

Bài 6. Dãy số

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

PHẦN D. CÂU HỎI ĐÚNG-SAI

Câu 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{-n}{n+1}$. Khi đó:

*a) Năm số hạng đầu tiên của dãy số là $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$

*b) Số hạng u_{10}, u_{100} lần lượt là $-\frac{10}{11}; -\frac{100}{101}$

c) $-\frac{85}{86}$ là số hạng thứ 86 của dãy số (u_n)

d) $-\frac{99}{101}$ là một số hạng của dãy số (u_n)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Ta có: $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$.

b) Ta có: $u_{10} = -\frac{10}{11}, u_{100} = -\frac{100}{101}$.

c) Xét $-\frac{85}{86} = \frac{-n}{n+1} \Leftrightarrow 85n + 85 = 86n \Leftrightarrow n = 85$.

Vậy $-\frac{85}{86}$ là số hạng thứ 85 của dãy (u_n) .

d) Xét $-\frac{99}{101} = \frac{-n}{n+1} \Leftrightarrow 99n + 99 = 101n \Leftrightarrow n = \frac{99}{2} \notin \mathbb{N}$ (loại).

Vậy $-\frac{99}{101}$ không phải là số hạng của dãy số (u_n) .

Câu 2. Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 1$. Khi đó:

*a) Bộ số hạng đầu tiên của dãy số lần lượt là $-1; 2; 5; 8;$

b) Số hạng thứ năm của dãy là 13

c) Công thức số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n = 2n - 3$.

*d) 101 là số hạng thứ 35 của dãy số đã cho.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Ta có: $u_1 = -1; u_2 = u_1 + 3 = 2; u_3 = u_2 + 3 = 5; u_4 = u_3 + 3 = 8;$

b) $u_5 = u_4 + 3 = 11$

$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_2 = u_1 + 3 \\ u_3 = u_2 + 3 \\ \dots\dots\dots \\ u_n = u_{n-1} + 3 \end{cases}$$

b) Từ giả thiết, ta có:

Cộng theo vế toàn bộ các đẳng thức trên và triệt tiêu các số hạng giống nhau ở hai vế, ta có:

$$u_n = -1 + 3(n - 1) = 3n - 4.$$

Vậy công thức số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n = 3n - 4$.

$$\text{Xét } 101 = 3n - 4 \Rightarrow n = 35.$$

Vậy 101 là số hạng thứ 35 của dãy số đã cho.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Khi đó:

*a) Số hạng đầu tiên của dãy số là 1

*b) Số hạng $u_2 = \frac{5}{4}; u_3 = \frac{7}{5}$

*c) Số hạng $u_4 = \frac{3}{2}; u_5 = \frac{11}{7}$

d) Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 252 của dãy số (u_n)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) b) c) Ta có: $u_1 = 1; u_2 = \frac{5}{4}; u_3 = \frac{7}{5}; u_4 = \frac{3}{2}; u_5 = \frac{11}{7}$.

d) Xét $\frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$.

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n) .

Câu 4. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$. Khi đó:

*a) Năm số hạng đầu của dãy số là: $u_1 = 2; u_2 = 7; u_3 = 12; u_4 = 17; u_5 = 22$.

*b) Số hạng tổng quát của dãy (u_n) là $u_n = 5n - 3$

*c) Số hạng u_{50} bằng 247

d) 512 là số hạng thứ 102 của dãy (u_n)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Năm số hạng đầu của dãy số là: $u_1 = 2; u_2 = 7; u_3 = 12; u_4 = 17; u_5 = 22$.

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = u_1 + 5 \\ u_3 = u_2 + 5 \\ u_4 = u_3 + 5 \\ \dots\dots\dots \\ u_n = u_{n-1} + 5 \end{cases}$$

b) Ta có:

Cộng theo vế toàn bộ đẳng thức trên rồi triệt tiêu các số hạng giống nhau ở hai vế, ta được:
 $u_n = 2 + (n - 1)5 = 5n - 3$

c) Số hạng thứ 50 của dãy số là: $u_{50} = 5 \cdot 50 - 3 = 247$

d) Xét $5n - 3 = 512 \Rightarrow n = 103$

Vậy số 512 là số hạng thứ 103 của dãy số (u_n) .

Câu 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$. Khi đó:

a) Số hạng thứ 2021 là $\frac{2021}{4040}$

b) Số hạng thứ 2022 là $\frac{2022}{4043}$

*c) Số hạng thứ 2023 là $\frac{2023}{4047}$

*d) Số hạng thứ 2024 là $\frac{2024}{4049}$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

Với k là số nguyên dương, ta có:

$$\frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{(2k+1) - (2k-1)}{(2k-1) \cdot (2k+1)} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(2k-1)} - \frac{1}{(2k+1)} \right)$$

$$\text{Khi đó: } u_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)} \right] = \frac{n}{2n+1}$$

Vậy $u_n = \frac{n}{2n+1}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Áp dụng công thức số hạng tổng quát ta có:

$$u_{2021} = \frac{2021}{2 \cdot 2021 + 1} = \frac{2021}{4043}$$

$$u_{2022} = \frac{2022}{2 \cdot 2022 + 1} = \frac{2022}{4045}$$

$$u_{2023} = \frac{2023}{2 \cdot 2023 + 1} = \frac{2023}{4047}$$

$$u_{2024} = \frac{2024}{2 \cdot 2024 + 1} = \frac{2024}{4049}$$

Câu 6. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2023; u_2 = 2024 \\ 2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \end{cases}$ với $n \geq 1$. Khi đó:

*a) Dãy $(v_n): v_n = u_n - u_{n-1}$ là dãy không đổi.

*b) Biểu thị u_n qua u_{n-1} ta được $u_n = u_{n-1} + 1$

*c) Ta có $u_3 = 2025$

d) Ta có $u_{2024} = 4044$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Ta có: $2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \Rightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \Rightarrow v_{n+2} = v_{n+1}$

Tương tự, ta chứng minh được $v_{n+1} = \dots = v_2 = 1$, hay dãy (v_n) là dãy không đổi.

b) Ta có: $u_n - u_{n-1} = 1 \Rightarrow u_n = u_{n-1} + 1$

Suy ra $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1$
 $= 1 + 1 + \dots + 1 + u_1 = n - 1 + 2023 = n + 2022.$

Khi đó $u_{2024} = 4046$

Câu 7. Cho dãy số (u_n) được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Khi đó:

*a) Ta có $u_2 = 3$

*b) Ta có $u_4 = 11$

c) Ta có $u_{2024} = 4092536$

d) Ta có $u_{2023} = 4088482$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Ta có:

$$u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \Rightarrow u_{n+1} = u_n + 2n - 1$$

$$u_2 = 2 + 2 \cdot 1 - 1 = 3$$

$$\text{Khi đó: } u_3 = 3 + 2 \cdot 2 - 1 = 6$$

$$u_4 = 6 + 2 \cdot 3 - 1 = 11$$

$$\text{Suy ra: } u_n = 2 + (n - 1)^2$$

c) Ta có $u_{2024} = 4092531$

d) Ta có $u_{2023} = 4088486$

Câu 8. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$. Khi đó:

*a) Số hạng $u_1 = \frac{1}{2}$

*b) Số hạng $u_3 = \frac{3}{4}$

c) $\frac{10}{11}$ là số hạng thứ 11 của dãy số

d) $u_{2023} + u_{2024} > 2$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{array} \right.$$

Ta có:

Suy ra:

$$u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n = \frac{n}{n+1}$.

a) Số hạng $u_1 = \frac{1}{2}$

b) Số hạng $u_3 = \frac{3}{4}$

c) $\frac{10}{11}$ là số hạng thứ 10 của dãy số

d) $u_{2023} + u_{2024} < 2$

Câu 9. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 1 - \frac{1}{n}$. Khi đó:

*a) Ta có $u_3 = \frac{2}{3}$

b) $u_7 - u_8 = \frac{1}{56}$

c) $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)}$

*d) Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Ta có $u_3 = \frac{2}{3}$

b) $u_7 - u_8 = -\frac{1}{56}$

c) Ta có: $u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \geq 1$.

Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{n}{4^n}$. Khi đó:

a) Ta có $u_n = \frac{n}{4^n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

*c) Ta có $u_{2024} < u_{2023}$

*b) Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \geq 1$

d) Dãy số (u_n) là dãy số tăng

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

Nhận xét: $u_n = \frac{n}{4^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{4^{n+1}} : \frac{n}{4^n} = \frac{n+1}{4n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n} < 1, \forall n \geq 1$

Suy ra $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Câu 11. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Khi đó:

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}$

*b) $\frac{u_{2024}}{u_{2023}} < 1$

c) $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^$

*d) Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

Nhận xét: $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

$$= \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

Vì $0 < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$ nên $\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < 1$

hay $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Suy ra

$u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Câu 12. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. Khi đó:

*a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+3)(n+2)}$

b) $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) Dãy số (u_n) là dãy số giảm

*d) Dãy (u_n) là dãy số bị chặn.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

$$\text{Xét } u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^2 + 4n + 4 - (n^2 + 4n + 3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0$$

Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

$$\text{Ta có: } u_n = \frac{n+1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Mặt khác: } u_n = \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Do đó: $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) là dãy số bị chặn.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = n + \frac{1}{n}$. Khi đó:

a) $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^$

*b) Dãy số (u_n) là dãy số tăng

c) $u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

d) Dãy số đã cho bị chặn trên

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= n+1 + \frac{1}{n+1} - \left(n + \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)n} = \frac{(n+1)n - 1}{(n+1)n} > 0 \text{ (vì } (n+1)n > 1, \forall n \geq 1). \end{aligned}$$

Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vì vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $n, \frac{1}{n}$, ta được:

$$n + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{n \cdot \frac{1}{n}} = 2 \text{ hay } u_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vì vậy dãy số đã cho bị chặn dưới.

Câu 14. Bà Hoa gửi vào một ngân hàng số tiền 200 triệu đồng với lãi suất 5% một năm theo hình thức lãi kép,

kỳ hạn 1 tháng. Số tiền (triệu đồng) của bà Hoa sau n tháng được tính theo công thức $T_n = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12} \right)^n$. Khi đó:

*a) Sau 1 tháng, số tiền bà Hoa nhận được là khoảng 200,83 (triệu đồng)

*b) Sau 2 tháng, số tiền bà nhận được là khoảng 201,67 (triệu đồng);

*c) Sau 14 tháng, số tiền bà nhận được là khoảng 211,99 (triệu đồng).

d) Sau 17 tháng, số tiền bà nhận được là khoảng 215,65 (triệu đồng).

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

$$\text{Sau 1 tháng, số tiền bà Hoa nhận được là: } T_1 = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12} \right)^1 \approx 200,83 \text{ (triệu đồng)}$$

Sau 2 tháng, số tiền bà nhận được là: $T_2 = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12} \right)^2 \approx 201,67$ (triệu đồng);

Sau 14 tháng, số tiền bà nhận được là: $T_{14} = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12} \right)^{14} \approx 211,99$ (triệu đồng).

Sau 17 tháng, số tiền bà nhận được là: $T_{17} = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12} \right)^{17} \approx 214,65$ (triệu đồng).

---HẾT---