

PHỤ LỤC

KẾ HOẠCH DẠY HỌC CHUYÊN ĐỀ “KỸ NĂNG ĐỒN BIẾN ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN TÌM CỰC TRỊ CỦA BIỂU THỨC”

I. MỤC TIÊU BÀI DẠY

- Nghiên cứu bất đẳng thức Cauchy (hay AM - GM), Cauchy - Schwarz...
- Hướng dẫn học sinh giải một số bài toán tìm cực trị của biểu thức nhiều biến bằng phương pháp dồn biến.
- Tổ chức cho học sinh làm các bài tập còn lại của chuyên đề.
- Tổ chức cho học sinh nghiên cứu chủ đề: ***“Phương pháp dồn biến trong các bài toán cực trị của biểu thức”***

II. NHIỆM VỤ CỦA GIÁO VIÊN

- Giáo viên hướng dẫn học sinh chứng minh một số bất đẳng thức cơ bản thường sử dụng trong các bài toán tìm cực trị của biểu thức nhiều biến thường có mặt trong các kỳ thi THPT Quốc Gia và thi học sinh giỏi.
- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập về tìm cực trị của biểu thức nhiều biến bằng cách sử dụng các bất đẳng thức để làm giảm số biến.
- Giáo viên giao đề tài nghiên cứu cho học sinh và hướng dẫn các bước tiến hành tự học, tự nghiên cứu.
- Giáo viên đóng vai trò là người hướng dẫn, tổ chức, thiết kế, cố vấn, trọng tài trong quá trình nghiên cứu của học sinh.

III. NHIỆM VỤ CỦA SINH

Hoàn thành nhiệm vụ giáo viên giao cho.

IV. TIẾN TRÌNH BÀI DẠY

Hoạt động 1: Giáo viên đặt vấn đề về tầm quan trọng của việc sử dụng bất đẳng thức để giải bài toán tìm cực trị của biểu thức.

Giáo viên cho học sinh ôn lại các bất đẳng thức Cauchy (hay AM – GM), Cauchy – Schwarz (hay còn gọi Bunhiacopski)

- *Bất đẳng thức Cauchy (hay AM – GM)*

Cho n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta có
$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

- *Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (hay còn gọi Bunhiacopski)*

Cho hai bộ số $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}; b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

Ta có $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

- *Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz thường sử dụng*

Cho $a, b, c > 0$ và $x, y, z > 0$ khi đó
$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a + b + c)^2}{x + y + z}$$

Giáo viên định hướng cách giải bài toán cực trị của biểu thức và lưu ý cho học sinh ghi nhớ các đánh giá cơ bản sau :

- $x \in [a; b] \Rightarrow (x - a)(x - b) \leq 0$
- $x, y \in [a; b] \Rightarrow \begin{cases} (x - a)(y - b) \leq 0 \\ (x - a)(y - a) \geq 0 \\ (x - b)(y - b) \geq 0 \end{cases}$
- $x, y, z \in [a; b] \Rightarrow (x - a)(y - a)(z - a) + (x - b)(y - b)(z - b) \geq 0$
- $x \leq y \leq z \Rightarrow (y - x)(y - z) \leq 0$

Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài toán tìm cực trị trong đề thi THPT Quốc Gia 2015 từ đó rút ra ưu điểm của phương pháp dồn biến bằng cách đánh giá bất đẳng thức cơ bản.

Bài toán 1 (Đề THPT QG 2015): Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1; 3]$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$$

Lời giải

Ta có: $(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc$

Đặt $x = ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 12$

Ta có: $a, b, c \in [1; 3] \Rightarrow (a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 0 \Rightarrow abc - (ab + bc + ca) + a + b + c - 1 \geq 0$
 $\Rightarrow abc - x + 5 \geq 0 \Rightarrow abc \geq x - 5$

Lại có: $(a - 3)(b - 3)(c - 3) \leq 0 \Rightarrow abc - 3(ab + bc + ca) + 9(a + b + c) - 27 \leq 0$
 $\Rightarrow abc \leq 3x - 27$. Do đó: $3x - 27 \geq abc \geq x - 5 \Rightarrow 2x \geq 22 \Rightarrow x \geq 11$.

Ta có: $P = \frac{x^2 + 72}{x} - \frac{1}{2}abc \leq \frac{x^2 + 72}{x} - \frac{1}{2}(x - 5) = \frac{x}{2} + \frac{72}{x} + \frac{5}{2}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{72}{x} + \frac{5}{2}$, $x \in [11; 12]$

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{72}{x^2} \leq 0 \quad \forall x \in [11; 12]$ nên $P \leq f(x) \leq f(11) = \frac{160}{11}$

Vậy $\max P = \frac{160}{11}$ khi $a = 1; b = 2; c = 3$

Giáo viên nhận xét: Đây là bài toán rất hay. Ta phải dùng hai lần giả thiết của các biến $a, b, c \in [1; 3]$ để tìm ra miền giá trị của $x = ab + bc + ca$ và đánh giá được P thông qua biến x . Cũng từ bài toán trên phải chăng bằng việc đánh giá điều kiện ban đầu chúng ta sẽ giải quyết được một lớp các bài toán dạng này bằng cách đưa về hàm số một biến.

Hoạt động 2: Giáo viên hướng dẫn học sinh giải một số bài tập về tìm cực trị của biểu thức sau

Bài toán 2: Cho $x, y, z \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{2(y+z+2)}{yz+2(x+y+z)} + \frac{8}{2(y+z)+yz+4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz+4}}$$

Hướng dẫn

Biến đổi biểu thức A thành dạng

$$A \leq \frac{2(xy+yz+zx)}{2x(y+z)+yz+4} + \frac{8}{2x(y+z)+yz+4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz+4}}$$

$$A \leq 1 + \frac{yz+4}{2(y+z)+yz+4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz+4}}$$

$$A \leq 1 + \frac{yz+4}{yz+4\sqrt{yz+4}} - \frac{2\sqrt{yz+4}}{\sqrt{yz+4}}$$

Đặt $t = \sqrt{yz}$; $t \in [1; 2]$

Xét hàm số: $f(t) = 1 + \frac{t^2+4}{(t+2)^2} - \frac{2t+4}{t+1}$ với $t \in [1; 2]$

Ta có $f'(t) = \frac{4t-8}{(t+2)^3} + \frac{2}{(t+1)^2} \geq \frac{4}{27} + \frac{2}{9} > 0$, nên $f(t)$ đồng biến trên $[1; 2]$.

Suy ra $A \leq f(t) \leq f(2) = -\frac{7}{6}$

Vậy $\max A = -\frac{7}{6}$ khi $x=1; y=z=2$

Bài toán 3: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn

$a \leq 1, b \leq 2, c \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B = \frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2a+b+3c} + \frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8} + \frac{b}{\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2}+8}$$

Hướng dẫn

Ta có $\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2} = \sqrt{3(4a^2+b^2+9c^2)} \geq 2a+b+3c$ (1)

Mặt khác $2a+b+3c-b-c-b(a+c) = (a+c)(2-b) \geq 0$

$$\Rightarrow 2a+b+3c \geq b+c+b(a+c) \quad (2)$$

Lại có $2ab+ac+bc-b-c-b(a+c) = (b+c)(a-1) \leq 0$

$$\Rightarrow 2ab+ac+bc \leq b+c+b(a+c) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta được

$$B \leq \frac{2[b+c+b(a+c)]}{1+b+c+b(a+c)} + \frac{8}{b+c+b(a+c)+8}$$

Đặt $t = b+c+b(a+c) \Rightarrow 0 \leq t \leq 13$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t}{t+1} + \frac{8}{t+8}$ với $t \in [0; 13]$

$$f'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{8}{(t+8)^2} = \frac{2(3t+10)(6-t)}{(t+1)^2(t+8)^2} = 0 \Leftrightarrow t=6$$

$$f(0) = 1, f(6) = \frac{16}{7}, f(13) = \frac{47}{21}$$

Từ đó suy ra $B \leq f(t) \leq \frac{16}{7} \Rightarrow \max B = \frac{16}{7}$ đạt được khi $a=1, b=2, c=\frac{2}{3}$

Bài 4: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $y+z=x(y^2+z^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$

Hướng dẫn

Từ giả thiết ta có: $x(y+z)^2 \leq 2x(y^2+z^2) = 2(y+z) \Leftrightarrow y+z \leq \frac{2}{x}$

Do đó: $(1+y)(1+z) \leq \frac{1}{4}(2+y+z)^2 \leq \frac{1}{4}\left(2+\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{(1+x)^2}{x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $P \geq \frac{2x^2+1}{(1+x)^2} + \frac{4x^2}{(1+x)^3} = \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$

Ta có: $f'(x) = \frac{2(5x-1)}{(1+x)^4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$.

Lập bảng biến thiên ta được: $P \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{91}{108}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{91}{108}$. Khi $x = \frac{1}{5}, y=z=5$.

Bài 5: Cho $a > b > c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right]$$

Hướng dẫn

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow t > 2$. Khi đó ta có

$$P = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

$$P = (t-1) \left(\frac{1}{t-2} + t \right) = \frac{(t-1)^2}{t-2} = f(t)$$

Xét hàm $f(t)$ trên $(2; +\infty)$ ta được: $f'(t) = \frac{(2t-5)(t-1)^2}{(t-2)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$

Lập bảng biến thiên ta được $P = f(t) \geq f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{27}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t = \frac{5}{2} \Rightarrow x=2y \Rightarrow a=b+d=c+2d, \forall d > 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{27}{4}$

Hoạt động 3: Giáo viên hướng dẫn sử dụng bất đẳng thức cơ bản để đánh giá làm giảm số biến của bài toán

HĐTP 1: Giáo viên hướng dẫn học sinh chứng minh các bất đẳng thức hệ quả sau

Hệ quả 1: Cho $a, b \in \mathbb{R}$ ta có $(a+b)^2 \geq 4ab$

Hệ quả 2: Cho $a, b > 0$ ta có $a^3 + b^3 \geq \frac{(a+b)^3}{4} \geq a^2b + ab^2$

Hệ quả 3: Cho $a, b > 0$ ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

Hệ quả 4: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab + bc + ca$

Hệ quả 5: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ ta có $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$

Hệ quả 6: Cho $a, b, c > 0$ ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

Hệ quả 7: Cho $a, b > 0$ và $ab \geq 1$ ta có $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

Hệ quả 8: Cho $a, b > 0$ và $ab \leq 1$ ta có $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

HĐTP 2: Giáo viên nhận xét và hướng dẫn sử dụng bất đẳng thức cơ bản để đánh giá làm giảm số biến của bài toán

Nhận xét: Trên đây chỉ là một số hệ quả tiêu biểu thường sử dụng để tìm cực trị bằng cách dồn biến. Ứng dụng các hệ quả trên để giải các bài toán sau đây.

Bài toán 6: Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c^2 + 4(ab + bc + ca)}$$

Hướng dẫn

Áp dụng hệ quả 1 $(a+b)^2 \geq 4ab$

Ta có $P = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c^2 + 4(ab + bc + ca)} \geq \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4c(a+b) + (a+b)^2} = M$

$$M = \frac{1}{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{a+b}\right) + 1} = \frac{1}{t^2 + 4t + 1} \text{ với } t = \frac{c}{a+b}.$$

Với $a, b, c \in [1; 2]$ và $t = \frac{c}{a+b} \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t^2 + 4t + 1}$ trên $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$

Ta có $f'(t) = \frac{-2(t+2)}{(t^2 + 4t + 1)^2} < 0$, $\forall t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$

$\Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{1}{6}$; $\forall t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$ hay $P \geq \frac{1}{6}$

Vậy $\min P = \frac{1}{6}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a = b = 1$ và $c = 2$

Bài toán 7: Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $c > 0$ và $a^3 + b^3 = c(c - 1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2}$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } P \geq \frac{\frac{(a+b)^2}{2} + c^2}{(a+b+c)^2} = \frac{\left(\frac{a+b}{c}\right)^2 + 2}{2\left(\frac{a+b}{c} + 1\right)^2} \quad \text{vì } c > 0$$

Từ giả thiết:

$$c^2 = c + a^3 + b^3 = c + (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq c + \frac{(a+b)^3}{4} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{(a+b)^3}{4}} \Rightarrow 0 \leq \frac{a+b}{c} \leq 1.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{a+b}{c} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1 \text{ (vì } a, b \geq 0 \text{ và } c > 0). \text{ Khi đó } P \geq \frac{t^2 + 2}{2(t+1)^2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 2}{2(t+1)^2} \text{ trên } [0;1], \text{ ta có } f'(t) = \frac{t-2}{(t+1)^3} < 0, \quad \forall t \in [0;1]$$

$$\text{Do đó } f(t) \text{ là hàm số nghịch biến trên } [0;1] \Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{3}{8}, \quad \forall t \in [0;1]$$

$$\text{Hay } P \geq \frac{3}{8}, \quad \forall a, b, c \geq 0 \text{ thỏa mãn } c > 0 \text{ và } a^3 + b^3 = c(c - 1).$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3}{8}, \text{ giá trị nhỏ nhất đạt được khi } a = b = 1; c = 2$$

Bài toán 8: Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x + y + z)^3}$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } P = \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + \left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 + 16\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3$$

$$\text{Áp dụng hệ quả 2 ta có } \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + \left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 \geq \frac{1}{4}\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z}{x+y+z}\right)^3$$

$$\text{Do đó } P \geq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z}{x+y+z}\right)^3 + 16\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3. \text{ Đặt } t = \frac{z}{x+y+z} \Rightarrow t \in [0;1].$$

$$\text{Khi đó } P \geq \frac{1}{4}(1-t)^3 + 16t^3. \text{ Xét hàm số } f(t) = \frac{1}{4}(1-t)^3 + 16t^3 \text{ trên } [0;1]$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{189t^2 + 6t - 3}{4} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{9} \in [0;1) \\ t = -\frac{1}{7} \notin [0;1) \end{cases}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên suy ra } f(t) \geq f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{81}, \quad \forall t \in [0;1] \Rightarrow P \geq f(t) \geq \frac{16}{81}$$

Vậy $\text{Min}P = \frac{16}{81}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = 4z$

Bài toán 9: Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức:
$$P = \frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2) - z^2}$$

Hướng dẫn

Ta có
$$P = \frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2) - z^2} = \frac{(x+y)^2}{z^2 + 4(x+y)z + 4xy}$$

Ta có $4xy \leq (x+y)^2$. Do đó
$$P \geq \frac{(x+y)^2}{z^2 + 4(x+y)z + (x+y)^2} = \frac{\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right)^2}{1 + 4\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right)^2}$$

Đặt $t = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$, vì x, y, z thuộc đoạn $[1; 2] \Rightarrow t \in [1; 4]$. Khi đó ta có
$$P \geq \frac{t^2}{1 + 4t + t^2}$$

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2}{1 + 4t + t^2}$ trên $[1; 4]$

Ta có $f'(t) = \frac{4t^2 + 2t}{(1 + 4t + t^2)^2} \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in [1; 4]$. Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến

trên $[1; 4]$. Do đó $f(t) \geq f(1) = \frac{1}{6}, \forall t \in [1; 4]$ hay $P \geq \frac{1}{6}, \forall x, y, z \in [1; 2]$

Vậy $\text{Min}P = \frac{1}{6}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = 1$ và $z = 2$

Bài toán 10: Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức:
$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Hướng dẫn

Vì $c > 0$ do đó ta có
$$P = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}}$$

Đặt $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c} \Rightarrow x, y > 0$ (vì $a, b, c > 0$) khi đó biểu thức P trở thành

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$
. Biến đổi giả thiết $\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}$ ta thu được

$$\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow x^2 y^2 = 2(x^2 + y^2)$$

Ta có $x^2y^2 = 2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 \Rightarrow xy \geq x + y$

và $x^2 + y^2 + 1 = (x + y)^2 - 2xy + 1 \leq (x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = (x + y - 1)^2$ (1)

Ta lại có $(x + y)^2 \geq 4xy \geq 4(x + y) \Rightarrow x + y \geq 4$ (2) (vì $x, y > 0$)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \leq x + y - 1$

Biến đổi biểu thức P , ta thu được

$$P + 2 = \frac{x}{y+1} + 1 + \frac{y}{x+1} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = (x + y + 1) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

Từ hệ quả 3, ta có: $P + 2 \geq (x + y + 1) \frac{4}{x + y + 2} + \frac{1}{x + y - 1} \Rightarrow P \geq 2 - \frac{4}{x + y + 2} + \frac{1}{x + y - 1}$

Đặt $t = x + y \Rightarrow t \geq 4$. Do đó $P \geq 2 - \frac{4}{t+2} + \frac{1}{t-1}$

Xét hàm số $f(t) = 2 - \frac{4}{t+2} + \frac{1}{t-1}$ trên $[4; +\infty)$

Ta có $f'(t) = \frac{3t(t-4)}{(t-1)^2(t+2)^2} \geq 0$, $\forall t \in [4; +\infty)$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (vì $t \in [4; +\infty)$)

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[4; +\infty)$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(4) = \frac{5}{3}, \forall t \in [4; +\infty) \text{ hay } P \geq f(t) \geq \frac{5}{3}$$

Vậy $\min P = \frac{5}{3}$ giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a = b = 2c$

Hoạt động 3: Giáo viên giao bài tập cho học sinh, yêu cầu học sinh tiếp tục giải. (Học sinh làm tại lớp hoặc ở nhà)

Bài 1: Cho $x, y, z > 0; xyz(x + y + z) = 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x + y)(x + z) + y^2z^2$

Bài 2: Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left| \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right|$$

Bài 3: Cho $a, b, c > 0, a^2 + 2b^2 \leq a^2b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{c}{b} + \frac{c}{a} - (c-1)^2$

Bài 4: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, c \geq 1; b \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a(b+c)}{b+2c} + \frac{c(a+b)}{b+2a} + \frac{3(a+c)^2 + 2b^2 + 8}{4(3+ac)}$

Bài 5: Cho các số thực $x, y, z \in [0; 1]$ và $z = \min\{x, y, z\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}} + \frac{yz+1}{\sqrt{y(y+z)}} + \frac{2}{xy+xz-yz}$

Bài 6: Cho các số $a, b, c \in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} + abc$$

Bài 7: Cho các số thực dương x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện $x + 2y - z \geq 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{10y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{x+2y}{2x+3y}$

Bài 8: Cho các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a \geq b, a \geq c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{5(a+b+c)} + \frac{b}{5a-2c} + \frac{c}{5a-2b}$

Bài 9: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $0 < x < y < z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^3z}{y^2(xz+y^2)} + \frac{y^4}{z^2(xz+y^2)} + \frac{z^3+15x^3}{x^2z}$

Bài 10: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} = \sqrt{\frac{ab}{c}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$

Bài 11: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a \geq b \geq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \frac{(a^2+c^2)\sqrt{ab+bc+ca}}{abc(a+b+c)}$

Bài 12: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} - \frac{x^3y^3+y^3z^3}{24x^3z^3}$

Bài 13: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + 2$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2z^2}{y^2+z^2} - \frac{3z}{2x+z}$

Hoạt động 4: Giáo viên hướng dẫn học sinh nghiên cứu chủ đề

“Phương pháp dồn biến trong các bài toán cực trị của biểu thức”

HĐTP 1: Giáo viên chọn nhóm gồm 5 học sinh giỏi trong đội tuyển Toán của nhà trường và yêu cầu học sinh

- Tự tìm tòi thêm các bài tập có liên quan đến cực trị của biểu thức.
- Học sinh viết thành một bài báo nhỏ theo mẫu sau:

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU CỦA HỌC SINH	
Họ và tên:.....	lớp:.....trường:.....
Tên đề tài: <i>Phương pháp dồn biến trong các bài toán cực trị của biểu thức</i>	
I. Mở đầu	
II. Kiến thức cơ bản	
III. Kết quả nghiên cứu (các dạng bài tập minh họa)	
IV. Kết luận	
V. Tài liệu tham khảo	

HĐTP 2: Giáo viên nghiệm thu bài báo của học sinh

- Giáo viên kiểm tra kết quả tự học, tự nghiên cứu của học sinh.
- Giáo viên tổ chức cho học sinh trình bày kết quả nghiên cứu và làm trọng tài cho các cuộc thảo luận.

- Giáo viên đưa ra đánh giá cho bài báo của học sinh theo các tiêu chí:
 - + Chính xác, sáng tạo, tích cực, khả năng làm việc nhóm.
 - + Bài tập học sinh đưa ra đa dạng, phong phú.
 - + Tiến độ công việc hoàn thành.

Kết quả nghiên cứu của nhóm học sinh

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA TRƯỜNG THPT NHƯ THANH

Đề tài: Phương pháp dồn biến trong các bài toán cực trị của biểu thức

Nhóm học sinh: Nguyễn Thùy Dung, Lê Thị Huyền, Trịnh Ngọc Nam,
Nguyễn Phi Lương, Quách Văn Thiên

Trường THPT Như Thanh - Thanh Hóa

Năm học: 2015 - 2016

CHỦ ĐỀ NGHIÊN CỨU CỦA HỌC SINH

Chủ đề: Phương pháp dồn biến trong các bài toán cực trị của biểu thức

Nhóm học sinh: Nguyễn Thùy Dung, Lê Thị Huyền, Trịnh Ngọc Nam,
Nguyễn Phi Lương, Quách Văn Thiên

I. Mở đầu

Trong kỳ thi THPT Quốc Gia và thi học sinh giỏi có rất nhiều bài toán khó liên quan đến cực trị của biểu thức nhiều biến, do vậy để đạt được kết quả cao trong các kỳ thi chúng ta cần nghiên cứu sâu sắc. Sau khi được học chuyên đề “*Kỹ năng dồn biến để giải bài toán tìm cực trị của biểu thức*” chúng tôi thấy rằng phương pháp dồn biến là một công cụ mạnh trong các bài toán tìm cực trị cũng như bài toán chứng minh bất đẳng thức. Trong đề tài này nhóm chúng tôi tập trung nghiên cứu một lớp các bài toán cực trị mà phương pháp giải có liên quan đến kỹ năng dồn biến bằng cách sử dụng bất đẳng thức cơ bản.

II. Kiến thức cơ bản

1/ Bất đẳng thức Cauchy (hay AM – GM)

Cho n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta có
$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2/ Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (hay còn gọi Bunhiacopski)

Cho hai bộ số $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}; b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

Ta có $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

3/ Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz thường sử dụng

Cho $a, b, c > 0$ và $x, y, z > 0$ khi đó
$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

4/ Các bất đẳng thức hệ quả thường dùng

Hệ quả 1: Cho $a, b \in \mathbb{R}$, ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$

Hệ quả 2: Cho $a, b \in \mathbb{R}$, ta có $(a+b)^2 \geq 4ab$

Hệ quả 3: Cho $a, b \in \mathbb{R}$, ta có $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$

Hệ quả 4: Cho $a, b > 0$, ta có $a^3 + b^3 \geq \frac{(a+b)^3}{4} \geq a^2 b + ab^2$

Hệ quả 5: Cho $a, b > 0$, ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

Hệ quả 6: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab + bc + ca$

Hệ quả 7: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, ta có $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$

Hệ quả 8: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, ta có $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$

Hệ quả 9: Cho $a, b, c > 0$, ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

Hệ quả 10: Cho $a, b > 0$ và $ab \geq 1$, ta có $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

Hệ quả 11: Cho $a, b > 0$ và $ab \leq 1$, ta có $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

Hệ quả 12: Cho $a, b > 0$, ta có $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{(1+ab)^2}$

III. Kết quả nghiên cứu

Dạng 1: Phương pháp dồn biến trong bài toán cực trị của biểu thức

Bài 1: Cho $x, y, z \geq 0; x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$P = x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y)$$

Lời giải

Nhận xét: Biểu thức của P là đối xứng giữa x, y, z và là dạng đa thức nên ta hoàn toàn biểu thị chúng được về đại lượng

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+yz+zx=a \\ xyz=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3} \\ 0 \leq 3b \leq 3(x+y+z)xyz \leq a^2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq 9b \leq a \leq 1$$

Khi đó, P chỉ còn hai biến a, b và có thể sẽ đơn giản hơn

$$\begin{aligned} P &= x^3(xy+xz) + y^3(yz+yx) + z^3(zx+zy) \\ &= (x^3+y^3+z^3)(xy+yz+zx) - xyz(x^2+y^2+z^2) \\ &= (1-3a+3b)a - b(1-2a) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $P = f(a; b) = a - 3a^2 + 5ab - b$

Biến b xuất hiện ít hơn nên xét $f'_b(a; b) = 5a - 1$ có hai trường hợp cần xét

• Nếu $a \leq \frac{1}{5} \Rightarrow P = f(a; b) \leq f(a; 0) = a - 3a^2 = a(1 - 3a)$

Đến đây ta có thể dùng khảo sát hàm hoặc sử dụng bất đẳng thức Cauchy

$$P \leq a(1 - 3a) = \frac{1}{3} \cdot 3a(1 - 3a) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{3a + 1 - 3a}{2} \right)^2 = \frac{1}{12}$$

• Nếu $a > \frac{1}{5} \Rightarrow P = f(a; b) \leq f\left(a; \frac{a}{9}\right) = a - 3a^2 + \frac{5}{9}a^2 - \frac{a}{9} = \frac{2}{9}a(4 - 11a) < \frac{1}{12}; \forall a \in \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]$

Bài 2: Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(a+c)(a+4b+c)(a+b+c)^3}{abc(6(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca)}$$

Vậy $\text{Max} P = \frac{1}{12} \Leftrightarrow (x; y; z) = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}; \frac{3-\sqrt{3}}{6}; 0 \right)$

Lời giải

Nhận xét

• Đây là bất đẳng thức cùng bậc nên có thể giả sử $a+b+c=3$. Tại sao chúng tôi lại chọn đại lượng tổng mà không chọn đại lượng khác. Đơn giản vì trong biểu thức biểu diễn được về tổng.

• Vai trò của a, c bình đẳng nên ta có thể đoán được đẳng thức tại $a=c$

Khi đó ta có: $P = \frac{18(3-b)(b+1)}{abc(a^2+b^2+c^2+1)}$

Do đã có tổng nên một suy nghĩ tự nhiên là thử xem bất đẳng thức sau đúng hay sai:

$$abc(a^2+b^2+c^2+1) \leq b \cdot \frac{(a+c)^2}{4} \left[b^2 + 2 \cdot \frac{(a+c)^2}{4} + 1 \right] \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2+a^2+c^2+1}{b^2+2 \cdot \frac{(a+c)^2}{4}+1} \leq \frac{(a+c)^2}{4ac}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-c)^2}{2\left[b^2 + 2 \cdot \frac{(a+c)^2}{4} + 1\right]} \leq \frac{(a-c)^2}{4ac}$$

$$\Leftrightarrow 4ac \leq 2b^2 + (a+c)^2 + 2$$

$$2b^2 + (a-c)^2 + 2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Do đó, từ (*) suy ra

$$P \geq \frac{18(3-b)(b+1)}{b \cdot \frac{(a+c)^2}{4} \left[b^2 + 2 \cdot \frac{(a+c)^2}{4} + 1 \right]} = \frac{144(3-b)(b+1)}{b(3-b)^2 [2b^2 + (3-b)^2 + 2]}$$

$$P \geq \frac{144(b+1)}{b(3-b)(3b^2 - 6b + 11)} = 144 \cdot f(b)$$

Xét hàm số $f(b) = \frac{b+1}{b(3-b)(3b^2 - 6b + 11)}$ trên $(0;3)$ hàm này khá phức tạp nếu đạo

hàm ngay, tuy nhiên có một phương pháp để tính đạo hàm hàm số này như sau

$$\ln f(b) = \ln(b+1) - \ln(b) - \ln(3-b) - \ln(3b^2 - 6b + 11)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(b)}{f(b)} = \frac{1}{b+1} - \frac{1}{b} + \frac{1}{3-b} - \frac{6b-6}{3b^2 - 6b + 11}$$

Sau khi giải ta có $f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = 1$. Do đó ta có $f(b) \geq f(1) = \frac{1}{8}; \forall b \in (0;3)$

Suy ra $P \geq 144 \cdot f(b) \geq \frac{144}{8} = 18$. Vậy $\min P = 18$ khi $a = b = c$

Bài 3: Cho $a, b, c > 0; ab + bc + ca = \frac{4}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{a^2 + \frac{1}{(b+1)^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{(c+1)^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{(a+1)^2}}$$

Lời giải

Nhận xét: Chúng tôi thấy rằng đẳng thức tại $a = b = c = \frac{1}{3}$. Ở bài tập như thế này

hoàn toàn ta có thể sử dụng phương pháp cân bằng hệ số của Cauchy-Schwarz.

Tuy nhiên chúng tôi thấy dạng của P là: $P = |\vec{x}| + |\vec{y}| + |\vec{z}|$

Như vậy ta chỉ cần áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $P = |\vec{x}| + |\vec{y}| + |\vec{z}| \geq |\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}|$

$$\text{Chọn } \vec{x} = \left(a; \frac{1}{b+1}\right); \vec{y} = \left(b; \frac{1}{c+1}\right); \vec{z} = \left(c; \frac{1}{a+1}\right).$$

$$\text{Khi đó } P \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right)^2}$$

Đại lượng ta có thể thấy ngay là $x = a + b + c \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)} = 2$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{9}{a+b+c+3}$$

$$P \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left(\frac{9}{a+b+c+3}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{81}{(x+3)^2}}$$

Công việc còn lại là xét hàm số $f(x) = x^2 + \frac{81}{(x+3)^2}$ trên $[2; +\infty)$

$$f'(x) = 2x - \frac{162}{(x+3)^3} = \frac{2x(x+3)^3 - 162}{(x+3)^3} > 0, \forall x \geq 2$$

Do đó ta có $P \geq \sqrt{f(x)} \geq \sqrt{f(2)} = \frac{\sqrt{181}}{5}$.

Vậy $\min P = \frac{\sqrt{181}}{5}$, xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$

Bài 4: Cho $a, b, c > 0; abc = 1$. Chứng minh rằng
 $(a+b+c)^2 + (|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3$

Lời giải

Nhận xét: Bước đầu tiên như một phản xạ thông thường, chúng tôi làm mất dấu giá trị tuyệt đối bằng cách giả sử: $a \geq b \geq c$

Khi đó bất đẳng thức tương đương với:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) + 4(a-c)^2 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - b^2 + 3c^2 + 2ab + 2bc - 6ac - 3 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối tự dung xuất hiện số 3 ở cuối làm “hỏng” tính cùng bậc của bất đẳng thức nên ta có thể thay $3 = 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}$ để được bậc hai. Khi đó bất đẳng thức tương đương: $f(a; b; c) = 3a^2 - b^2 + 3c^2 + 2ab + 2bc - 6ac - 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \geq 0$

Do tính cùng bậc rồi nên hiển nhiên a, b, c không còn bị ràng buộc bởi đẳng thức $abc = 1$ nữa mà chỉ có bất đẳng thức $a \geq b \geq c$. Vì bất đẳng thức cùng bậc nên ta có phép đổi biến

$$\begin{cases} x = \frac{a}{b} \geq 1 \\ 0 < y = \frac{c}{b} \leq 1 \end{cases}$$

Bất đẳng thức tương đương

$$f(a; b; c) \geq 0 \Leftrightarrow g(x; y) = 3x^2 - 1 + 3y^2 + 2x + 2y - 6xy - 3\sqrt[3]{x^2 y^2} \geq 0; x \geq 1 \geq y > 0$$

$$\text{Để thấy } g'_x(x; y) = 6x + 2 - 6y - 2 \cdot \frac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x}} = 6(x - y) + 2 \cdot \left(1 - \sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}\right) \geq 0; \forall x \geq 1 \geq y > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó ta có: } g(x; y) &\geq g(1; y) = 3 - 1 + 3y^2 + 2x + 2y - 6xy - 3\sqrt[3]{y^2} \\ &= 3y^2 + 4 - 4y - 3\sqrt[3]{y^2} \\ &= 3(y^2 - \sqrt[3]{y^2}) - 4(y - 1) = 3(t^6 - t^2) - 4(t^3 - 1), t = \sqrt[3]{y} \in (0; 1] \\ &= (t - 1)(3t^2(t + 1)(t^2 + 1) - 4(t^2 + t + 1)) \\ &= (t - 1)^2(3t^4 + 6t^3 + 9t^2 + 8t + 4) \geq 0; \forall t > 0 \end{aligned}$$

Vậy bài toán được giải quyết. Lời giải này mang tính chất giải quyết bài toán theo suy luận logic của toán học. Tuy nhiên, bài này có lời giải cực đẹp như sau:

Lời giải 2:

Giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó bất đẳng thức tương đương với

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) + 4(a-c)^2 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3$$

Tuy nhiên, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) + 4(a - c)^2 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3(ab + bc + ca)$$

Bởi vì $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$. Tuy nhiên bất đẳng thức cuối tương đương với $(a - b)(b - c) + 3(a - c)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do $a \geq b \geq c$. Vậy bài toán được giải quyết

Nhận xét: Lời giải thứ 2 đẹp mắt chỉ nên để dành cho những người thích tìm tòi và yêu toán. Đối với việc thi đại học, chúng ta cố gắng tìm ra những lời giải mang tính chất “bản chất” nhất để giải quyết bài toán.

Bài 5: Cho $a, b, c > 0; a \geq \sqrt{b^2 + c^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Lời giải

Nhận xét: Nếu không có điều kiện ràng buộc $a \geq \sqrt{b^2 + c^2}$ thì lời giải đơn giản là áp dụng bất đẳng thức AM – GM như sau:

$$P = a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\left(\frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{b}{\sqrt{ca}} + \frac{c}{\sqrt{ab}}\right) \geq 6$$

Nhưng đẳng thức xảy ra khi đó là $a = b = c$ không thỏa mãn $a \geq \sqrt{b^2 + c^2}$

Như vậy ta cần tìm một lời giải khác. Đặc biệt, do không bị ràng buộc bởi đẳng thức gì nên ta có một phương pháp quen thuộc trong một số bài tương tự như trên, đó là đạo hàm theo biến

$$P = a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{b+c}{a} + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) = f(a; b; c)$$

Do có giả thiết $a \geq \sqrt{b^2 + c^2}$ nên chúng tôi nghĩ đạo hàm theo biến a, do đó có cách phân tích trên.

$$f'_a(a; b; c) = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \frac{b+c}{a^2} = \frac{(a^2 - bc)(b+c)}{a^2bc}$$

Do $a \geq \sqrt{b^2 + c^2}$ nên $a^2 - bc \geq b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc > 0 \Rightarrow f'_a(a; b; c) > 0$

$$\Rightarrow P = f(a; b; c) \geq f(\sqrt{b^2 + c^2}; b; c) = \sqrt{b^2 + c^2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{b+c}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = g(b; c)$$

$g(b; c)$ là hàm đối xứng và cùng bậc giữa $b; c$ nên ta hoàn toàn có thể giả sử $bc = 1$

Khi đó ta đặt $b + c = t \Rightarrow t \geq 2\sqrt{bc} = 2; b^2 + c^2 = (b + c)^2 - 2bc = t^2 - 2$

$$g(b; c) = t\sqrt{t^2 - 2} + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 2}} + t^2 - 2$$

Đến đây ta có thể dùng bất đẳng thức Cauchy như sau:

$$g(b; c) = \left(\frac{t\sqrt{2}}{2} + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{t\sqrt{2}}{2} + t^2 - 2 \geq \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{2} + 2^2 - 2 = 2 + 3\sqrt{2}$$

Vậy $\min P = 2 + 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{b^2 + c^2} \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow (a; b; c) = (\sqrt{2}; t; t) \forall t > 0$

Bài 6: Cho $x, y, z \in (0; 1); xyz = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + z^2$

Lời giải

Nhận xét: Một phản xạ tự nhiên là tách tung ra

$$xyz = (1-x)(1-y)(1-z) \Leftrightarrow xy + yz + zx = 2xyz + x + y + z - 1$$

Ta có $P = x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx) = t^2 - 2t - 4xyz + 2$, với $t = x+y+z$

Mục tiêu là dồn về biến $t = x+y+z$. Thực ra dồn về biến nào cũng được. Miễn là sử dụng biến đổi càng nhiều càng tốt. Để đánh giá về biến t chắc chắn ta phải dùng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27} = \frac{t^3}{27}$$

Do đó ta thu được $P \geq -\frac{4t^3}{27} + t^2 - 2t + 2 = f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ trên $(0;3)$ ta thu được $\min f(t) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$

Vậy $\min P = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$

Bài 7: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $2x + 3y \leq 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2xy + y + \sqrt{5(x^2 + y^2)} - 24\sqrt[3]{8(x+y) - (x^2 + y^2 + 3)}$

Lời giải

Ta có $6(x+1)(y+1) = (2x+2)(3y+3) \leq \left(\frac{2x+2+3y+3}{2}\right)^2 \leq 36 \Rightarrow x+y+xy \leq 5$

$$5(x^2 + y^2) \geq (2x+y)^2 \Rightarrow \sqrt{5(x^2 + y^2)} \geq 2x+y$$

Và $(x+y-3)^2 = x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2(x+y+xy+3) \geq 8(x+y) - (x^2 + y^2 + 3)$$

Do đó: $P \geq 2(xy + x + y) - 24\sqrt[3]{2(x+y+xy+3)}$

Đặt $t = x+y+xy; t \in (0;5] \Rightarrow P \geq f(t) = 2t - 24\sqrt[3]{2t+6}$

Ta có $f'(t) = 2 - \frac{16}{\sqrt[3]{(2t+6)^2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt[3]{(2t+6)^2} - 8}{\sqrt[3]{(2t+6)^2}} < 0; \forall t \in (0;5]$

$\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0;5]$.

$\Rightarrow \min f(t) = f(5) = 10 - 48\sqrt[3]{2}$

Vậy $\min P = \min f(t) = 10 - 48\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 8: Cho các số thực x, y thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} + |y - 2|$$

Lời giải

$$P = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} + |y - 2|$$

Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, xét các điểm $M(x-1; -y), N(x+1; y)$.

Ta có $OM + ON \geq MN \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \geq \sqrt{4 + 4y^2}$

$\Rightarrow P \geq 2\sqrt{1 + y^2} + |y - 2| = f(y)$

Trường hợp 1: $y \leq 2$

$$f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + 2 - y \Rightarrow f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1$$

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y = \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 3y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Lập bảng biến thiên ta dễ dàng tìm được $\min f(y) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 + \sqrt{3}$

Trường hợp 1: $y \geq 2$

$$f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + y - 2 \geq 2\sqrt{5} > 2 + \sqrt{3}$$

Do đó: $P \geq 2 + \sqrt{3}; \forall x, y$

Vậy $\min P = 2 + \sqrt{3}$ khi $(x; y) = \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Bài 9: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+z}{x+2y+1} + \frac{z}{y+1} - \frac{4x^2}{(x+y)^2}$

Lời giải

Ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x \Leftrightarrow 2x + 2xy = z^2 + (x+y)^2 \geq 2z(x+y) \Rightarrow x + xy \geq xz + yz \quad (1)$$

Dấu bằng xảy ra khi $x + y = z$

Từ (1) và x, y, z dương suy ra $\frac{z}{y+1} \leq \frac{x}{y+1}; \frac{x+z}{x+2y+1} \leq \frac{x}{x+y}$

$$\Rightarrow P \leq \frac{2x}{x+y} - 4\left(\frac{x}{x+y}\right)^2$$

Đặt $t = \frac{x}{x+y} \Rightarrow 0 < t < 1$. Ta được $P \leq 2t - 4t^2$

Xét hàm số $f(t) = 2t - 4t^2$ với $t \in (0; 1)$

$$f'(t) = 2 - 8t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\max P = \max f(t) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=z \\ \frac{x}{x+y} = \frac{1}{4} \\ x^2+y^2+z^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{13} \\ y = \frac{1}{13} \\ z = \frac{4}{13} \end{cases}$

Bài 10: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}; abc = 1; a \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 - ab - 2bc - ca$$

Lời giải

Nhận xét: Chúng tôi thấy rằng hàm số này sẽ phải đưa được về biến a . Như vậy, những gì đối xứng giữa b, c ta gộp chúng lại và biến đổi tương đương:

$$P = \frac{a^2}{3} + (b+c)^2 - a(b+c) - 4bc$$

Nếu ta coi đây là hàm bậc hai với biến $b+c$ thì giá trị nhỏ nhất là tại $b+c=\frac{a}{2}$. Khi đó, muốn tồn tại b, c thì phương trình $X^2 - \frac{a}{2}X + \frac{1}{a} = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = \frac{a^2}{4} - \frac{4}{a} \geq 0 \Leftrightarrow a^3 \geq 16$ do $a > 0$.

Và do ta chỉ xét với $a \geq 3 \Rightarrow a^3 \geq 27$ nên chắc chắn là sẽ tồn tại b, c sao cho $b+c=\frac{a}{2}$.

Do đó, ta có đánh giá $P = \left(b+c - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{a} \geq \frac{a^3}{12} - \frac{4}{a} = f(a)$

Xét hàm số $f(a) = \frac{a^3}{12} - \frac{4}{a}$ trên $[3; +\infty)$ có: $f'(a) = \frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} > 0$

Do đó ta có $P \geq f(a) \geq f(3) = \frac{11}{12}$

Vậy $\min P = \frac{11}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} abc=1 \\ b+c=\frac{a}{2} \\ a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b+c=\frac{3}{2} \\ bc=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=\frac{9+\sqrt{33}}{12} \\ c=\frac{9-\sqrt{33}}{12} \end{cases}$

Lời giải

Nhận xét: Bài toán này có tính đối xứng giữa b, c nên nhiều khả năng đẳng thức xảy ra khi $b=c$. Ta chưa cần để ý điều đó vội. Hãy nhớ rằng việc dự đoán

Bài 11: Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}} + \frac{5bc}{(b+c)^2}$$

có thể sai. Chính vì thế mà chúng tôi hay nói “cần một chút mạo hiểm”. Dự đoán thế nào sẽ hình thành ra hướng nghĩ đó. Và dĩ nhiên có hướng nghĩ sai.

Đề bài cho $a, b, c > 0$. Như vậy tức là a, b, c không phụ thuộc vào nhau. Thế thì sao? Quá quen thuộc một hướng nghĩ tự nhiên là đạo hàm theo từng biến. Chọn biến nào để đạo hàm trước. Chắc chắn là a rồi vì b, c bình đẳng. Ta có:

$$\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc} = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 + a \cdot \frac{b+c}{bc} + \frac{1}{a} \cdot (b+c) + (b+c) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Đạo hàm hay dùng bất đẳng thức Cauchy ở đây đều đưa ra một kết quả là đạt giá trị nhỏ nhất khi: $a = \sqrt{bc}$

Như vậy, nếu tìm được b, c thì chọn được a . Do đó, ta hoàn toàn có thể đánh giá:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}} + \frac{5bc}{(b+c)^2} \geq \sqrt{1 + \frac{2(b+c)}{\sqrt{bc}} + (b+c) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} + \frac{5bc}{(b+c)^2} \\ &\Rightarrow P \geq \frac{b+c}{\sqrt{bc}} + \frac{5bc}{(b+c)^2} \end{aligned}$$

Đến đây ta có hai hướng là đặt $S = b+c; P = bc; S^2 \geq 4P$ hoặc đặt $t = \frac{b}{c}$. Hoàn toàn giải được theo những cách đặt đó. Tuy nhiên ta thấy ngay ẩn phụ ở đây là:

$$t = \frac{b+c}{\sqrt{bc}} \Rightarrow P = t + \frac{5}{t^2} = f(t); t \geq 2$$

Xét hàm số $f(t)$ trên $[2; +\infty)$ ta có: $f'(t) = 1 - \frac{10}{t^3} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{10}$

Lập bảng biến thiên ta được $P \geq f(t) \geq f(\sqrt[3]{10}) = \sqrt[3]{10} + \frac{5}{\sqrt[3]{100}}$

$$\text{Vậy } \min P = \sqrt[3]{10} + \frac{5}{\sqrt[3]{100}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b+c}{\sqrt{bc}} = \sqrt[3]{10} \\ a = \sqrt{bc} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a; b; c) = \left[2\left(\sqrt[3]{10} \pm \sqrt{\sqrt[3]{10} - 4}\right)t; \left(\sqrt[3]{10} \pm \sqrt{\sqrt[3]{10} - 4}\right)^2 t; 4t \right]; \forall t > 0$$

Bài 12: Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}}$$

Lời giải

Nhận xét: Với những bài toán kiểu này, chúng tôi sẽ đi theo lối đơn giản nhất là: đánh giá những “biểu thức giống nhau” để về dạng đơn giản trước rồi xét sau. Chúng tôi cố gắng đưa tổng ba phân số đầu chỉ còn về hai biến: $x = a^2 + b^2 + c^2$; $y = ab + bc + ca$. Ta làm như thế nào. Chắc chắn một điều là khi dùng gì cũng phải lưu ý đẳng thức có xảy ra không? Ngay cả khi ta chưa biết nó bằng mấy, ta chỉ cần biết là nó có tồn tại hay không.

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} = \frac{2a\sqrt{2}}{2\sqrt{2a(b+c)}} \geq \frac{2a\sqrt{2}}{2a+b+c}$$

Tương tự và cộng vế với vế ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2\sqrt{2} \left(\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \right) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân số

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} = \frac{a^2}{2a^2+ab+ac} + \frac{b^2}{ab+2b^2+bc} + \frac{c^2}{ac+bc+2c^2}$$

$$\frac{a^2}{2a^2+ab+ac} + \frac{b^2}{ab+2b^2+bc} + \frac{c^2}{ac+bc+2c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)}$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } P \geq 2\sqrt{2} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)} + \sqrt{\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}}$$

$$\text{Đặt ẩn phụ: } t = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}} \geq 1$$

$$\text{Suy ra } P \geq \sqrt{2} \left(\frac{t^2+2}{t^2+1} + t \right) = f(t)\sqrt{2}$$

Xét hàm $f(t)$ trên $[1; +\infty)$ nên ta có

$$f'(t) = -\frac{2t}{(t^2+1)^2} + 1 = \frac{(t^2+1)^2 - 2t}{(t^2+1)^2} \geq \frac{t^2+1-2t}{(t^2+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{(t^2+1)^2} \geq 0$$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$

Suy ra $P \geq f(t) \geq f(1) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c>0$

Bài 13: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn

$$9(a^4 + b^4 + c^4) - 16(a^2 + b^2 + c^2) + 21 = 0$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = \frac{a^3+1}{a} + \frac{b^3+1}{b} + \frac{c^3+1}{c} - \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Lời giải

Nhận xét: Bài toán này đã thấy rõ phương pháp giải là đưa về cùng một đại lượng là $t = a^2 + b^2 + c^2$ như sau:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có: $3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$

Ta lại có

$$9(a^4 + b^4 + c^4) - 16(a^2 + b^2 + c^2) + 21 = 0$$

$$\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 16(a^2 + b^2 + c^2) + 21 \leq 0$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2 - 3)[3(a^2 + b^2 + c^2) - 7] \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3} \leq t \leq 3$$

Ta có $P = (a^2 + b^2 + c^2) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức phụ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$

và bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \geq \frac{9}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}$

Từ đó ta có $P \geq (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{9}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} - \sqrt{a^2+b^2+c^2} = t + \frac{9}{\sqrt{3t}} - \sqrt{t}$

Hay $P \geq t + \frac{9}{\sqrt{3t}} - \sqrt{t} = f(t); t \in \left[\frac{7}{3}; 3\right]$

Xét hàm $f(t) = t + \frac{9}{\sqrt{3t}} - \sqrt{t}$ trên $\left[\frac{7}{3}; 3\right]$

$$f'(t) = 1 - \frac{9}{2t\sqrt{3t}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t \in \left[\frac{7}{3}; 3\right]$$

Do đó $P \geq f(t) \geq f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{7}{3} + \frac{9}{\sqrt{7}} - \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{7 - \sqrt{21}}{3} + \frac{9\sqrt{7}}{7}$

Vậy $\min P = \frac{7 - \sqrt{21}}{3} + \frac{9\sqrt{7}}{7} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{\sqrt{7}}{3}$

Bài 14: Cho $a, b, c \in [0; 2]$ và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a^3 + b^3 + c^3$$

Lời giải

Nhận xét: Bài toán này chú ý giả thiết là $a+b+c=3$ ta sẽ có $b+c=3-a$ và biểu thức có dạng $P=a^3+b^3+c^3$. Điều đó làm cho chúng tôi liên tưởng đến ngay việc đưa bài toán về tìm giá trị lớn nhất của hàm một biến, bởi vì đại lượng b^3+c^3 có liên quan mật thiết với $b+c$ bằng đẳng thức $b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)$. Mà $c \geq 0$ nên ta có $-3bc(b+c) \leq 0$. Do đó: $b^3+c^3 \leq (b+c)^3=(3-a)^3$

Như vậy: $P=a^3+b^3+c^3 \leq a^3+(3-a)^3=f(a)$

Vai trò của a, b, c như nhau nên ta giả sử $a=\max\{a, b, c\}$.

Khi đó ta có

$$\begin{cases} a+b+c=3 \leq a+a+a=3a \Leftrightarrow a \in [1;2] \\ a \in [0;2] \end{cases}$$

Xét hàm số $f(a)=a^3+(3-a)^3$ với $a \in [1;2]$

$$f'(a)=9(2a-3)=0 \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(a) \leq \max \left\{ f(1); f(2); f\left(\frac{3}{2}\right) \right\} = f(1) = f(2) = 9$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\max P=9$ đạt được khi $a=2; b=1; c=0$ hoặc các hoán vị của chúng.

Bài 15: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $(a+b+c)^2=2(a^2+b^2+c^2)>0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Lời giải

Nhận xét: Trước hết, ta thấy đề bài yêu cầu tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của P , điều khó khăn nhất là ta không thể dự đoán một cách chính xác đẳng thức xảy ra khi nào được. Quan sát một chút, ta nhận thấy rằng giả thiết và kết luận đều là các biểu thức đồng bậc. Vì thế, ta sẽ chuẩn hóa để việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của P được đơn giản hơn.

Từ giả thiết, ta có $(a+b+c)^2=4(ab+bc+ca)$

Khi đó P viết dưới dạng

$$P = \frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)} = \frac{4(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)^3} = 4 \left[\left(\frac{a}{a+b+c} \right)^3 + \left(\frac{b}{a+b+c} \right)^3 + \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^3 \right]$$
 Đến đây,

$$\text{đặt } \begin{cases} x = \frac{a}{a+b+c} \\ y = \frac{b}{a+b+c} \\ z = \frac{c}{a+b+c} \end{cases} \text{ thì ta có } x+y+z=1 \text{ và } xy+yz+zx=\frac{1}{4}$$

Công việc trở thành:

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x+y+z=1$ và $xy+yz+zx=\frac{1}{4}$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=4(x^3+y^3+z^3)$

Bây giờ, để ý rằng $x^3+y^3+z^3; x+y+z; xy+yz+zx$ có một mối liên hệ đó là:

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\ &= (x+y+z)[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)] \end{aligned}$$

Do đó, sử dụng giả thiết $x + y + z = 1$ và $xy + yz + zx = \frac{1}{4}$ ta có thể viết P dưới dạng

$$\begin{aligned} P &= 4(x^3 + y^3 + z^3) = 4(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) + 12xyz \\ &= 4(x + y + z)[(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx)] + 12xyz \\ &= 4 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} + 12xyz \\ &= 1 + 12xyz \end{aligned}$$

Với yêu cầu đề bài là tìm cả giá trị nhỏ nhất và lớn nhất, nên từ biểu thức rút gọn của P như thế này, ta không thể đánh giá tùy ý được, mà sẽ tìm cách đưa $P = 1 + 12xyz$ về một biến.

Thật vậy, từ $x + y + z = 1 \Leftrightarrow x + y = 1 - z$. Thay vào $xy + yz + zx = \frac{1}{4}$ ta rút ra

$$xy = \frac{1}{4} - z(x + y) = \frac{1}{4} - z(1 - z)$$

$$\text{Thay vào P ta được } P = 1 + 12 \left[\frac{1}{4} - z(1 - z) \right] z = 12z^3 - 12z^2 + 3z + 1 = f(z)$$

$$\text{Khảo sát hàm số này, ta dễ dàng suy ra } 1 = f\left(\frac{1}{2}\right) \leq P \leq f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{9}$$

$$\text{Ngoài ra, ta thấy khi } x = 0; y = z = \frac{1}{2} \text{ thì } P = 1 \text{ và khi } x = z = \frac{1}{6}; y = \frac{2}{3} \text{ thì } P = \frac{11}{9}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất là } \min P = 1 \text{ và giá trị lớn nhất là } \max P = \frac{11}{9}$$

Bài 16: Cho các số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số, ba số ta được:

$$\frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} = \frac{2}{a + \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \sqrt{2b} + \sqrt[3]{\frac{a}{4}} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{4c}} \geq \frac{2}{a + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + 2b \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{4} + b + c \right)} = \frac{3}{2(a+b+c)}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{3}{2(a+b+c)} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{\sqrt{a+b+c}} > 0 \text{ thì } P \geq f(t) \text{ với } f(t) = \frac{3t^2}{2} - 3t$$

$$\text{Ta có } f(t) = \frac{3}{2}(t - 1)^2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } t = 1 \Rightarrow P \geq -\frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của P là } \min P = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow (a; b; c) = \left(\frac{16}{21}; \frac{4}{21}; \frac{1}{21} \right)$$

Bài 17: Cho các số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{9}{7x + y + 4\sqrt{xy} + 18\sqrt[3]{xyz}} + \frac{1}{2}(x + y + z)^2 + 2$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 4\sqrt{xy} = 2\sqrt{x \cdot 4y} \leq x + 4y; \quad 18\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{x \cdot 4y \cdot 9z} \leq x + 4y + 9z$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 4, y = 9, z = 49$

Suy ra $P \geq \frac{1}{x+y+z} + \frac{1}{2}(x+y+z)^2 + 2$

Đặt $t = x + y + z; (t > 0)$, xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t} + 2$ với $t \in (0; +\infty)$

$$f'(t) = t - \frac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Lập bảng biến thiên tìm được $\min f(t) = f(1) = \frac{7}{2}$

$$\text{Vậy } \min P = \min f(t) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, y = 9, z = 49 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{36}{49} \\ y = \frac{9}{49} \\ z = \frac{4}{49} \end{cases}$$

Dạng 2: Phương pháp dồn biến trong bất đẳng thức lượng giác

• Các công thức cơ bản liên quan tới tam giác

Với A, B, C là ba góc của một tam giác, ta luôn có

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$$

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

• Bài toán về dồn biến trong bất đẳng thức lượng giác

Bài 1: Cho ΔABC . Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$\text{a/ } \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{b/ } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Nhận xét: Đây là hai bất đẳng thức khá quen thuộc và cũng có khá nhiều cách chứng minh. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu cách giải mang màu sắc của phương pháp dồn biến:

Không mất tính tổng quát, giả sử $A = \min(A, B, C) \Rightarrow A \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right]$

$$\text{Ta có } \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}$$

$$\text{Vì } 0 \leq \cos \frac{B-C}{2} \leq 1 \text{ nên } \sin B + \sin C \leq 2 \sin \frac{B+C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2}$$

Xét hàm số $f(A) = \sin A + 2 \cos \frac{A}{2}$; $A \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right]$. Ta có

$$f'(A) = \cos A - \sin \frac{A}{2} = 1 - 2 \left(\sin \frac{A}{2} \right)^2 - \sin \frac{A}{2} \geq 0; \forall A \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right]$$

Suy ra $f(A)$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{3}\right]$. Từ đó: $f(A) \leq f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Câu b làm hoàn toàn tương tự

Bài toán trên là ví dụ cơ bản nhất về phương pháp dồn biến trong bất đẳng thức lượng giác. Dưới đây là lớp các bài toán có tư tưởng hoàn toàn tương tự

Bài 2: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right)^2 \leq \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}$$

Lời giải

Bước đầu tiên chúng tôi nghĩ đến là biến đổi tương đương, dùng tất cả các công thức lượng giác ta biết để làm cho biểu thức đơn giản hơn.

$$\left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right)^2 \leq \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \leq \cos A + \cos B + \cos C$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \leq 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \left(1 - 2 \sin \frac{A}{2} \right) + 2 \sin \frac{A}{2} \left(\sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) - 1 \leq 0$$

Ở bước cuối với cách nhóm như vậy tư tưởng của chúng tôi là dồn biến về A.

Ta có bất đẳng thức:

$$2 \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq 2 \cdot \sin^2 \frac{B+C}{4} = 1 - \cos \frac{B+C}{2}$$

Như vậy muốn chứng minh bất đẳng thức là đúng ta cần phải có

$$1 - 2 \sin \frac{A}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < A \leq \frac{\pi}{3}. \text{ Muốn có được điều này ta phải giả sử}$$

$$A = \min(A; B; C) \Rightarrow 3A \leq A + B + C = \pi \Rightarrow 0 < A \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Ta lại có } \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq 2 \cdot \sin \frac{B+C}{4}$$

Do đó, nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau đúng thì bài toán hiển nhiên đúng

$$\left(1 - \cos \frac{B+C}{2} \right) \left(1 - 2 \sin \frac{A}{2} \right) + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{4} - 1 \leq 0$$

Giả sử tại đây ta chọn một biến là: $t = \sin \frac{B+C}{4}$

ta được:

$$\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{B+C}{4} = 1 - 2t^2; \quad \sin \frac{A}{2} \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Ta phải chứng minh: $f(t) \leq 0$

$$\text{Ta có } f(t) = (1 - 1 + 2t^2)(1 - 2 + 4t^2) + 4t(1 - 2t^2) - 1 = 8t^4 - 8t^3 - 2t^2 + 4t - 1$$

$$\text{Đạo hàm } f'(t) = 32t^3 - 24t^2 - 4t + 4$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 0 \Leftrightarrow 8t^3 - 6t^2 - t + 1 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(4t^2 - t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta thu được:

$$\max f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Rightarrow f(t) \leq 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos \frac{B-C}{2} = 1 \\ \sin \frac{B+C}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin \frac{B+C}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow B=C=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}$$

Lời giải

Công việc đầu tiên là chúng ta sẽ biến đổi các góc B, C theo góc A dựa vào công thức lượng giác.

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ không tù. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C}$

$$\text{Ta có: } M = \frac{\sin A + 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\cos A + 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{\sin A + 2 \cos \frac{A}{2} \cdot x}{\cos A + 2 \sin \frac{A}{2} \cdot x}$$

$$\text{Với } x = \cos \frac{B-C}{2} \text{ thì } \frac{B-C}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{\sin A + 2 \cos \frac{A}{2} \cdot x}{\cos A + 2 \sin \frac{A}{2} \cdot x}; x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right].$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2 \left(\cos \frac{A}{2} \cos A - \sin \frac{A}{2} \sin A \right)}{\left(\cos A + 2 \sin \frac{A}{2} \cdot x \right)^2}$$

Bây giờ ta sẽ chọn góc A sao cho $f'(x) \leq 0; \forall x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$, tức là

$$\cos \frac{A}{2} \cos A - \sin \frac{A}{2} \sin A \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \cos A - 2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \left[\cos A - 2 \left(\sin \frac{A}{2} \right)^2 \right] \leq 0$$

$$\cos \frac{A}{2} \left[1 - 4 \left(\sin \frac{A}{2} \right)^2 \right] \leq 0 \Leftrightarrow \left[1 - 4 \left(\sin \frac{A}{2} \right)^2 \right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq \frac{A}{2} \Leftrightarrow A \geq \frac{\pi}{3}$$

Như vậy nếu chọn $A = \max\{A, B, C\}$ thì ta sẽ có $\frac{\pi}{3} \leq A \leq \frac{\pi}{2}$

Từ đó suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$.

$$\text{Do đó: } M \geq f(x) \geq f(1) = \frac{\sin A + 2 \cos \frac{A}{2}}{\cos A + 2 \sin \frac{A}{2}}$$

$$\text{Bây giờ ta xét hàm số } g(A) = \frac{\sin A + 2 \cos \frac{A}{2}}{\cos A + 2 \sin \frac{A}{2}}; A \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Ta có } g'(A) = \frac{\sin \frac{A}{2} \cos A + \sin A \cos \frac{A}{2} - 1}{\left(\cos A + 2 \sin \frac{A}{2}\right)^2} = \frac{\sin \frac{3A}{2} - 1}{\left(\cos A + 2 \sin \frac{A}{2}\right)^2} \leq 0$$

Suy ra $g(A)$ nghịch biến trên $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$. Suy ra $g(A) \geq g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \sqrt{2}$

Nhận xét: Ta sẽ không thể đánh giá được ngay $\cos \frac{B+C}{2} \leq 1$ mà cần thông qua một bước xét nữa. Tiếp theo là các ví dụ để chúng ta thành thạo hơn đối với phương pháp này.

Bài 4: Cho ΔABC không tù và mỗi góc không nhỏ hơn $\frac{\pi}{4}$. Chứng minh rằng $\cot A + \cot B + \cot C + 3 \cot A \cot B \cot C \leq 4(2 - \sqrt{2})$

Lời giải

Nhận xét: Cũng với ý tưởng tương tự như bài 3 chúng tôi sẽ bắt đầu bằng việc biến đổi biểu thức về theo A chẳng hạn

Đặt $x = \cos(B - C)$, ta có:

$$\begin{aligned}
\cot A + \cot B + \cot C + 3 \cot A \cot B \cot C &= \cot A + \frac{\cos B \sin C + \sin B \cos C}{\sin B \sin C} + 3 \cot A \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C} \\
&= \cot A + \frac{2 \sin(B+C)}{\cos(B-C) - \cos(B+C)} + 3 \cot A \frac{\cos(B+C) + \cos(B-C)}{\cos(B-C) - \cos(B+C)} \\
&= \cot A + \frac{2 \sin A}{x + \cos A} + 3 \cot A \frac{x - \cos A}{x + \cos A}
\end{aligned}$$

Từ điều kiện bài toán ta có ΔABC không tù và mỗi góc không nhỏ hơn $\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq B - C \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos(B - C) \leq 1 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1 \right]$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \cot A + \frac{2 \sin A}{x + \cos A} + 3 \cot A \frac{x - \cos A}{x + \cos A}; x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1 \right].$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } f'(x) &= \frac{-2 \sin A}{(x + \cos A)^2} + \frac{6 \cot A \cos A}{(x + \cos A)^2} \\
&= \frac{2 \sin A}{(x + \cos A)^2} \left(\frac{3 \cos^2 A}{\sin^2 A} - 1 \right) \\
&= \frac{2 \sin A}{(x + \cos A)^2} (3 \cot^2 A - 1)
\end{aligned}$$

Đến đây ta sẽ chọn góc A sao cho $f'(x) \geq 0; \forall x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1 \right]$, tương đương

$$3 \cot^2 A - 1 \geq 0 \Rightarrow \cot A \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow A \leq \frac{\pi}{3}$$

Như vậy ta sẽ chọn $A = \min\{A, B, C\} \Rightarrow A \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right]$.

Ta có $f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1 \right]$.

$$\begin{aligned}
\text{Suy ra } f(x) \leq f(1) &= \cot A + \frac{2 \sin A}{1 + \cos A} + \frac{3 \cot A (1 - \cos A)}{1 + \cos A} \\
&= \frac{2 \sin A + 3 \frac{\cos A}{\sin A} - 3 \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}{1 + \cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{2 \sin^2 A - 2 \cos^2 A + 4 \cos A}{(1 + \cos A) \sin A} \\
&= \frac{-2 \cos 2A + 4 \cos A}{\sin A + \frac{1}{2} \sin 2A}
\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(A) = \frac{-2 \cos 2A + 4 \cos A}{\sin A + \frac{1}{2} \sin 2A}; A \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right]$. Ta có

$$g'(A) = \frac{2 \sin 2A \sin A - 2 \cos A \cos 2A - 2}{\left(\sin A + \frac{1}{2} \sin 2A \right)^2} = -2 \frac{\cos 3A + 1}{\left(\sin A + \frac{1}{2} \sin 2A \right)^2} \leq 0$$

Suy ra $g(A)$ nghịch biến trên $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right]$, suy ra $g(A) \leq g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4(2 - \sqrt{2})$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 5: Cho ΔABC chứng minh rằng

$$\left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right)^2 \leq \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}$$

Lời giải

Khai triển bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right)^2 &\leq \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} &\leq \cos A + \cos B + \cos C \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} &\leq 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \left(1 - 2 \sin \frac{A}{2} \right) + 2 \sin \frac{A}{2} \left(\sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) - 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

Vai trò của A, B, C như nhau nên giả sử

$$A = \min\{A, B, C\} \Rightarrow 0 < A \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$$

Ta có $2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq 1 - \cos \frac{B+C}{2}$ và $1 - 2 \sin \frac{A}{2} \geq 0$

Suy ra $2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \left(1 - 2 \sin \frac{A}{2} \right) \leq \left(1 - \cos \frac{B+C}{2} \right) \left(1 - 2 \sin \frac{A}{2} \right)$

Mặt khác $\sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq 2 \sin \frac{B+C}{4} \Rightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \left(\sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \leq 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{4}$

$$\Rightarrow VT \leq \left(1 - \cos \frac{B+C}{2} \right) \left(1 - 2 \cos \frac{B+C}{2} \right) + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{4} - 1$$

Đặt $t = \sin \frac{B+C}{4}$ ta có $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{B+C}{4} = 1 - 2t^2$

Vì $\sin \frac{A}{2} \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ nên $t \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Xét hàm số

$$f(t) = (1 - 1 + 2t^2)(1 - 2 + 4t^2) + 4t(1 - 2t^2) - 1 = 8t^4 - 8t^3 - 2t^2 + 4t - 1 \text{ với } t \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\Rightarrow f'(t) = 32t^3 - 24t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ t = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ t = \frac{1 - \sqrt{17}}{8} \notin \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } f(t) \leq \max \left\{ f\left(\frac{1}{2}\right); f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); f\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{8}\right) \right\} = 0$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos \frac{B+C}{2} = 1 \\ \sin \frac{B+C}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin \frac{B+C}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow B = C = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$

IV. Kết luận

Trên đây chỉ là một số bài toán ứng dụng phương pháp dồn biến để giải các bài toán về tìm cực trị của biểu thức nhiều biến mà ta thường gặp trong các kỳ thi, qua nghiên cứu trên cho chúng ta thấy tầm quan trọng phương pháp này.

Vì vậy việc chúng ta lựa chọn đề tài này để nghiên cứu là rất cần thiết, nó giúp chúng ta có thêm một cách tiếp cận nữa với các bài toán khó trong các kì thi.

Chúng tôi hy vọng rằng tài liệu này sẽ là một tài liệu hữu ích đối với các bạn yêu thích toán. Các tác giả rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô và các bạn đọc để tài liệu này được hoàn thiện hơn.

V. Tài liệu tham khảo

1. Phan Huy Khải, *Giá trị lớn nhất, Giá trị nhỏ nhất*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2013.
2. Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, NXB Tri Thức, 2006.
3. Tạp chí Toán học tuổi trẻ.
4. Diễn đàn toán học VMF – diendantoanhoc.net