HẢI DƯƠNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ GIAO LƯU OLYMPIC
MÔN: TOÁN - LỚP 8
Năm học: 2021 - 2022
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề bài gồm 05 câu, 01 trang)

Câu 1 (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{(x^2+x)}{(x^2-2x+1)}:\left(\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2-x^2}{x^2-x}\right)$ với $x \neq 0; \pm 1$

2) Cho a, b, c là các số hữu tỉ khác 1 thoả mãn: a + b + c = 3

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{(a-1)^2}+\dfrac{1}{(b-1)^2}+\dfrac{1}{(c-1)^2}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Câu 2 (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x^2+\dfrac{4x^2}{(x-2)^2}=12$

2) Tìm đa thức f(x) biết rằng f(x) chia cho x – 3 thì dư 2, f(x) chia cho x + 4 thì dư 9, còn f(x) chia cho $x^2 + x - 12$ thì được thương $x^2 + 3$ và còn dư.

Câu 3 (2,0 điểm)

1) Tìm các số tự nhiên n để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố.

2) Tìm các số nguyên x, y sao cho: $x^2 - 2xy - 3y^2 = 3x - y + 2$

Câu 4 (3,0 điểm)

Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi O là giao điểm của AC với BD và I là giao điểm của AD với BC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

1) Chứng minh: $\dfrac{OA+OB}{OC+OD}=\dfrac{IA+IA}{IC+ID}$

2) Chứng tỏ rằng: I, M, O, N thẳng hàng.

3) Gọi K là một điểm di động trên đường chéo BD.

Chứng minh: KA.BD ≤ KB.AD + KD.AB

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho hai số dương x, y thay đổi thoả mãn xy = 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{y}+\dfrac{9}{3x+y}$

-----------------------Hết ----------------------

(Lưu ý: Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay)

Họ và tên thí sinh ……………………………………..………….…Số báo danh…………...….

Chữ kí giám thị 1………………………………Chữ kí giám thị 2………………………...……....

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ GIAO LƯU OLYMPIC MÔN TOÁN LỚP 8
Năm học 2021-2022
(Hướng dẫn chấm gồm 4 trang)

Câu	ý	Nội dung	Điểm
1	1	$P=\dfrac{(x^2+x)}{(x^2-2x+1)}:\left(\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2-x^2}{x^2-x}\right)$ với $x\neq 0, x\neq \pm 1$ $P=\dfrac{x(x+1)}{(x-1)^2}:\left(\dfrac{x^2-1+x+2-x^2}{x(x-1)}\right)=\dfrac{x(x+1)}{(x-1)^2}.\dfrac{x.(x-1)}{x+1}$	0,5
		$=\dfrac{x^2}{x-1}$	0,5
	2	Đặt $a-1=x,\ b-1=y,\ c-1=z$ => x + y + z = 0 và $\dfrac{1}{(a-1)^2}+\dfrac{1}{(b-1)^2}+\dfrac{1}{(c-1)^2}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}$	0,25
		$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2-2.\dfrac{x+y+z}{xyz}$	0,5
		$=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2$ vì $x+y+z=0$ => đpcm	0,25
2	1	$x^2+\dfrac{4x^2}{(x-2)^2}=12$ (1). ĐK: x ≠ 2 $(1)\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{2x}{x-2}\right)^2-\dfrac{4x^2}{x-2}=12$ $\Leftrightarrow\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right)^2-4.\dfrac{x^2}{x-2}=12$ (2)	0,25
		Đặt $\dfrac{x^2}{x-2}=t$ Khi đó phương trình (2) trở thành : $t^2-4t-12=0$ $\Leftrightarrow$ (t − 6)(t + 2) = 0	0,25
		Với t = −2 thì $x^2=-2x+4$ $\Leftrightarrow (x+1)^2=5$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=\sqrt{5}\\x+1=-\sqrt{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{5}-1\\x=-\sqrt{5}-1\end{array}\right.$ Đối chiếu điều kiện x ≠ 2 thì $x=\pm\sqrt{5}-1$ thoả mãn bài toán	0,25

		Với t = 6 thì $x^2 = 6x - 12$ $\Leftrightarrow (x-3)^2 = -3$ (vô lí) Vậy PT (1) có tập nghiệm $S = \left\{\sqrt{5}-1; -\sqrt{5}-1\right\}$	0,25
	2	Gọi đa thức thương của phép chia đa thức f(x) cho x-3; x+4 lần lượt là P(x); Q(x) . Khi đó ta có $f(x) = (x-3)P(x) + 2; \forall x$ (1) $f(x) = (x+4)Q(x) + 9; \forall x$ (2) Do (1) đúng với mọi x nên (1) đúng với x = 3. Thay x = 3 vào (1) ta được f(3) =2 Do (2) đúng với mọi x nên (1) đúng với x = -4. Thay x = -4 vào (2) ta được f(-4) = 9	0,25
		Vì đa thức f(x) chia cho $x^2 + x - 12$ thì được thương $x^2 + 3$ và còn dư. Ta thấy đa thức chia có bậc là 2 nên dư trong phép chia này có dạng ax + b. Ta có $f(x) = \left(x^2 + x - 12\right)\left(x^2 + 3\right) + ax + b = (x-3)(x+4)\left(x^2 + 3\right) + ax + b$ (3) với mọi x	0,25
		Do (3) đúng với mọi x nên đúng với x = 3; x =-4. Thay x = 3 ; x = -4 vào (3) ta được $f(3) = 3a + b = 2$ (4) và $f(-4) = -4a + b = 9$ (5).	0,25
		Từ (4) và (5) trừ vế với vế ta được $7a = -7 \Leftrightarrow a = -1$ Thay a = -1 vào (4) ta được b = 5 Từ đó $f(x) = \left(x^2 + x - 12\right)\left(x^2 + 3\right) - x + 5 = x^4 + x^3 - 9x^2 + 2x - 31$ Vậy đa thức $f(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 + 2x - 31$	0,25
3	1	$(n^2 - 8)^2 + 36 = n^4 - 16n^2 + 100 = (n^2 + 10)^2 - 36n^2$ $= (n^2 - 6n + 10)(n^2 + 6n + 10)$	0,25
		- Để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố thì: $n^2 - 6n + 10 = 1$ hoặc $n^2 + 6n + 10 = 1$	0,25
		Xét $n^2 - 6n + 10 = 1 \Leftrightarrow (n-3)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 3$ Khi đó $(n^2 - 8)^2 + 36 = 37$ là số nguyên tố (thoả mãn)	0,25
		Xét $n^2 + 6n + 10 = 1 \Leftrightarrow (n+3)^2 = 0 \Leftrightarrow n = -3$ (loại do n là số tự nhiên) Vậy n = 3 thoả mãn bài toán.	0,25
	2	$x^2 - 2xy - 3y^2 = 3x - y + 2$ $\Leftrightarrow (x-3y)(x+y) = x - 3y + 2x + 2y + 2$ $\Leftrightarrow (x-3y)(x+y) - (x-3y) - 2(x+y) = 2$ $\Leftrightarrow (x-3y)(x+y-1) - 2(x+y-1) = 4$ $\Leftrightarrow (x+y-1)(x-3y-2) = 4(*)$	0,25
		Do x, y là các số nguyên nên x + y – 1 và x – 3y – 2 là các số nguyên thoả mãn(*) nên x + y – 1 và x – 3y – 2 là các ước của 4 Ta có bảng sau:	0,25

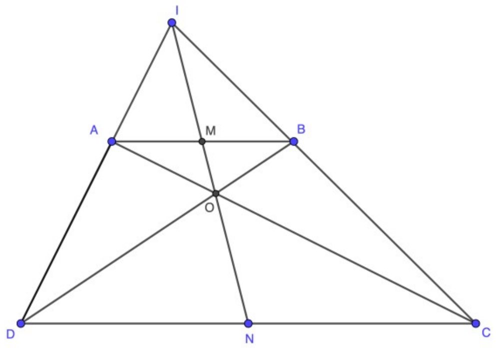
x + y – 1	1	4	-1	-4	2	-2
x – 3y – 2	4	1	-4	-1	2	-2
x	3	9/2	-1/2	-2	13/4	-3/4
y	-1	1/2	1/2	-1	-1/4	-1/4
nhận xét	nhận	loại	loại	nhận	loại	loại

Vậy x = 3, y = -1 hoặc x = -2, y = -1.

0,5

4

1



Xét tam giác OAB và tam giác OCD có AB // CD

$\Rightarrow \frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}=\frac{OA+OB}{OC+OD}$ (1)

0,5

Xét tam giác IDC có AB // CD

$\Rightarrow \frac{IA}{ID}=\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{CD}=\frac{IA+IB}{IC+ID}$ (2)

0,25

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow \frac{OA+OB}{OC+OD}=\frac{IA+IA}{IC+ID}$

0,25

2

Gọi giao điểm của IO với AB và CD lần lượt là M’ và N’.

- Xét tam giác IDN’ có AM’ // DN’ $\Rightarrow \frac{AM'}{DN'}=\frac{IM'}{IN'}$

- Xét tam giác ICN’ có BM’ // CN’ $\Rightarrow \frac{BM'}{CN'}=\frac{IM'}{IN'}$

Suy ra: $\frac{AM'}{DN'}=\frac{BM'}{CN'}=\frac{AM'+BM'}{DN'+CN'}=\frac{AB}{CD}$ (3)

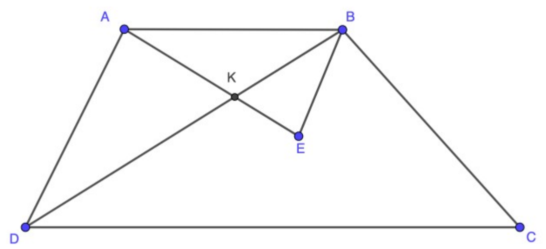
0,25

- Xét tam giác OAM’ có AM’//CN’ $\Rightarrow \frac{AM'}{CN'}=\frac{OM'}{ON'}$

- Xét tam giác OBM’ có BM’//DN’ $\Rightarrow \frac{BM'}{DN'}=\frac{OM'}{ON'}$

Suy ra: $\frac{AM'}{CN'}=\frac{BM'}{DN'}=\frac{AM'+BM'}{DN'+CN'}=\frac{AB}{CD}$ (4)

0,25

		Từ (3) và (4) suy ra: $\Rightarrow \frac{AM'}{DN'}=\frac{BM'}{CN'}=\frac{AM'}{CN'}=\frac{BM'}{DN'}$	0,25
		Suy ra AM’ = BM’ và CN’ = DN’ => M’ là trung điểm của AB và N’ là trung điểm của CD => M’ trùng M và N’ trùng với N => I, M, O, N thẳng hàng.	0,25
	3	 Trên tia AK lấy E sao cho BE // AD. Xét tam giác AKD và tam giác có BE // AD $\Rightarrow \frac{DK}{BK}=\frac{AD}{BE}=\frac{AK}{KE}$ => DK.BE = AD.BK	0,25
		=> KB.AD + KD.AB = DK.BE + DK.AB = DK(BE + AB) $\ge DK.AE$ (*)	0,25
		Do $\frac{DK}{BK}=\frac{AK}{KE}(cmt)\Rightarrow \frac{DK}{BK+DK}=\frac{AK}{KE+AK}\Rightarrow \frac{DK}{BD}=\frac{AK}{AE}$ => DK.AE = BD.AK (**)	0.25
		Từ (*) và (**) => KA.BD ≤ KB.AD + KD.AB	0,25
5		Chứng minh bất đẳng thức: $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ với a, b dương $P=\frac{6x+2y}{xy}+\frac{9}{3x+y}=\frac{6x+2y}{12}+\frac{9}{3x+y}=\frac{3x+y}{6}+\frac{9}{3x+y}$ Đặt t = 3x + y ≥ $\ge 2\sqrt{3xy}=12$, khi đó:	0,25 0,25
		$P=\frac{t}{6}+\frac{9}{t}=\left(\frac{t}{16}+\frac{9}{t}\right)+\frac{5t}{8}\ge 2\sqrt{\frac{t}{16}.\frac{9}{t}}+\frac{5.12}{48}=\frac{11}{4}$	0,25

		Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ x.y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$ (Vì x,y >0) Vậy GTNN của P là $\frac{11}{4}$ khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$	0,25

- *Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn được tính điểm tối đa*