|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **NGHỆ AN**  **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9**  **NĂM HỌC 2020-2021**  **MÔN THI: TOÁN – BẢNG A**  **Thời gian : 150 phút (***không kể thời gian giao đề)* |

**Câu 1. (3,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các giá trị nguyên của để là một số chính phương
2. Cho đa thức với các hệ số nguyên thỏa mãn 

Chứng minh rằng đa thức không có nghiệm nguyên

**Câu 2. (6,5 điểm)**

1. Giải phương trình 
2. Giải hệ phương trình : 

**Câu 3. (1, 5 điểm)** Cho ba số thực không âm thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Câu 4. (6,0 điểm)** Cho tam giác nhọn có lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh của tam giác. Gọi là trực tâm của tam giác và là trung điểm của 

1. Chứng minh rằng 4 điểm cùng thuộc một đường tròn
2. Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt tại M. Trên tia lấy điểm P sao cho  Chứng minh rằng (Trong đó lần lượt là diện tích các tam giác 

**Câu 5. (3,0 điểm)**

1. Cho hình thoi có Gọi lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác và Chứng minh rằng 
2. Cho đa giác đều có 2021 đỉnh, sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.

**ĐÁP ÁN**

**Câu 1.**

1. **Tìm tất cả các giá trị nguyên của để là một số chính phương**

Ta có : 



Do 2017 là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau xảy ra



Vậy có 2 giá trị nguyên của thỏa mãn yêu cầu bài toán là 

1. **Cho đa thức với các hệ số nguyên thỏa mãn Chứng minh rằng đa thức không có nghiệm nguyên**

Giả sử đa thức có nghiệm nguyên khi đó

(với là đa thức hệ số nguyên). Khi đó :



Mà 



Do là tích hai số tự nhiên liên tiếp, suy ra vế trái của (\*) là số chẵn

Vậy không tồn tại a để đẳng thức xảy ra. Hay đa thức không có nghiệm nguyên.

**Câu 2.**

1. **Giải phương trình **

Điều kiện : Phương trình đã cho tương đương với 



Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho 

1. **Giải hệ phương trình : **

Ta có : 



+)Với thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

. Khi đó hệ có nghiệm 

+) Với thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được :



Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm 

**Câu 3.**

Ta có :



Khi đó suy ra 

Theo nguyên lý Dirichlet trong ba số thực luôn tồn tại hai số hoặc 

Giả sử hai số đó là và b. Khi đó 

Lại có 

Từ đó suy ra 

Ta lại có :



Hoàn toàn tương tự ta có : . Từ đó ta có :



Đặt Khi đó 

  
Vậy và các hoán vị

**Câu 4.**

****

1. Do là trung tuyến của tam giác vuông 



Do tứ giác nội tiếp 

Do tứ giác nội tiếp 

Do tứ giác nội tiếp . Từ đó suy ra :



Từ (1) và (2)tứ giác nội tiếp hay 4 điểm cùng thuộc một đường tròn

1. **Chứng minh rằng **

Gọi là giao điểm của 

Do 

Do là tứ giác nội tiếp 

Theo bài ra nên từ (4), (5) suy ra 

là tứ giác nội tiếp . Lại có :





Từ (6) và (7) 

Gọi lần lượt là độ dài đường cao kẻ từ đỉnh của các tam giác . Ta có :

tương tự : 

Từ đó suy ra 

**Câu 5.**

1. **Chứng minh rằng **

****

Gọi M là trung điểm của cạnh Đường trung trực của đoạn cắt các đường và lần lượt tại và Khi đó lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác 

Dễ thấy 



Khi đó 

Do đó 

Dấu xảy ra hay tứ giác là hình vuông





Đa giác đã cho là đa giác đều nên đa giác đó nội tiếp đường tròn tâm O. Do 2021 là số lẻ nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau tô cùng màu. Giả sử hai đỉnh đó là và cùng tô màu đỏ

Cũng do đa giác đã cho đều và có số đinh lẻ nên tồn tại đỉnh M của đa giác nằm trên đường trung trực đoạn cân. Ta xét 2 khả năng xảy ra :

+) Khả năng 1: Nếu M tô màu đỏ

+)Khả năng 2: nếu M tô màu xanh

Gọi là các đỉnh kề của A và B, có :

cân tại M.Khi đó,

* Nếu màu xanh cân và thỏa mãn bài toán
* Nếu một trong hai đỉnh E, màu đỏ, giả sử màu đỏ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy luôn tồn tại 3 đỉnh của đa giác đều đã cho lập nên một tam giác cân có các đỉnh cùng màu.