Đề 61

ĐỀ HSG TOÁN 9 TỈNH HÒA BÌNH 2023-2024

Câu 1. (4,0 điểm):

Cho biểu thức $A=\left(\frac{\sqrt{x}+4}{x-4}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right):\left(1-\frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}\right)$ (với $x\ge 0, x\ne 4$).

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.
3. Tìm x sao cho $\frac{1}{(x-1).A}\ge 0$.

Câu 2 (6,0 điểm):

1. Tìm m để khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đồ thị hàm số $y=(m-1)x+2$ bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx-2y=2 \\ 2x+my=5 \end{cases}$ (với m là tham số). Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $x+y=\frac{5}{2}$.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết $BC=13\,cm$ và $AH=6\,cm$. Tính độ dài đoạn thẳng HB và HC.

Câu 3 (4,0 điểm):

1. Hưởng ứng tháng Thanh niên, nhà trường dự kiến tổ chức cho những học sinh lớp 9A đủ điều kiện kết nạp Đoàn đợt 26/3 một buổi lao động cộng sản trồng 18 cây xanh. Đến ngày lao động, có 3 bạn bị nhiễm Covid 19 nên không tham gia trồng cây được, do đó mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 1 cây mới đảm bảo kế hoạch đặt ra *(số cây mỗi học sinh trồng được bằng nhau)*. Hỏi thực tế có bao nhiêu học sinh đã tham gia trồng cây?
2. Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $x(x^2+x+1)=4^y-1$.

Câu 4 (4,0 điểm):

Cho đường tròn (O,R). Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn, kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến (O) $(A, B \text{ là các tiếp điểm})$. Qua A kẻ đường thẳng song song với MO cắt đường tròn (O) tại $E(E \text{ khác } A)$. Đường thẳng ME cắt đường tròn (O) tại $F(F \text{ khác } E)$. Đường thẳng AF cắt MO tại N. Gọi H là giao điểm của MO và AB.

1. Chứng minh $MN^2=NA.NF$.
2. Chứng minh $\widehat{HFN}=90°$ và $MN=NH$.
3. Chứng minh $\frac{HB^2}{HF^2}-\frac{EF}{MF}=1$.

Câu 5 (2,0 điểm):

1. Giải phương trình $2x^2-2x+2=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+3}-1\right)$.
2. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a+2b+3c\ge 11$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{1}{4c}\ge \frac{37}{4}.$$

---Hết---

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 061

UBND TỈNH HÒA BÌNH

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH

NĂM HỌC 2021-2022

MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 05/04/2022

(Hướng dẫn chấm gồm có 05 trang)

Câu 1: (4,0đ)

1. $A = \left(\frac{\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2-2\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2}\right)$

$= \frac{2\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{-\sqrt{x}-3} = \frac{2}{2-\sqrt{x}}$

2. $A = \frac{2}{2-\sqrt{x}}$ là số nguyên thì $(2-\sqrt{x}) \in U(2) = \{\pm1;\pm2\}$

$2 - \sqrt{x}$	-2	-1	1	2
x	16	9	1	0

Vậy x $\in \{0;1;9;16\}$

3. $\frac{1}{(x-1).A} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{2(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \leq 0$

⇔ ¿¿ ⇔ ¿¿ ⇔ 1¿ x ≤ 4

kết hợp với điều kiện ta cho, ta được: 1¿ x ¿ 4

Câu 2 (6,0đ)

Đặt (d): y = (m-1)x + 2

+ Với m = 1 thì (d): y = 2, khoảng cách từ O đến (d) bằng 2, không thỏa mãn

+ Với m ≠ 1. Ta có:

Giao điểm (d) với Ox: A$\left(\frac{-2}{m-1};0\right)$ ⇒ OA= $\left|\frac{-2}{m-1}\right| = \frac{2}{|m-1|}$

Giao điểm (d) với Oy: B(0;2) ⇒ OB = 2

+ Kẻ OH ⊥ (d)

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OAB, ta có:

$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{|m-1|}\right)^2} + \frac{1}{2^2}$

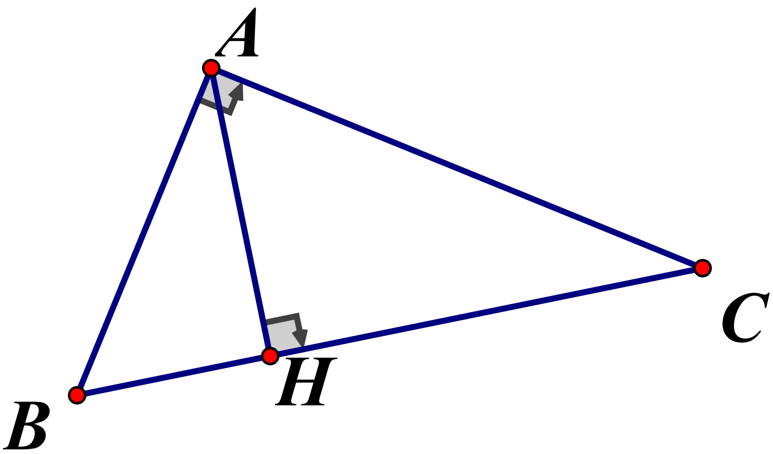
$\frac{5}{4} = \frac{(m-1)^2}{4} + \frac{1}{4}$ ⇔ ¿¿ . Vậy m $\in \{-1;3\}$

2. Giải hệ, được nghiệm duy nhất (x;y) = $\left(\frac{2m+10}{m^2+4};\frac{5m-4}{m^2+4}\right)$ với mọi m

Biến đổi x+y= $\frac{5}{2}$ trở thành $\frac{2m+10}{m^2+4}+\frac{5m-4}{m^2+4}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 5m^2$ - 14m + 8 = 0

Giải được m = 2, m = $\frac{4}{5}$

3. Ta có:



+ HB.HC = AH^2 = 36 (1)
+ HB + HC = BC = 13 (2)
+ Từ (1),(2) tính được:
HB = 4cm, HC = 9cm
Câu 3 (4,0đ)
1.Gọi số học sinh đã tham gia trồng cây là x, điều kiện x nguyên dương

Số học sinh dự kiến: x + 3

Số cây mỗi học sinh phải trồng theo dự kiến: $\frac{18}{x+3}$

Số cây thực tế mỗi học sinh trồng được: $\frac{18}{x}$

Theo bài ra, ta có phương trình: $\frac{18}{x}$ - $\frac{18}{x+3}$ = 1

Giải phương trình ta được:

x = -9 (loại)

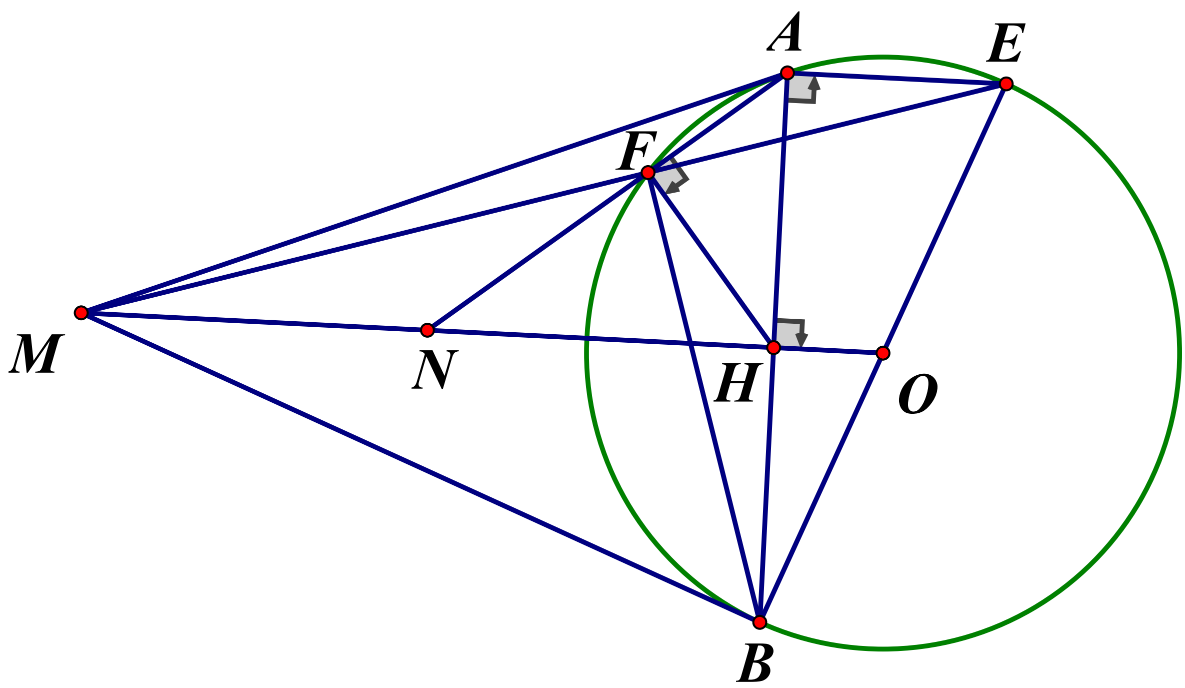
x = 6 (thỏa mãn)

Vậy số học sinh thực tế đã tham gia trồng cây là 6 học sinh
2.Biến đổi phương trình về dạng (x+1)(x^2+1) = 4^y
+ Với x nguyên thì vế trái PT (*) là số nguyên. Nếu y ¿ 0 thì vế phải PT(*) bằng 4^y không là số nguyên nên PT (*) không thỏa mãn
Vậy y ≥ 0. Khi đó 4^y > 0 nên x ≥ 0
+ Với y = 0 thì x = 0.Ta được (x; y) = (0;0) là một nghiệm của PT(*)
+ Với y ≥ 1 thì 4^y là số chẵn. Suy ra (x+1)(x^2+1) cũng là số chẵn, nên x là số lẻ.
Đặt x = 2k+1, k ∈ Z,k ≥0
Khi đó (2k+2)($4k^2$+4k+2) = 4^y $\Leftrightarrow$ (k+1)($2k^2$+2k+1) = 4^{y-1}

- Khi y=1 thì (k+1)($2k^2$+2k+1) = 1 $\Leftrightarrow$ $2k^3+4k^2$+3k = 0 $\Leftrightarrow$ k = 0
  Khi đó x=1. Ta được (x;y) = (1;1) là một nghiệm của PT(*)

- Khi y > 1 thì $2k^2+2k+1$ là một số lẻ và là ước của 4^{y-1}, mà 4^{y-1} chỉ có một ước nguyên dương lẻ duy nhất là 1, nên $2k^2+2k+1 = 1 \Rightarrow k = 0$
  Khi đó x=1, y=1 (loại do y > 1).

Vậy PT có 2 nghiệm (0;0) và (1;1).
Câu 4 (4,0đ)



1. Xét ΔANM và ΔMNF, có:
+ Góc $\widehat{N}$ chung (1)
+ Trong đường tròn (O): $\widehat{MAN} = \widehat{AEF} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AF}$;
Lại có AE//MO nên $\widehat{FMN} = \widehat{AEF}$ (so le trong)
Suy ra $\widehat{MAN} = \widehat{FMN}$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta ANM \sim \Delta MNF$ (g.g)
Suy ra $\frac{AN}{MN} = \frac{MN}{NF} \Rightarrow MN^2$= NA.NF

2. Ta có AE//MO. Mà MO ⊥ AB nên AE ⊥ AB
Suy ra BE là đường kính của (O)
+ Chứng minh được tứ giác MFHB nội tiếp ($\widehat{MFB} = \widehat{MHB} = 90^o$)
Suy ra $\widehat{HFE} = \widehat{HBM}$ (góc ngoài tại đỉnh F bằng góc trong của đỉnh đối diện) (3)
+ $\widehat{AFE} = \widehat{ABE} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AE}$ (4)
Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{HFA} = 90^o$
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác AHN vuông tại H, đường cao HF, ta có NH^2= NA.NF (5)
Mà MN^2= NA.NF (chứng minh phần 1)
Vậy NH=NM
3. Ta có HA=HB (vì MA, MB là 2 tiếp tuyến của (O))

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHN, ta có:

HB^2= HA^2= AF.AN

HF^2= FA.FN

Suy ra $\frac{HB^2}{HF^2} = \frac{AN}{FN} = 1+\frac{FA}{FN}$ (6)

Lại có AE//MN ⇒ $\frac{FE}{FM} = \frac{FA}{FN}$ (7)

Từ (6) và (7) suy ra $\frac{HB^2}{HF^2} - \frac{FE}{FM} = 1$.

Câu 5 (2,0đ)

1. Đặt $\sqrt{x^2-x+3}$ = t, (t ≥ 0)

Biến đổi PT đã cho về dạng: (x^2 - x +3) + x^2 - x - 1 = (2x-1)$\sqrt{x^2-x+3}$ - 2x - 1

PT trở thành: t^2 - (2x-1)t +x^2 + x = 0

Giải được ¿¿

+ $\sqrt{x^2-x+3}$ = x ⇔ ¿$^{x\geq 0}_{x^2-x+3=x^2}$¿ ⇔ x = 3

+ $\sqrt{x^2-x+3}$ = x + 1 ⇔ ¿$^{x\geq -1}_{x^2-x+3=x^2+2x+1}$¿ ⇔ x = $\frac{2}{3}$

Vậy PT có 2 nghiệm x = $\frac{2}{3}$, x = 3

2. M = a + b + c + $\frac{3}{a}$ + $\frac{9}{2b}$ + $\frac{1}{4c}$ = $\left(\frac{3}{4}a+\frac{3}{a}\right)$ + $\left(\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}\right)$ + $\left(\frac{c}{4}+\frac{1}{4c}\right)$ + $\frac{1}{4}$(a + 2b + 3c)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương và giả thiết a + 2b + 3c ≥ 11, ta có:

M ≥ 2.$\sqrt{\frac{3a}{4}.\frac{3}{a}}$ + 2$\sqrt{\frac{b}{2}.\frac{9}{2b}}$ + 2$\sqrt{\frac{c}{4}.\frac{1}{4c}}$ + $\frac{1}{4}$. 11 = 3 + 3 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{11}{4}$ = $\frac{37}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi a =2, b = 3, c = 1.

Ghi chú: Mọi cách làm đúng khác hướng dẫn trên đều cho điểm tối đa