BÀI 7. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

|  |  |
| --- | --- |
| **1. Định nghĩa**  - Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn đó.  - Trong Hình 1, tứ giác ABCD nội tiếp (O) và (O) ngoại tiếp tứ giác ABCD. | img001 |

**2. Định lí**

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180°.

- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đổi diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

**3. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp**

- Tứ giác có tổng hai góc đổi bằng 180°.

- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.

- Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm cố định (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

-Tứ giác có hai đinh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc *α.*

*Chú ý:* Trong các hình đã học thì hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân nội tiếp được đường tròn.

**II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1. Chứng minh tứ giác nội tiếp**

*Phương pháp giải*: Để chứng minh tứ giác nội tiếp, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

*Cách 1.* Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đôì bằng 180°.

*Cách* 2. Chứng minh tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc *α.*

*Cách 3.* Chứng minh tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.

*Cách 4.* Tìm được một điểm cách đều 4 đỉnh của tứ giác.

1A. Cho tam giác *ABC* nhọn, đường cao *BM* và *CN* cắt nhau tại H*.* Chứng minh các tứ giác *AMHN* và *BNMC* là những tứ giác nội tiêp.

1B. Cho điểm *A* nằm ngoài đường tròn (O), qua *A* kẻ hai tiếp tuyến *AB* và *AC* với đường tròn ( *B, c* là tiếp điểm). Chứng minh tứ giác *ABOC* là tứ giác nội tiếp.

2A. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp (O), *M* là điểm chính giữa của cung *AB.* Nối *M* với *D, M* với C cắt *AB* lần lượt ở *E* và *P.* Chứng minh *PEDC* là tứ giác nội tiếp.

2B. Cho tam giác *ABC* nhọn nội tiếp đường tròn *(O). M* là điểm thuộc đường tròn. Vẽ *MH* vuông góc với *BC* tại *H,* vẽ *MI* vuông góc với *AC.* Chứng minh *MIHC* là tứ giác nội tiếp.

**Dạng 2. Sử dụng tứ giác nội tiếp để chứng minh các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau, các đường thẳng song song hoặc đồng quy, các tam giác đồng dạng...**

*Phương pháp:* Sử dụng tính chât của tứ giác nội tiếp.

3A. Cho đường tròn (O) đường kính *AB.* Gọi *H* là điểm nằm giữa O và *B.* Kẻ dây CD vuông góc với *AB* tại *H*. Trên cung nhỏ *AC* lấy điểm *E,* kẻ *CK* ⊥ *AE* tại *K.* Đường thẳng *DE* cắt *CK* tại *F.* Chứng minh:

a) Tứ giác *AtìCK* là tứ giác nội tiếp;

b) A*Hì.AB = AD*2;

c) Tam giác *ACE* là tam giác cân.

3B. Cho nửa (O) đường kính *AB.* Lấy M ∈ *OA* (*M* không trùng o và *A).* Qua *M* vẽ đường thẳng *d* vuông góc với *AB.* Trên *d* lấy *N* sao cho *ON > R.* Nôi *NB* cắt (O) tại c. Kẻ tiếp tuyến *NE* với (O) (£ là tiếp điểm, *E* và *A* cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ *d).* Chứng minh:

a) Bốn điểm *O, E, M, N* cùng thuộc một đường tròn;

b) *NE2 = NC.NB*;

c) ** (H là giao điểm của *AC* và *d*);

d) *NF* là tiếp tuyến (O) với *F* là giao điểm của *HE* và (O).

4A.Cho đường tròn (O) đường kính *AB,* gọi I là trung điểm của *OA,* dây CD vuông góc với *AB* tại *I.*  Lấy *K* tùy ý trên cung *BC* nhỏ, *AK* cắt CD tại *H.*

a) Chứng minh tứ giác *BIHK* là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh *AHAK* có giá trị không phụ thuộc vị ữí điểm *K.*

c) Kẻ *DN* ⊥ *CB, DM* ⊥ *AC.* Chứng minh các đường thẳng *MN, AB, CD* đồng quy.

4B.Cho đường tròn (O; *R*) và điểm *A* cố định ngoài đường tròn. Qua *A* kẻ hai tiếp tuyến *AM, AN* tói đường tròn (*M, N* là hai tiếp điểm). Một đường thẳng *d* đi qua *A* cắt đường tròn (O; *R)* tại *B* và C (AB < AC). Gọi 7 là trung điểm *BC.*

a) Chứng minh năm điểm *A, M, N, O, I* thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh *AM2 = AB.AC.*

c) Đường thẳng qua *B,* song song với *AM* cắt *MN* tại *E.* Chúng minh *IE* song song *MC.*

d) Chứng minh khi *d* thay đổi quanh quanh điểm A thì trọng tâm G của tam giác *MBC* luôn nằm trên một đường tròn cô' định.

**III. BÀI TẬP VỂ NHÀ**

5. Cho điểm C nằm trên nửa đường tròn (O) vói đường kính *AB* sao cho cung **lớn hơn cung * (C* ≠ *B).* Đường thăng vuông góc vói *AB* tại O cắt dây *AC* tại D. Chứng minh tứ giác *BCDO* nội tiếp.

6. Cho đường tròn (O) đường kính *AB.* Trên đoạn thẳng *OB* lấy điểm *H bất* kì (H không trùng O*, B).* Trên đường thẳng vuông góc với *OB* tại *H,* lấy một điểm *M* ở ngoài đường tròn; *MA* và *MB* thứ tự cắt đường tròn (O) tại c và D. Gọi *I* là giao điểm của *AD* và *BC.* Chứng minh *MCID* và *MCHB* là tứ giác nội tiếp.

7. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại *A, B.* Kẻ đường kính *AC* của (O) cắt đường tròn (O’) tại *F.* Kẻ đường kính *AE* của (O') cắt đưòng tròn (O) tại G. Chứng minh:

a) Tứ giác *GFEC* nội tiếp; b) GC, *FE* và *AB* đồng quy.

8. Cho tam giác *ABC* cân tại *A.* Đường thẳng *xy* song song với *BC* cắt *AB* tại *E* và cắt *AC* tại *F.* Chúng minh tứ giác *EFCB* nội tiếp.

9. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A,* đường cao *AH.* Kẻ *HE* vuông góc với *AB* tại *E,* Kẻ *HF* vuông góc với *AC* tại *F.* Chứng minh tứ giác *BEFC* nội tiếp.

10. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* và điểm *M* thuộc cạnh *AC. Vẽ* đường tròn tâm O đường kính MC cắt *BC* tại *E.* Nối *BM* cắt đường tròn (O) tại N, AN cắt đường tròn (O) tại D. Lấy I đối xứng với M qua *A, K* đối xứng với M qua E.

a) Chứng minh *BANC* là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh *CA* là phân giác của *.*

c) Chứng minh *ABED* là hình thang.

d) Tìm vị trí M để đường tròn ngoại tiếp tam giác *BIK* có bán kính nhỏ nhất.

11. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn. Đường tròn (O; *R*) có đường kính *BC* cắt AB, AC lần lượt tại *F* và E; *BE* cắt *CF* tại H.

a) Chứng minh tứ giác *AFHE* nội tiếp. Từ đó, xác định tâm *I* của đường tròn ngoại tiếp tứ giác này.

b) Tia *AH* cắt *BC* tại D. Chứng minh *HE.HB = 2HD.HI*

c) Chứng minh bôn điểm *D, E, I, F* cùng nằm trên một đường tròn.

12. Cho đường tròn (O; *R*) và dây CD cố định. Điểm M thuộc tia đối của tia CD. Qua M kẻ hai tiếp tuyên *MA, MB* tới đường tròn *(A* thuộc cung lớn CD). Gọi *I* là trung điểm CD. Nối *BI* cắt đường tròn tại *E* (E khác *B).* Nối *OM* cắt *AB* tại *H.*

a) Chứng minh *AE* song song CD.

b) Tìm vị trí của *M* để *MA* ⊥ *MB.*

c) Chứng minh *HB* là phân giác của *CHD.*

13. Cho đường tròn tâm O bán kính *R,* hai điểm c và D thuộc đường tròn, B là điểm chính giữa của cung nhỏ CD. Kẻ đường kính *BA;* trên tia đối của tia *AB* lấy điểm *S.* Nối *S* với cắt (O) tại *M, MD* cắt *AB* tại *K, MB* cắt *AC* tại *H.* Chứng minh:

a) *.* Từ đó suy ra tứ giác *AMHK* nội tiếp;

b) *HK* song song CD.

Cho hình vuông *ABCD. E* di động trên đoạn CD (E khác c, D). Tia *AE* cắt đường thẳng *BC* tại *F,* tia *Ax* vuông góc vói *AE* tại *A* cắt đường thẳng DC tại *K.* Chứng minh:

a) **

b) Tam giác *KAF* vuông cân;

c) Đường thẳng *BD* đi qua trung điểm *I* của *KF;*

d) Tứ giác *IMCF* nội tiếp với M là giao điểm của *BD* và *AE.*

15. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn nội tiếp (O), *M* là điểm thuộc cung nhỏ *AC.* Vẽ *MH* vuông góc với *BC* tại *H, MI* vuông góc *AC* tại *I.*

a) Chứng minh **

b) Đường thẳng *HI* cắt đường thẳng *AB* tại *K.* Chứng minh *MK* vuông góc vói *BK.*

c) Chứng minh tam giác *MIH* đồng dạng vói tam giác *MAB.*

d) Gọi E là trung điểm của *IH* và F là trung điểm *AB.* Chứng minh tứ giác *KMEF* nội tiếp từ đó suy ra ME vuông góc vói EF.

**BÀI 7. TỨ GIÁC NỘI TIẾP**

|  |  |
| --- | --- |
| **1A.** Xét tứ giác AMHN có:    ⇒ ĐPCM.  Xét tứ giác BNMC có:  ⇒ ĐPCM.  **1B.** HS tự chứng minh  **2A.** Ta có:  (sđ + sđ)  sđ  ⇒ PEDC nội tiếp.  **2B.** Ta có:  ⇒ MIHC nội tiếp (hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc vuông)  **3A.** a) Học sinh tự chứng minh  b) ΔADB vuông tại D, có đường cao DH ⇒ AD2 = AH.AB  c) sđ EC,  (Tứ giác AKCH nội tiếp)  ⇒ ⇒ DF//HK (H là trung điểm DC nên K là trung điểm FC)  ⇒ ĐPCM.  **3B.** a) Học sinh tự chứng minh  b) sđ  ⇒ ΔNEC ~ ΔNBE (g.g) ⇒ ĐPCM.  c) ΔNCH ~ ΔNMB (g.g)  ⇒ NC.NB = NH.NM = NE2  ΔNEH ~ ΔNME (c.g.c)  ⇒  d)  (Tứ giác NEMO nội tiếp)  ⇒ ⇒ EH ⊥ NO  ⇒ ΔOEF cân tại O có ON là phân giác ⇒  ⇒ ΔNEO = ΔNFO vậy ⇒ ĐPCM.  **4A.** a)  ⇒ Tứ giác BIHK nội tiếp  b) Chứng minh được: ΔAHI ~ ΔABK (g.g)  ⇒ AH.AK = AI.AB = R2 (không đổi)  c) Chứng minh được MCND là hình chữ nhật từ đó ⇒ ĐPCM.  **4B.** a) Chú ý:  b) sđ  ⇒ ΔAMB ~ ΔACM (g.g)  ⇒ ĐPCM.  c) AMIN nội tiếp  ⇒  BE//AM ⇒  ⇒ ⇒ Tứ giác BEIN nội tiếp ⇒  Chứng minh được: ⇒ IE//CM.  d) G là trọng tâm ΔMBC ⇒ G ∈ MI.  Gọi K là trung điểm AO ⇒ MK = IK = AO.  Từ G kẻ GG'//IK (G' ∈ MK)  không đổi (1)  cố định (2). Từ (1) và (2) có G thuộc ().  **5.** Học sinh tự chứng minh.  **6.** Học sinh tự chứng minh.  **7.** Học sinh tự chứng minh.  **8.** *Gợi ý:* Chứng minh BEFC là hình thang cân  **9.** *Gợi ý:*(tính chất hình chữ nhật và  (cùng phụ )  **10.** a) Học sinh tự chứng minh.  b) Học sinh tự chứng minh.  c) Học sinh tự chứng minh.  d) Chú ý:    ⇒ Tứ giác BICK nội tiếp đường tròn (T), mà (T) cũng là đường tròn ngoại tiếp ΔBIK. Trong (T), dây BC không đổi mà đường kính của (T) ≥ BC nên đường kính nhỏ nhất bằng BC.  Dấu "=" xảy ra  **11.** HS tự làm.  **12.** a) HS tự chứng minh.  b)  c) MC. MD = MA2 = MH.MO  ⇒ MC. MD = MH.MO  ⇒ ΔMHC ~ ΔMDO (c.g.c)  Tứ giác CHOD nội tiếp  Chứng minh được:  (cùng phụ hai góc bằng nhau)  **13**. HS tự chứng minh.  **14.** a) HS tự chứng minh.  b) HS tự chứng minh.  c) Tứ giác ACFK nội tiếp (i) với I là trung điểm của KF ⇒ BD là trung trực AC phải đi qua I.  d) HS tự chứng minh.  **15.** HS tự chứng minh.  b) HS tự chứng minh.  c) HS tự chứng minh.  d)      (cùng bù với hai góc bằng nhau)  ⇒ KMEF nội tiếp ⇒ = 900. | img030  img031  img032  img033  img034  img035  img036  img037  img038  img039  img040  img041 |