



Chương

Bài 1.

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

A

Lý thuyết

1. Định nghĩa xác suất có điều kiện



Định nghĩa:

Cho hai biến cố A và B .

- » Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B .
- » Kí hiệu $P(A|B)$.

2. Công thức tính xác suất có điều kiện



Định nghĩa:

Cho hai biến cố A và B trong đó $P(B) > 0$ khi đó

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Chú ý

» Nếu $P(B) > 0$ thì $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

» Nếu A và B là hai biến cố bất kì thì:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

» Cho A và B là hai biến cố với $P(B) > 0$. Khi đó, ta có:
Trong đó $n(A \cap B)$ là số các trường hợp thuận lợi của $(A \cap B)$;
 $n(B)$ là số các trường hợp thuận lợi của B .

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

» Nếu A và B là hai biến cố bất kì, với $P(B) > 0$ thì: $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

» Cho A và B là hai biến cố với $0 < P(A) < 1$; $0 < P(B) < 1$.

Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi:

$$P(A) = P(A|B) = P(A|\bar{B}) \quad \text{và} \quad P(B) = P(B|A) = P(B|\bar{A})$$



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$$P(A|B) \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

1. Xác suất điều kiện:

2. Công thức nhân xác suất: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A|B)$

✓ **Chú ý 1:** Cho hai biến cố độc lập A và B , với $0 < P(A) < 1; 0 < P(B) < 1$.

» $P(A) = P(A|B) = P(A|\bar{B})$

» $P(B) = P(B|A) = P(B|\bar{A})$

✓ **Chú ý 2:**

» $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

» $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$

» $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$

» $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$

» Cách ghi $P(A \cap B)$ với $P(AB)$ hoàn toàn như nhau.

✓ **Chú ý 3:**

» Những bài toán xảy ra xác suất điều kiện thường đi kèm với việc sử dụng quy tắc nhân xác suất, khi gặp bài toán này ta



Các dạng bài tập

Dạng 1. Tính xác suất có điều kiện không sử dụng công thức.



Phương

Mô tả không gian mẫu

- » **Cách 1:** Liệt kê các phần tử của không gian mẫu và biến cố rồi đếm.
- » **Cách 2:** Sử dụng quy tắc đếm, hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để đếm số phần tử của không gian mẫu và biến cố.
- » Chú ý:

1. $\overline{abc}$ chia hết cho 2 (hay là số chẵn) thì chữ số $c \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.
2. $\overline{abc}$ chia hết cho 5 thì chữ số $c \in \{0; 5\}$.
3. $\overline{abc}$ chia hết cho 3 thì chữ số $a+b+c$ chia hết cho 3.
4. $\overline{abc}$ chia hết cho 9 thì chữ số $a+b+c$ chia hết cho 9.



Ví dụ 1.1.

Cho các chữ số $1; 2; 3; 4; 5; 6$. Lấy ngẫu nhiên ba chữ số và sắp xếp theo một thứ tự. Xét biến cố A : “Ba số lập thành một số chia hết cho 2”. Kết quả thuận lợi của biến cố A bằng?

Lời giải

Gọi số cần lập có dạng $n = \overline{abc}$.

Số n chia hết cho 2 nên c có 3 cách chọn.

Tương ứng với mỗi cách chọn chữ số cho c , sẽ có 5 cách chọn cho a .

Tương ứng với mỗi cách chọn chữ số cho $c; a$, sẽ có 4 cách chọn cho b .

Theo quy tắc nhân, có $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ số.

Vậy kết quả thuận lợi cho biến cố A bằng 60.



Ví dụ 1.2.

Một nhóm các nhà khoa học gồm 4 nhà toán học nam; 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý học nam. Lấy ngẫu nhiên ba người. Xác suất trong ba người có cả nam và nữ, cả toán và lý bằng?

Lời giải

Không gian mẫu $n(W) = C_{11}^3$.

Gọi biến cố A : “ba người có cả nam và nữ, cả toán và lý”.

Ta có các trường hợp sau cho biến cố A



✓ **Trường hợp 1:** 1 nữ toán học; 1 nam toán học và 1 nam vật lí
 $\Rightarrow C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = 48$

✓ **Trường hợp 2:** 1 nữ toán học; 0 nam toán học và 2 nam vật lí
 $\Rightarrow C_3^1 \cdot C_4^0 \cdot C_4^2 = 18$

✓ **Trường hợp 3:** 2 nữ toán học; 0 nam toán học và 1 nam vật lí
 $\Rightarrow C_3^2 \cdot C_4^0 \cdot C_4^1 = 12$

Theo qui tắc cộng thì $n(A) = 48 + 18 + 12 = 78$ cách.

Vậy xác suất của biến cố A bằng
$$p(A) = \frac{n(A)}{n(W)} = \frac{78}{165}$$

▮ **Dạng 2. Tính xác suất có điều kiện sử dụng công thức.**



Phương

Cho hai biến cố A và B .

Xác suất của biến cố A , tính trong điều kiện biết rằng biến cố B đã xảy ra, được gọi là xác suất của biến A với điều kiện B và kí hiệu là $P(A|B)$.

Cho hai biến cố A và B bất kỳ với $P(B) > 0$ khi đó
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



Ví dụ 2.1.

Một hộp chứa 8 bi trắng, 2 bi đỏ. Lần lượt bốc từng bi. Giả sử lần đầu tiên bốc được bi trắng. Xác định xác suất lần thứ 2 bốc được bi đỏ.

Lời giải

Gọi A : “lần 1 bốc được bi trắng”
 và B : “lần 2 bốc được bi đỏ”

Xác suất lần 2 bốc được bi đỏ khi lần 1 đã bốc được bi trắng là $P(B|A)$

ta có: $P(A) = \frac{8.9}{10.9} = \frac{4}{5}$; $P(A \cap B) = \frac{8.2}{10.9} = \frac{8}{45}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{45}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{9}$$

Do đó:



Ví dụ 2.2.

Một bình đựng 5 viên bi kích thước và chất liệu giống nhau, chỉ khác nhau về màu sắc. Trong đó có 3 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ bình ra một viên bi ta được viên bi màu xanh, rồi lại lấy ngẫu nhiên ra một viên bi nữa. Tính xác suất để lấy được viên bi đỏ ở lần thứ hai.



Lời giải

Gọi A: “lấy viên bi thứ nhất là màu xanh”
và B: “lấy viên bi thứ hai là màu đỏ”,

Ta đi tính $P(B|A)$

ta có: $P(A) = \frac{3.4}{5.4} = \frac{3}{5}$; $P(A \cap B) = \frac{3.2}{5.4} = \frac{3}{10}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$

Do đó:



Ví dụ 2.3.

Một hộp có 30 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lần thứ nhất lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó, lần thứ 2 lấy ngẫu nhiên thêm một viên bi trong hộp đó.

Gọi A là biến cố: “Lần thứ hai lấy được viên bi trắng”;

và B là biến cố: “Lần thứ nhất lấy được viên bi đen”.

Tính $P(A|B)$.

Lời giải

$$n(W) = 40.39$$

Lần thứ nhất có 10 cách chọn một viên bi đen,

Lần thứ hai có 39 cách chọn từ 39 viên bi còn lại.

$$\text{Do đó } n(B) = 10.39 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(W)} = \frac{1}{4}$$

Lần thứ nhất có 10 cách chọn một viên bi đen,

Lần thứ hai có 30 cách chọn bi trắng từ 30 viên bi trắng.

$$\text{Do đó } n(AB) = 10.30 \Rightarrow P(AB) = \frac{n(AB)}{n(W)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{10.30}{10.39} = \frac{30}{39} = \frac{10}{13}$$

Vậy



Ví dụ 2.4.

Trong cơ quan có 100 người. Trong đó có 60 người gần cơ quan (trong đó có 40 người là nam), có tổng cộng 30 nữ nhân viên. Theo quy định của cơ quan thì người nào hoặc là nam hoặc gần cơ quan sẽ phải tham gia trực. Tính xác suất để chọn ngẫu nhiên một người trong danh sách mà người đó lại là nữ trực cơ quan?

Lời giải

Gọi A: “Người được chọn là nam”.

và B: “Người được chọn là người phải trực”.



$$\Rightarrow n(\bar{A})=30 \Rightarrow P(\bar{A})=\frac{n(\bar{A})}{n(W)}=\frac{3}{10}.$$

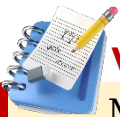
Ta có: $\bar{A}$: “Người được chọn là nữ”

$$\Rightarrow n(B\bar{A})=20 \Rightarrow P(B\bar{A})=\frac{n(B\bar{A})}{n(W)}=\frac{2}{10}.$$

$B\bar{A}$: “Người được chọn là nữ gần cơ quan”

Xác suất người được chọn là nữ và là người trực cơ quan là:

$$P(B|\bar{A})=\frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{3}.$$



Ví dụ 2.5.

Một gia đình có 2 đứa trẻ. Biết rằng có ít nhất 1 đứa trẻ là con gái. Hỏi xác suất 2 đứa trẻ đều là con gái là bao nhiêu? Cho biết xác suất để một đứa trẻ là trai hoặc gái là bằng nhau.

🔗 Lời giải

Giới tính cả 2 đứa trẻ là ngẫu nhiên và không liên quan đến nhau.

Do gia đình có 2 đứa trẻ nên sẽ có thể xảy ra 4 khả năng:

(trai, trai), (gái, gái), (gái, trai), (trai, gái).

Gọi A: “Cả hai đứa trẻ đều là con gái”

và B: “Có ít nhất một đứa trẻ là con gái”

$$P(A)=\frac{1}{4}; P(B)=\frac{3}{4}$$

Ta có

Do nếu xảy ra A thì đương nhiên sẽ xảy ra B nên ta có:

$$P(A \cap B)=P(A)=\frac{1}{4}$$

Suy ra, xác suất để cả hai đứa trẻ đều là con gái khi biết ít nhất có một đứa trẻ là gái là

$$P(A|B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$



Ví dụ 2.6.

Ba khẩu súng độc lập bắn vào một mục tiêu. Xác suất để khẩu thứ nhất bắn trúng bằng 0,7, để khẩu thứ hai bắn trúng bằng 0,8, để khẩu thứ ba bắn trúng bằng 0,5. Mỗi khẩu bắn 1 viên. Tính xác suất để khẩu thứ nhất bắn trúng biết rằng chỉ có 2 viên trúng mục tiêu.

🔗 Lời giải

Gọi A_i là biến cố khẩu thứ nhất bắn trúng ($i=1,2,3$)

Gọi B là biến cố có đúng hai khẩu bắn trúng.

$$P(B)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)$$

Ta có:



$$\begin{aligned} &= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) \\ &= 0,7.0,8.0,5 + 0,7.0,2.0,5 + 0,3.0,8.0,5 = 0,47 \end{aligned}$$

Xác suất để khẩu thứ nhất bắn trúng khi chỉ có 2 viên trúng mục tiêu:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1A_2\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}A_3)}{P(B)} = \frac{0,35}{0,47} = \frac{35}{47}$$



▮ Dạng 3. Tính xác suất có điều kiện sử dụng sơ đồ hình cây.

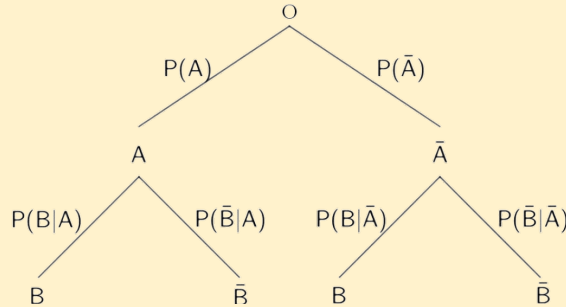


Phương pháp

Xây dựng sơ đồ cây theo mẫu (hình bên dưới) và xác định xác suất trên mỗi nhánh.

Tính $P(A \cap B)$ bằng xác suất của lộ trình $(O - A - B)$

Tính $P(B)$ bằng tổng xác suất của 2 lộ trình dẫn đến B là $(O - A - B)$ và $(O - \bar{A} - B)$.



Ví dụ 3.1.

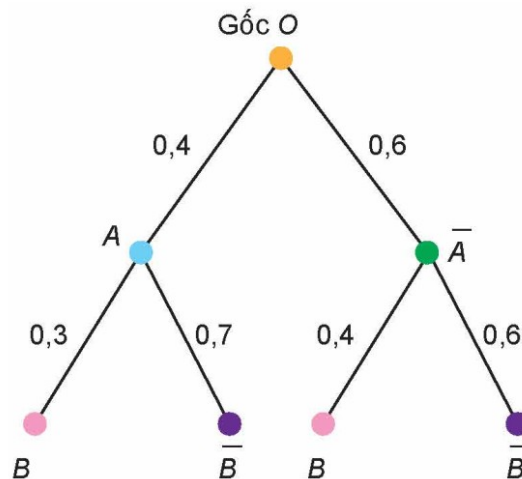
Ông An hằng ngày đi làm bằng xe máy hoặc xe buýt. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe buýt thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe máy là 0,4. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe máy thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe buýt là 0,7. Xét một tuần mà thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt. Tính xác suất để thứ Tư trong tuần đó, ông An đi làm bằng xe máy

➤ Lời giải

Kí hiệu A là biến cố: "Thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy";

Và B là biến cố: "Thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy".

Ta vẽ sơ đồ hình cây như sau:



Trên nhánh cây OA và $O\bar{A}$ tương ứng ghi $P(A)$ và $P(\bar{A})$;

Trên nhánh cây AB và $A\bar{B}$ tương ứng ghi $P(B|A)$ và $P(\bar{B}|A)$;

Trên nhánh cây $\bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$ tương ứng ghi $P(B|\bar{A})$ và $P(\bar{B}|\bar{A})$.

Có hai nhánh cây đi tới B là OAB và $O\bar{A}B$.



Vậy: $P(B) = 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,36$



Ví dụ 3.2.

Tại một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử tỉ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường, các linh kiện điện tử đều phải qua khâu kiểm tra chất lượng để đóng dấu OTK. Vì sự kiểm tra không tuyệt đối hoàn hảo nên

» Nếu một linh kiện điện tử đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,99 được đóng dấu OTK;

» Nếu một linh kiện điện tử không đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,95 không được đóng dấu OTK.

Chọn ngẫu nhiên một linh kiện điện tử của nhà máy này trên thị trường. Dùng sơ đồ hình cây, hãy mô tả cách tính xác suất để linh kiện điện tử được chọn

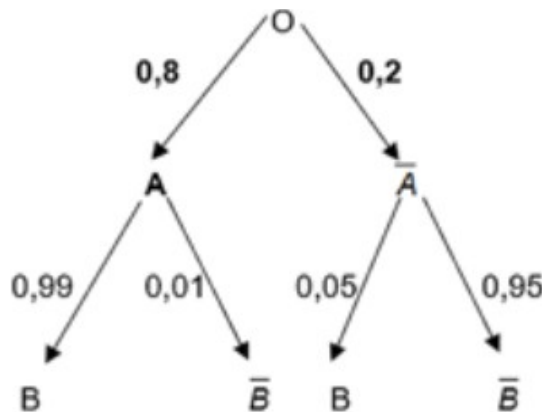
Lời giải

Với A là biến cố: “Linh kiện điện tử được chọn đạt tiêu chuẩn”;

Và $\bar{A}$ là biến cố: “Linh kiện điện tử được chọn không đạt tiêu chuẩn”.

Khi đó, B là biến cố: “Linh kiện điện tử được chọn được đóng dấu OTK”.

Ta vẽ sơ đồ hình cây như sau:



Có hai nhánh cây đi tới $\bar{B}$ là OAB và $O\bar{A}\bar{B}$.

Vậy: $P(\bar{B}) = 0,8 \cdot 0,01 + 0,2 \cdot 0,95 = 0,198$