

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN THI : TOÁN

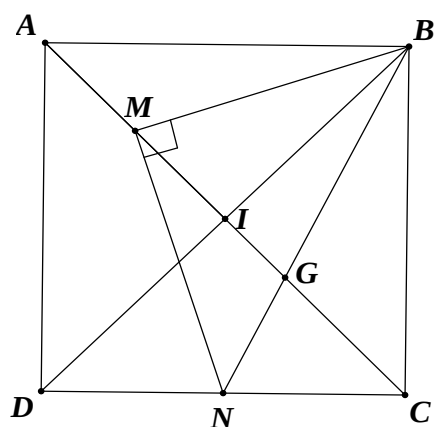
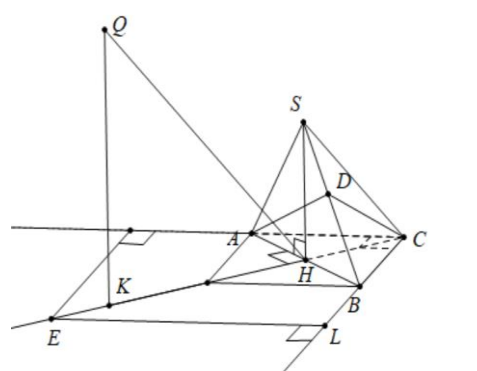
Bài	Hướng dẫn chấm	Điểm
Bài I (4 điểm)		
	Phương trình hoành độ giao điểm của $d: y = 2x + 2$ và (C_m) : $x^3 + 3x^2 + (m+4)x + m + 2 = 2x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + (m+2)x + m = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x + m = 0 \quad (*) \end{cases}$	0,5
	Đường thẳng $y = 2x + 2$ cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow m < 1$	0,5
	Gọi $B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$ khi đó x_B, x_C là nghiệm của $(*)$. Ta có $\begin{cases} x_B + x_C = -2 \\ y_B + y_C = 2(x_B + x_C) + 4 = 0 \end{cases}$ nên $A(-1; 0)$ là trung điểm BC .	0,5
	Ta có $\overrightarrow{MA} \left(-3; \frac{3}{2} \right) \Rightarrow MA \perp d$. Suy ra, tam giác MBC cân tại M .	0,5
	Do đó $\triangle MBC$ đều khi $MA = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$	0,5
	$\Leftrightarrow 4MA^2 = 3[(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2] \Leftrightarrow 45 = 15(x_B - x_C)^2$	0,5
	$\Leftrightarrow 45 = 15[(x_B + x_C)^2 - 4x_B x_C] \Leftrightarrow 3 = 4 - 4m \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn đk)	0,5
Bài II (6 điểm)		
1)	Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$. Ta có: $\sqrt{2(x+2)^2 + 7(2x+3)} - (x+2) = 2\sqrt{2x+3}$.	0,5
	$x = -\frac{3}{2}$ không là nghiệm của phương trình.	0,5
	$x \neq -\frac{3}{2}$, chia cả 2 vế cho $\sqrt{2x+3}$ được: $\sqrt{\frac{2(x+2)^2}{2x+3} + 7} - \frac{x+2}{\sqrt{2x+3}} = 2$	
	Đặt $t = \frac{x+2}{\sqrt{2x+3}}$ phương trình trở thành: $\sqrt{2t^2 + 7} - t = 2$	0,5
	$\Leftrightarrow \sqrt{2t^2 + 7} = t + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$	0,5
	Với $t = 1$ ta có $(x+2)^2 = 2x+3 \Leftrightarrow x = -1$ (TM)	0,5
	Với $t = 3$ ta có $(x+2)^2 = 9(2x+3) \Leftrightarrow x^2 - 14x - 23 = 0 \Leftrightarrow x = 7 \pm 6\sqrt{2}$ (TM)	0,5
	Hệ đã cho tương đương với	1

2)	$\begin{cases} (x^2 + y)^3 - 6(x^2 + y) = (y^2 + x)^3 - 6(y^2 + x) & (1) \\ (x^2 + y)^2 + (y^2 + x)^2 = \frac{9}{8} & (2) \end{cases}$ Đặt $f(t) = t^3 - 6t \Rightarrow f'(t) = 3(t^2 - 2)$ nên $f(t)$ nghịch biến trên $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$	
	Từ (2) đặt $u = x^2 + y; v = y^2 + x \Rightarrow u, v \in \left[\frac{-3}{2\sqrt{2}}; \frac{3}{2\sqrt{2}} \right] \subset (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ Từ đó ta có (1) trở thành $f(u) = f(v)$ cho ta $u = v$. $\Rightarrow x^2 + y = y^2 + x \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y = 1 \end{cases}$	1
	TH1: $x = y$ thay vào (2) được $(x^2 + x)^2 + (x^2 + x)^2 = \frac{9}{8}$ cho ta $\begin{cases} x = y = -\frac{3}{2} \\ x = y = \frac{1}{2} \end{cases}$	0,5
	TH2: $x + y = 1$ thay vào (2) được $(x^2 - x + 1)^2 + (y^2 - y + 1)^2 = \frac{9}{8}$ (3) Do $t^2 - t + 1 \geq \frac{3}{4} \Rightarrow VT(3) \geq \frac{9}{8}$. Từ đó (3) $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Vậy các nghiệm của hệ là $x = y = \frac{1}{2}$ và $x = y = -\frac{3}{2}$	0,5

Bài III (3 điểm)

1)	Ta có: $u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n^2 + 1} - 1}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1} + 1}$	0,5
	Do $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} > 0$ nên theo quy nạp, $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	0,5
	Do $0 < u_n < \sqrt{u_n^2 + 1} + 1 \Rightarrow u_{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	0,5
	Lại có $0 < u_1 < 1$, suy ra $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Vậy (u_n) là dãy số bị chặn.	0,5
2)	Nếu $u_n = \tan 2\alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ thì: $u_{n+1} = \frac{\sqrt{\tan^2 2\alpha + 1} - 1}{\tan 2\alpha} = \left(\frac{1}{\cos 2\alpha} - 1 \right) \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \tan \alpha$ Do $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6}$ nên bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	0,5
	Chứng minh được: $\tan x > x, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$ nên $\sum_{k=1}^{2019} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}} < \sum_{k=1}^{2019} \frac{3 \cdot 2^k}{\pi} = \frac{6}{\pi} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2018}) = \frac{6}{\pi} (2^{2019} - 1) < 2^{2020}$	0,5

Bài IV (5 điểm)

1)	Đặt $AB = a$, tính được: $MB^2 = MN^2 = \frac{5a^2}{8}, BN^2 = \frac{5a^2}{4}$ Suy ra tam giác MBN vuông cân tại M		0,5
	Phương trình $MN : 3x + y - 2 = 0$. Suy ra $M(0;2)$		0,5
	Do $B \in BM \Rightarrow B(3t - 6; t)$.		
	Từ $MB = MN \Rightarrow (3t - 6)^2 + (t - 2)^2 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(3; 3) \\ B(-3; 1)(I) \end{cases}$		0,5
	$AC \cap BN = G$, suy ra G là trọng tâm tam giác DBC .		
	Từ $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BN} \Rightarrow G(\frac{5}{3}; \frac{1}{3})$.		
	Từ $\overrightarrow{MC} = \frac{9}{5} \overrightarrow{MG} \Rightarrow C(3; -1)$		0,5
2)	a) Từ giả thiết suy ra ΔABC vuông cân tại C. Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1;$		0,5
	Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABC)$.		
	Suy ra $SA = SB = SC = AB = 2$. Tam giác SAB đều nên $SH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$		0,5
	Ta có $\frac{DB}{DS} = \frac{CB}{CS} \Rightarrow \frac{DB}{SB} = \frac{CB}{CB + CS} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$		0,5
	$V_{D.ABC} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} V_{S.ABC} = \frac{1}{(1 + \sqrt{2})\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}$ (đvtt)		0,5
	b) Gọi Q là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + 4\overrightarrow{QS} - 4\overrightarrow{QC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{HQ} = 2\overrightarrow{CS}$.		
	Khi đó, $ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MS} - 4\overrightarrow{MC} = 2MQ$		0,25

	Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ Q xuống (ABC). Chứng minh được $\overrightarrow{CK} = 3\overrightarrow{CH} \Rightarrow CK = 3$	0,25
	Do các mặt phẳng $(MAB), (MAC), (MBC)$ tạo với (ABC) góc bằng nhau nên hình chiếu vuông góc của M lên (ABC) là một trong các điểm I, E, F, G (các điểm này lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, bàng tiếp góc C, B, A). Vậy tập hợp các điểm M là 4 đường thẳng đi qua I, E, F, G và vuông góc với (ABC).	0,25
	Ta có MQ nhỏ nhất bằng $\min\{KI, KE, KF, KG\} = KE$ Gọi L là hình chiếu của E lên CB ta tính được $EL = EH = \sqrt{2} + 1$ Khi đó, $KE = CE - CK = \sqrt{2} - 1$ Vậy giá trị nhỏ nhất của $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MS} - 4\overrightarrow{MC}$ bằng $2(\sqrt{2} - 1)$ khi M là hình chiếu vuông góc của Q lên đường thẳng qua E và vuông góc với (ABC)	0,25

Bài V(2 điểm)

	Không mất tính tổng quát giả sử $a = \min\{a, b, c\} \Rightarrow 0 < a \leq 1$	0,5												
	Ta có: $P = a^3 - \frac{3}{a} + (b+c)^3 - \left[3bc(b+c) + \frac{3(b+c)}{bc} \right]$ $\leq a^3 - \frac{3}{a} + (b+c)^3 - 6(b+c)$ Suy ra: $P \leq a^3 - \frac{3}{a} + (3-a)^3 - 6(3-a) = 9a^2 - 21a + 9 - \frac{3}{a}$	0,5												
	Xét hàm số $f(a) = 9a^2 - 21a + 9 - \frac{3}{a}$ với $a \in (0;1]$. Ta có: $f'(a) = 18a - 21 + \frac{3}{a^2} = \frac{3(a-1)(2a-1)(3a+1)}{a^2}$ $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1; a = \frac{1}{2}; a = -\frac{1}{3} (l)$	0,5												
	Bảng biến thiên: <table><tr><td>a</td><td>0</td><td>1/2</td><td>1</td></tr><tr><td>f'</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>f</td><td>$-\infty$</td><td>$-21/4$</td><td>$-\infty$</td></tr></table> Suy ra $P \leq -\frac{21}{4}$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a+b+c=3 \\ a=\frac{1}{2} \\ bc=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{1}{2} \\ c=2 \end{cases}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $-\frac{21}{4}$ đạt khi $\begin{cases} a=b=\frac{1}{2} \\ c=2 \end{cases}$ và các hoán vị.	a	0	1/2	1	f'	+	0	-	f	$-\infty$	$-21/4$	$-\infty$	0,5
a	0	1/2	1											
f'	+	0	-											
f	$-\infty$	$-21/4$	$-\infty$											

Chú ý :

- Học sinh làm theo cách khác nhưng đúng vẫn cho điểm tối đa.
- Giám khảo không được làm tròn tổng điểm.