



Chương

Bài 1.

ĐƠN ĐIỆU & CỰC TRỊ CỦA HÀM

A

Lý thuyết

1. Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số



Định nghĩa:

Kí hiệu K là khoảng; đoạn; nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K .

Hàm số $y = f(x)$

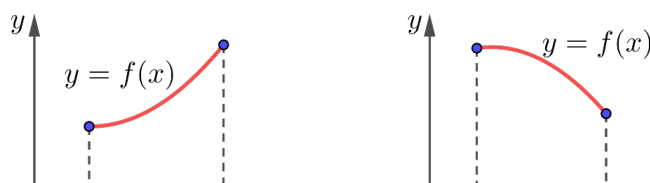
- Gọi là *đồng biến* trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.



Chú ý

» Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị đi lên từ trái sang phải (Hình 1a).

» Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải (Hình 1b).



2. Tính đơn điệu của hàm số



Định lý:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K .



Chú ý

» Định lý vẫn đúng trong trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm trong K .



3. Khái niệm cực trị của hàm số



Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- $\exists h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .
- $\exists h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .



Chú ý

» Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số $f(x)$.

Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CD} hay y_{CD} .

Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số.

» Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực tiểu** của hàm số $f(x)$.

4. Cách tìm cực trị của hàm số



Định lý:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

» Định lý trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

x	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

$\swarrow$ $f(x_0)$ $\searrow$
 Cực tiểu

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

$\swarrow$ $f(x_0)$ $\searrow$
 Cực đại



Chú ý

» Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

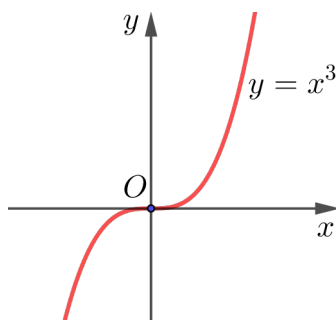
(1) Tìm tập xác định của hàm số.

(2) Tính $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không tồn tại.

(3) Lập bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

» Nếu $f'(x_0) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Chẳng hạn, hàm số $f(x) = x^3$ có $\begin{cases} f'(x) = 3x^2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$, nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số.





Các dạng bài tập

Dạng 1. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi một công thức



Phương pháp

- » **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số.
- » **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
- » **Bước 3:** Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ theo thứ tự tăng dần. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- » **Bước 4:** Mô tả bất luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.



Ví dụ 1.1.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 6$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 12x^2 + 6x - 36. \text{ Cho } y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	58	$-\frac{111}{4}$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(\frac{3}{2}; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; \frac{3}{2})$.



Ví dụ 1.2.

Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \neq -1$$



Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$		$+\infty$	1

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.



Ví dụ 1.3.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4}$.

Lời giải

Điều kiện: $-x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Tập xác định $D = [-2; 2]$.

$y' = \frac{-x}{\sqrt{-x^2 + 4}}$. Cho $y' = 0 \Rightarrow x = 0$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$				2	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.



Ví dụ 1.4.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x)$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \end{cases}$.

Ta có: $y' = \frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 3}$.

Khi đó, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (loại).

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-			+
y				

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.



Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.



Dạng 2. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi đồ thị - bảng biến thiên



Phương

- » Với đồ thị hàm số, quan sát: hướng lên - xuống của *đường cong* (chiều từ trái sang phải).
- » Với bảng biến thiên, quan sát: hướng lên - xuống của *mũi tên* (chiều từ trái sang phải).



Ví dụ 2.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$	

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$

Lời giải

Từ BBT của hàm số, ta có:

» Trong $(0;1)$ mũi tên “đi xuống” nên

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

» Trong $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$ mũi tên “đi lên” nên

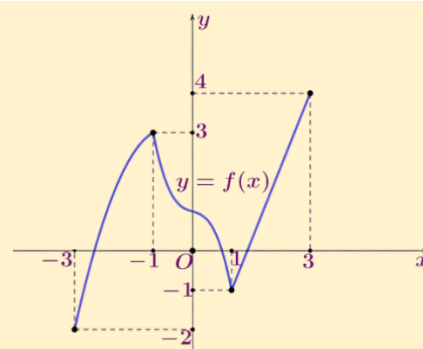
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.



Ví dụ 2.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính đơn điệu

của hàm số $y = f(x)$.



Lời giải

Từ đồ thị của hàm số, ta có:

» Trong $(-3;-1)$ và $(1;3)$ đồ thị “đi lên” nên

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$ và $(1;3)$.

» Trong $(-1;1)$ đồ thị “đi xuống” nên

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.





Dạng 3. Xác định cực trị của hàm số cho bởi công thức



Phương pháp

- » **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số.
- » **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không tồn tại.
- » **Bước 3:** Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ theo thứ tự tăng dần. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

$x = 2 \quad x = 2$



Ví dụ 3.1.

Tìm cực trị của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbf{R}$.

Đạo hàm: $y' = 6x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow y_{CD} = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y_{CT} = 0$.



Ví dụ 3.2.

Tìm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

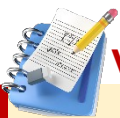
Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbf{R}$.

Đạo hàm: $y' = -4x^3 + 6x^2 - 2; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{16} \end{cases}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$
y	∞	$-\frac{5}{16}$	-2	∞

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_{CD} = -\frac{5}{16}$.



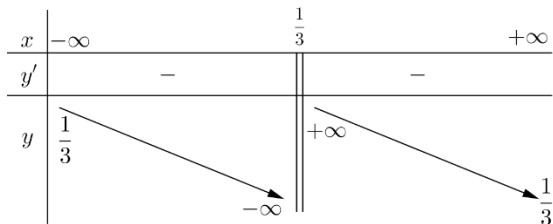
Ví dụ 3.3.

Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x+2}{3x-1}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

Đạo hàm: $y' = -\frac{7}{(3x-1)^2} < 0, \forall x \neq \frac{1}{3}$.



Vậy hàm số không có cực trị.



Ví dụ 3.4.

Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{1-x}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm: $y' = \frac{-x^2 + 2x}{(1-x)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	-	0	+	+	0	-
y	$+\infty$		$+\infty$		0	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=2 \Rightarrow y_{CD} = 0$ và đạt cực tiểu tại $x=0 \Rightarrow y_{CT} = 4$.



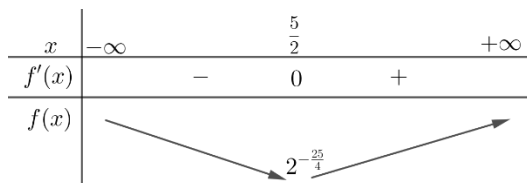
Ví dụ 3.5.

Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2^{x^2 - 5x}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbf{R}$.

Đạo hàm: $f'(x) = 2^{x^2 - 5x} (x^2 - 5x)' \ln 2 = 2^{x^2 - 5x} (2x - 5) \ln 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.





Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{5}{2} \Rightarrow y_{CT} = 2^{-\frac{25}{4}}$.



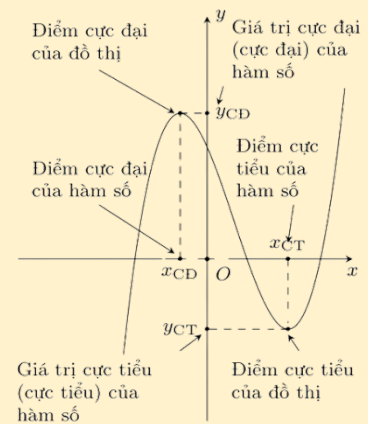
▮ Dạng 4. Xác định cực trị của hàm số cho bởi bảng biến thiên - đồ thị



Phương

Nhận xét:

» Hàm số $f(x)$ có cực trị	y' đổi dấu
không cực trị	y' không đổi dấu
chỉ có 1 cực trị	y' đổi dấu 1 lần
có 2 cực trị	y' đổi dấu 2 lần
có 3 cực trị	y' đổi dấu 3 lần

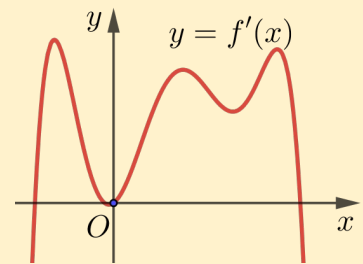


» Đối với một hàm số bất kì, hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm x_0 mà tại đó $f'(x_0) = 0$



Ví dụ 4.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbf{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?



Lời giải

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 0 \\ x = x_2 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta có:

+ $f'(x)$ qua x_1 đổi dấu từ “-” sang “+”

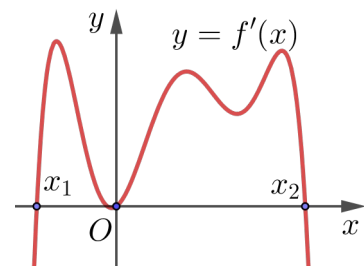
nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu $x = x_1$.

+ $f'(x)$ qua $x = 0$ không đổi dấu

nên hàm số $f(x)$ không có cực trị tại $x = 0$.

+ $f'(x)$ qua x_2 đổi dấu từ “+” sang “-” nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại $x = x_2$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 1 cực tiểu và 1 cực đại.





Ví dụ 4.2.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y			2			4		

Hàm số $y=f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?

Lời giải

$$y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

- + $f'(x)$ qua $x=-1$ đổi dấu từ “+” sang “-” nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại $x=-1$.
- + $f'(x)$ và $f(x)$ không xác định tại $x=0$ nên hàm số $f(x)$ không có cực trị tại $x=0$.
- + $f'(x)$ qua $x=1$ đổi dấu từ “-” sang “+” nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại $x=1$.

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 1 cực tiểu và 1 cực đại.



Ví dụ 4.3.

Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			2		-4	

Dựa vào bảng biến thiên hãy thiết lập công thức hàm số $y=f(x)$ đã cho?

Lời giải

Đạo hàm: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(0;2)$ và

$$(3;-4), \text{ ta có: } \begin{cases} f(0)=2 \\ f'(0)=0 \\ f(3)=-4 \\ f'(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ c=0 \\ a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + 2 = -4 \\ 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=2 \\ 27a+9b=-6 \\ 27a+6b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{4}{9} \\ b=-2 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}$$

Vậy công thức của hàm số cần tìm có dạng: $y=f(x)=\frac{4}{9}x^3-2x^2+2$.





Dạng 5. Toán thực tế áp dụng tính đơn điệu của hàm số



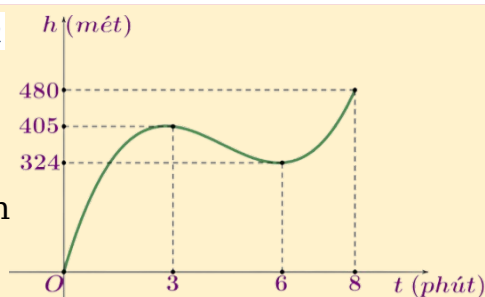
Phương

- » Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị *tốc độ tức thời* của chuyển động tại t_0 .
- » Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là *gia tốc tức thời* tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.



Ví dụ 5.1.

Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn như hình bên. Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu



Lời giải

Từ đồ thị hàm số $h(t)$, ta nhận xét:

+ Trong khoảng thời gian từ 3 phút đến 6 phút thì khinh khí cầu giảm dần độ cao.

+ Trong 3 phút đầu tiên và trong khoảng thời gian từ 6 phút đến 8 phút thì khinh khí cầu tăng dần độ cao.



Ví dụ 5.2.

Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t (giây) được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận

Lời giải

Xét hàm $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ trên $[0; +\infty)$.

$v'(t) = 6t - 12$. Cho $v'(t) = 0 \Rightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $v(t)$

t	0	2	$+\infty$
$v'(t)$	-	0	+
$v(t)$	9	-3	$+\infty$

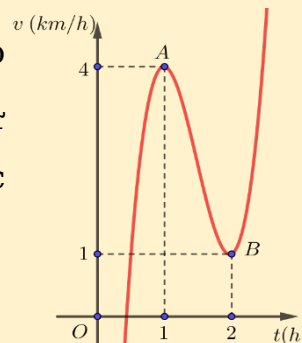


Vậy trong khoảng thời gian 2 giây đầu tiên thì vận tốc chất điểm giảm dần và sau thời điểm 2 giây thì vận tốc chất điểm tăng dần.



Ví dụ 5.3.

Một vật chuyển động với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của hàm số dạng hàm bậc ba như hình bên. Biết rằng tại thời điểm $t_1 = 1\text{h}$ vật có vận tốc



Lời giải

Giả sử hàm số vận tốc có dạng: $v(t) = at^3 + bt^2 + ct + d, t > 0$.

Ta có: $v'(t) = 3at^2 + 2bt + c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, tại các thời điểm t_1, t_2 đồ thị hàm vận tốc đi qua các điểm cực trị $A(1; 4), B(2; 1)$.

$$\begin{cases} v(1) = 4 \\ v'(1) = 0 \\ v(2) = 1 \\ v'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 4 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -27 \\ c = 36 \\ d = -11 \end{cases}$$

Khi đó:

Suy ra: $v(t) = 6t^3 - 27t^2 + 36t - 11 \text{ (km/h)}$.

Vậy vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3\text{h}$ là: $v(3) = 6 \cdot 3^3 - 27 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 - 11 = 16 \text{ km/h}$.



Dạng 6. Bài toán liên quan tính đơn điệu có chứa tham số



Phương pháp

(1) Tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên tập xác định

» **Bước 1:** Tập xác định: $D = I$ Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

» **Bước 2:** Điều kiện để hàm đơn điệu:

Để y **đồng biến** trên R $\Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in I \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ D_{y'} \leq 0 \end{cases}$

Để y **nghịch biến** trên R $\Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in I \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ D_{y'} \leq 0 \end{cases}$

(2) Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định

» **Bước 1:** Tập xác định: $D = I \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ Tính $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

» **Bước 2:** Điều kiện để hàm đơn điệu:

Để y **đồng biến** trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow ad - bc > 0$

Ví dụ 6.1.

Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (3m+2)x - 2$. Xác định điều kiện của tham số m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$

Lời giải

Ta có $y' = -x^2 - 2mx + 3m + 2$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow -x^2 - 2mx + 3m + 2 \leq 0, \forall x \in I \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ D' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0, \forall m \\ m^2 + 3m + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq -1.$$

Vậy $-2 \leq m \leq -1$.

Ví dụ 6.2.

Cho hàm số $y = \frac{2x-m}{x-1}$. Xác định điều kiện của tham số m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Lời giải

TXĐ: $D = I \setminus \{1\}$. Ta có $y' = \frac{m-2}{(x-1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m-2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.



Vậy $m > 2$.



Dạng 7. Bài toán hàm hợp



Phương

Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(u(x))$ từ bảng biến thiên/đồ thị của $f'(x)$

» **Bước 1:** Tính $y' = u' \cdot f'(u) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases} (*)$

» **Bước 2:** Để giải $(*)$ ta tìm $f'(x) = 0$ (đồ thị cắt trục hoành).

Giả sử $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ M \rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = a \\ M \rightarrow u = b \end{cases}$ nghiệm của $(*)$.

$y' = u' \cdot f'(u) \Rightarrow$



Ví dụ 7.1.

Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới. Xác định các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(1 - 2x)$.

x	$-\infty$	-3	-2	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

🔗 **Lời giải**

Ta có $y = f(1 - 2x) \Rightarrow y' = -f'(1 - 2x)$.

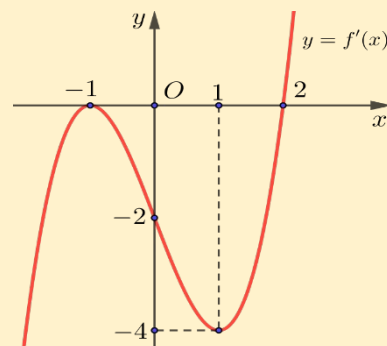
Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x \leq -3 \\ -2 \leq 1 - 2x \leq 1 \\ 1 - 2x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq -1 \end{cases}$.

Vậy hàm số $y = f(1 - 2x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1); \left(0; \frac{3}{2}\right); (2; +\infty)$



Ví dụ 7.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xác định các khoảng nghịch biến của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$.



🔗 **Lời giải**



$$g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2 - 2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ x^2 - 2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

Ta có

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$										

Vậy hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2); (0; 1); (2; +\infty)$



Ví dụ 7.3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ta có :

$$g(x) = f(3 - x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3 - x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = 1 \\ 3 - x = -1 \\ 3 - x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

$g'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn nên hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có 3 điểm cực trị.



Ví dụ 7.4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Đặt $g(x) = f(x^2 - 2x)$. Ta có $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$.



$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=1 \\ x^2-2x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-2x+2=0 \\ x^2-2x-1=0 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{2} \\ x=-1 \\ x=3 \end{cases}.$$

Trong đó các nghiệm $-1, 1, 3$ là nghiệm bội lẻ và $1\pm\sqrt{2}$ là nghiệm bội chẵn.

Vì vậy hàm số $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua các nghiệm $-1, 1, 3$.

Ta có $g'(0)=-2f'(0)<0$ (do $f'(0)>0$).

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	3	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy hàm số $y=f(x^2-2x)$ có đúng 1 điểm cực tiểu là $x=1$.