự,  và  cũng là các nghiệm phân biệt của phương trình  hay phương trình  có 9 nghiệm thực phân biệt có tổng bằng .

Mặt khác,  hay  suy ra  không chứa  nên theo định lí viét thì phương trình  có tổng các nghiệm bằng 0 hay   có một nghiệm bằng 0, mà  mâu thuẫn với giả thiết . Vậy .

**Bài 3 .** *( 5 điểm)*

Cho  là một dây cố định khác đường kính của đường tròn cố định. Gọi  là trung điểm của cung nhỏ . Xét đường tròn  thay đổi tiếp xúc với đoạn thẳng  và tiếp xúc trong với ( sao cho  khác phía với  so với đường thẳng ). Các đường thẳng qua vuông góc với ,  cắt đường thẳng  lần lượt tại các điểm .

a) Chứng minh rằng .

b) Gọi  là một điểm thuộc sao cho . Tiếp tuyến của  tại  cắt đoạn  tại  và đường thẳng  cắt  tại  khác . Vẽ đường tròn qua  và tiếp xúc ngoài với  tại . Chứng minh rằng điểm  luôn di động trên một đường tròn cố định khi  thay đổi.

**Lời giải**



**Lời giải**

a) Gọi  lần lượt là tiếp điểm của  với và .

**Cách 1:** Ta sẽ chứng minh  đi qua .

***Cách 1.1***. Do  nên . Do đó

. Suy ra  đi qua .

***Cách 1.2***. Giả sử  cắt  ở .

Khi đó, dễ thấy rằng . Ta có  nên

.

Do đó, là phân giác của  nên  đi qua .

Tiếp theo, vì  nên .

Xét đường tròn điểm  và đường tròn  thì từ đẳng thức trên, ta thấy  có cùng phương tích đến hai đường tròn. Suy ra  chính là trục đẳng phương của đường tròn điểm  và đường tròn .

Do đó,  nên 

Tương tự thì  nên .

**Cách 2:** Ta có



b) Ta sẽ chứng minh  thằng hàng và .

**Cách 1.** Gọi  là giao điểm của đường thẳng  với .

Lúc đó  nên tứ giác  nội tiếp.

Gọi  là tiếp tuyến của  tại , ta có  suy ra  cũng là tiếp tuyến của đường tròn . Do đó  tiếp xúc với .

Suy ra . Suy ra  thẳng hàng và  (2 điểm)

**Cách 2.** Ta thấy rằng với mọi điểm  sao cho  đi qua thì chứng minh tương tự trên, ta đều có 

Xét phép nghịch đảo  tâm , phương tích  thì:



Ảnh của  qua  sẽ là một đường trong đi qua  và tiếp xúc với . Chú ý rằng  nên ảnh của  là . Suy ra  hay thẳng hàng và

. (2 điểm)

Tiếp theo, bằng cách xét tam giác đồng giác, ta có  nên 

Xét tứ giác  có  không đổi và tổng nên , chứng tỏ  luôn thuộc cung chứa góc  dựng trên . Ta có đpcm

(1 điểm)

**Câu 4.** Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc  hai điểm nguyên (hoành độ và tung độ là các số nguyên)  được gọi là “thân thiết” với nhau nếu  khác  và  với  là gốc tọa độ.

a) Hỏi có tất cả bao nhiêu điểm nguyên  với  thỏa mãn điểm  và điểm  “thân thiết” với nhau?

b) Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu điểm nguyên đôi một “thân thiết” với nhau?

**Lời giải**

a) Ta có điều kiện  nên có ba trường hợp:

(1) Nếu  thì  với  thỏa mãn. Xét hệ ràng buộc sau

 và  nên có tất cả  điểm.

(2) Nếu  thì  với  thỏa mãn. Xét hệ ràng buộc  nên có tất cả  điểm.

(3) Nếu  thì  với  thỏa mãn. Xét hệ ràng buộc  nên cũng có tất cả  điểm.

Vậy tổng số điểm nguyên thỏa mãn là 

b) Gọi điểm đã cho là  với  và 

Ta có  với mọi  Ta thấy rằng:

- Có tối đa hai điểm thuộc trục  là  và 

- Có tối đa hai điểm thuộc trục  là 

Ta sẽ chứng minh rằng có không quá  điểm không thuộc cả . Giả sử ngược lại rằng có ba điểm như thế thỏa mãn đề bài là  Ta có hai trường hợp:

(1) Nếu có hai điểm thuộc cùng một góc phần tư, giả sử là  thì các số  cùng dấu, các số  cũng cùng dấu nên , loại.

(2) Nếu không có điểm nào thuộc cùng một góc phần tư thì phải có hai điểm thuộc hai góc phần tư đối nhau, giả sử là  thì các số  trái dấu, các số  cũng trái dấu nên , không thỏa.

Do đó, điều giả sử là sai, tức là tổng cộng có không quá  điểm thỏa mãn đề bài.

Ta có  đôi một “thân thiết”.

🙢 **HẾT** 🙠