ĐS8-Chuyên đề 3: SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Qua Các Đề Thi HSG Môn Toán Lớp 8

A.Bài toán

Câu 1: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số $\overline{abcd}$, biết rằng nó là một số chính phương, số $\overline{abcd}$ chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố.

Câu 2: Cho a là một số gồm $2n$ chữ số 1, b là một số gồm $n+1$ chữ số 1, c là một số gồm n chữ số 1 $(n\in N*)$. Cmr: $a+b+6c+8$ là một số chính phương .

Câu 3: Tìm số nguyên dương n để $n+1$ và $4n+29$ là số chính phương

Câu 4: Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

Câu 5: a) Tìm số có hai chữ sô mà bình phương của nó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

b)Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng nếu cộng ba tích, mỗi tích của hai trong ba số đó thì được 26.

c) Tìm bốn số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tích của chúng bằng 120

Câu 6: Cho các số a,b,c,d nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn:

$\frac{2a+b}{a+b}+\frac{2b+c}{b+c}+\frac{2c+d}{c+d}+\frac{2d+a}{d+a}=6.$ Chứng minh $A=abcd$ là số chính phương.

Câu 7: Cho $a_n=1+2+3+....+n.$ Chứng minh rằng a_n+a_{n+1} là một số chính phương

Câu 8: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x,y thì:

$A=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$ là số chính phương

Câu 9: Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ

Câu 10: Tìm số tự nhiên n để: $D=n^5-n+2$ là số chính phương.

Câu 11: Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

Câu 12: Chứng minh rằng tổng hai số chính phương liên tiếp cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Câu 13: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho: $n^4+2n^3+2n^2+n+7$ là số chính phương.

Câu 14:

Chứng minh: số có dạng $n^6-n^4+2n^3+2n^2$ với $n\in N$ và $n>1$ không phải là số chính phương.

Câu 15:

Tìm các số nguyên n để $B=n^2-n+13$ là số chính phương?

Câu 16:

Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

Câu 17:

Cho $a_n = 1+2+3+...+n.$ Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương

Câu 18: Cho $A = p^4$ trong đó p là số nguyên tố. Tìm các giá trị của p để tổng các ước dương của A là số chính phương.

Câu 19: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Câu 20: Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + k(k+1)(k+2)$ (với $k \in \mathbb{N}$*)

Chứng minh rằng $4S+1$ là bình phương của một số tự nhiên

Câu 21: Tìm số tự nhiên n sao cho số $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương.

Câu 22: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Câu 23: Cho n là tổng của hai số chính phương. Chứng minh rằng n^2 cũng là tổng của hai số chính phương

Câu 24: Cho các số a, b, c, d nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn:

$\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6.$ Chứng minh $A = abcd$ là số chính phương.

Câu 25: Cho $a_n = 1+2+3+....+n.$ Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương.

Câu 26: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì:

$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$ là số chính phương.

Câu 27: Cho $a_n = 1+2+3+...+n.$ Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương.

Câu 28: Cho a, b, c là các số hữu tỷ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ac = 1.$ Chứng minh rằng biểu thức $Q = (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Câu 29: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x thì biểu thức P một số chính phương. $P = (x+5)(x+7)(x+9)(x+11) + 16.$

Câu 30: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương

Câu 31: Cho a và b là các số tự nhiên thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$

Chứng minh rằng: $a - b$ và $3a + 3b + 1$ là các số chính phương.

Câu 32: Cho $A = p^4$ trong đó p là số nguyên tố. Tìm các giá trị của p để tổng các ước dương của A là số chính phương.

Câu 33: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Câu 34: Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + k(k+1)(k+2)$ $với\ k \in N^{¿}$

Chứng minh rằng $4S+1$ là bình phương của một số tự nhiên

Câu 35: Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Câu 36: Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị thì ta vẫn được một số chính phương.

Câu 37: Tìm số tự nhiên n sao cho số $A=n^2+n+6$ là số chính phương.

B.Lời giải

Câu 1: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số $\overline{abcd}$, biết rằng nó là một số chính phương, số $\overline{abcd}$ chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố.

Lời giải:

Vì $\overline{abcd}$ là số chính phương và d là một số nguyên tố có 1 chữ số nên $d=5$.

Đặt $\overline{abc5}=m^2, m\in N^*$. Khi đó m có chữ số tận cùng là 5 (1)

Mặt khác, $1000\le m^2\le 9999$ suy ra $32\le m\le 99$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $m\in\{35;45;55;65;75;85;95\}$

Suy ra $m^2\in\{1225;2025;3025;4225;5625;7225;9025\}$

Ta lại có: $m^2=\overline{abc5}\,\vdots\,9$.

Do đó, chọn $\overline{abcd}\in\{2025;5625\}$.

Câu 2: Cho a là một số gồm $2n$ chữ số 1, b là một số gồm $n+1$ chữ số 1, c là một số gồm n chữ số 1 $(n\in N*)$. Cmr: $a+b+6c+8$ là một số chính phương .

Lời giải:

Ta có : $a+b+6c+8=\dfrac{10^{2n}-1}{9}+\dfrac{10^{n+1}-1}{9}+6.\dfrac{10^n-1}{9}+8$

$$=\frac{10^{2n}-1+10.10^n-1+6.10^n-6+72}{9}$$

$$=\frac{10^{2n}+16.10^n+64}{9}=\left(\frac{10^n+8}{3}\right)^2=\underbrace{33...3}_{n-1 so 3}6^2$$

Vậy, $a+b+6c+8$ là một số chính phương

Câu 3: Tìm số nguyên dương n để $n+1$ và $4n+29$ là số chính phương

Lời giải:

Đặt $n+1=a^2, 4n+29=b^2\ (a,b\in N)$

Ta có: $b^2-4a^2=25\Leftrightarrow(b-2a)(b+2a)=25$

Mà $b+2a>0$ nên $b-2a>0$ và $b+2a>b-2a>0$ nên suy ra $b-2a=1$ và $b+2a=25$

Do đó, $a=6$. Vậy, $n=35$.

Câu 4: Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

Lời giải:

a) Để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

$\Leftrightarrow n+18=p^2$ và $n-41=q^2\left(p,q\in \mathbb{N}\right)$

$\Rightarrow p^2-q^2=(n+18)-(n-41)=59\Leftrightarrow (p-q)(p+q)=59$

Nhưng 59 là số nguyên tố, nên: $\begin{cases} p-q=1 \\ p+q=59 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} p=30 \\ q=29 \end{cases}$

Từ $n+18=p^2=30^2=900\Rightarrow n=882$

Thay vào $n-41$, ta được $882-41=841=29^2=q^2$

Vậy với $n=882$ thì $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

Câu 5: a) Tìm số có hai chữ sô mà bình phương của nó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

b)Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng nếu cộng ba tích, mỗi tích của hai trong ba số đó thì được 26.

c) Tìm bốn số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tích của chúng bằng 120

Lời giải:

a) Số cần tìm có dạng $\overline{ab}$, với $a,b\in N;1\le a\le 9;0\le b\le 9$

Theo đề bài ta có: $\overline{ab}^2=(a+b)^3\Leftrightarrow (10a+b)^2=(a+b)^3\,(1)$

Hệ thức (1) chứng tỏ $\overline{ab}$ phải là một số lập phương và $(a+b)$ phải là một số chính phương.

Do $10\le \overline{ab}\le 99\Rightarrow \overline{ab}=27$ hoặc $\overline{ab}=64$

+Nếu $\overline{ab}=27\Leftrightarrow a+b=9=3^2$ (chính phương)

+Nếu $\overline{ab}=64\Leftrightarrow a+b=10$ (không chính phương nên loại)

Vậy, số cần tìm là $\overline{ab}=27$.

b) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $(x-1),\ x,\ (x+1)$ (ĐK : $x\ge 1, x\in N$)

Ta có : $(x-1)x+x(x+1)+(x-1)(x+1)=26\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 3x^2-1=26\Leftrightarrow x=3$ (Vì $x\ge 1, x\in N$)

Vậy, ba số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 2, 3, 4.

c) Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là $(x-1),\ x,\ (x+1),\ (x+2)$ (ĐK : $x \geq 2, x \in Z$)

Ta có : $(x-1)x(x+1)(x+2)=120 \Leftrightarrow \left[x(x+1)\right]\left[(x-1)(x+2)\right]=120$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x\right)\left[\left(x^2+x\right)-2\right]=120 \Leftrightarrow \left(x^2+x\right)-2\left(x^2+x\right)+1=121$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x-1\right)^2=11^2$$

Vì $x \geq 2, x \in Z$ nên $x^2+x-1=11$ $(x-3)(x+4)=0 \Rightarrow x=3$ (Vì $x+4>0$)

Vậy, bốn số nguyên dương liên tiếp phải tìm là 2, 3, 4, 5

Câu 6: Cho các số a, b, c, d nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn: $\frac{2a+b}{a+b}+\frac{2b+c}{b+c}+\frac{2c+d}{c+d}+\frac{2d+a}{d+a}=6.$ Chứng minh $A=abcd$ là số chính phương.

Lời giải:

$$\frac{2a+b}{a+b}+\frac{2b+c}{b+c}+\frac{2c+d}{c+d}+\frac{2d+a}{d+a}=6$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{a}{a+b}+1+\frac{b}{b+c}+1+\frac{c}{c+d}+1+\frac{d}{d+a}=6$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}=2$$
$$\Leftrightarrow 1-\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b+c}+1-\frac{c}{c+d}-\frac{d}{d+a}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{b}{a+b}-\frac{b}{b+c}+\frac{d}{c+d}-\frac{d}{d+a}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)}+\frac{d(a-c)}{(c+d)(d+a)}=0$$
$$\Leftrightarrow b(c+d)(d+a)-d(a+b)(b+c)=0$$
$$\Leftrightarrow abc-acd+bd^2-b^2d=0$$
$$\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd)=0$$
$$\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd)=0$$
$$\Leftrightarrow ac-bd=0 \Leftrightarrow ac=bd$$

Vậy $A=abcd=(ac)^2$ là số chính phương

Câu 7: Cho $a_n=1+2+3+....+n.$ Chứng minh rằng a_n+a_{n+1} là một số chính phương.

Lời giải:

Ta có:

$a_{n+1} = 1 + 2 + 3 + ... + n + n + 1$

$a_n + a_{n+1} = 2(1 + 2 + 3 + ... + n) + n + 1$

$= 2.\dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ là một số chính phương.

Câu 8: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì:

$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$ là số chính phương

Lời giải:

Ta có: $A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$

$= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$

Đặt $x^2 + 5xy + 5y^2 = t \, (t \in \mathbb{Z})$ thì

$A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 - y^4 + y^4 = t^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 \in \mathbb{Z}, 5xy \in \mathbb{Z}, 5y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 + 5xy + 5y^2 \in \mathbb{Z} (dfcm)$

Vậy A là số chính phương

Câu 9: Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ

Lời giải

Gọi hai số lần lượt là a^2 và $(a+1)^2$

Theo đề bài ra ta có:

$a^2 + (a+1)^2 + a^2(a+1)^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$

$= (a^4 + 2a^3 + a^2) + 2(a^2 + a) + 1 = (a^2 + a)^2 + 2(a^2 + a) + 1$

$= (a^2 + a + 1)^2$ là một số chính phương lẻ vì $a^2 + a = a(a+1)$ là số chẵn

$\Rightarrow a^2 + a + 1$ là số lẻ

Câu 10: Tìm số tự nhiên n để: $D = n^5 - n + 2$ là số chính phương.

Lời giải

$D=n^5-n+2=n\left(n^4-1\right)+2=n(n+1)(n-1)\left(n^2+1\right)+2$

$=n(n-1)(n+1)\left[\left(n^2-4\right)+5\right]+2$

$=n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+5n(n-1)(n+1)+2$

Mà $n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)\vdots 5$ (tích 5 số tự nhiên liên tiếp)

Và $5n(n-1)(n+1)\vdots 5$. Vậy D chia 5 dư 2

Do đó D có tận cùng là 2 hoặc 7 nên D không phải là số chính phương.

Vậy không có giá trị nào của n để D là số chính phương

Câu 11: Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

Lời giải

Gọi $\overline{abcd}$ là số phải tìm , $a,b,c,d\in\mathbb{N},0\le a,b,c,d\le 9;a\ne 0$

Ta có: $\begin{cases}\overline{abcd}=k^2\\ \overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)}=m^2\end{cases}\left(k,m\in\mathbb{N};31<k<m<100\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{abcd}=k^2\\ \overline{abcd}+1353=m^2\end{cases}$

Do đó: $m^2-k^2=1353$

$\Rightarrow(m+k)(m-k)=123.11=41.33\,(k+m<200)$

$\Rightarrow\begin{cases}m+k=123\\ m-k=11\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m+k=41\\ m-k=33\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m=67 \\ k=56 \end{cases} \\ \begin{cases} m=37 \\ k=4 \end{cases}\end{array}\right.$$

Kết luận đúng: $\overline{abcd}=3136$

Câu 12: Chứng minh rằng tổng hai số chính phương liên tiếp cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Lời giải

Gọi hai số chính phương liên tiếp đó là k^2 và $(k+1)^2$.

Ta có: $k^2 + (k+1)^2 + k^2.(k+1)^2 = k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1 = (k^2 + k + 1)^2 = [k(k+1)+1]^2$ là số chính phương. (1)

Vì k(k + 1) là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên k(k + 1) chẵn $\Rightarrow$ k(k + 1) +1 lẻ $\Rightarrow$ $[k(k+1)+1]^2$ lẻ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Câu 13: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho: $n^4+2n^3+2n^2+n+7$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $n^4+2n^3+2n^2+n+7=y^2 \quad (y\in\mathbb{N})$

Ta có: $y^2=(n^2+n)^2+n^2+n+7$

$\Rightarrow y^2>(n^2+n)^2$

$\Rightarrow y>|n^2+n|$

$\Rightarrow y\ge|n^2+n|+1 \quad (Vi \quad y\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow y^2\ge|n^2+n+1|$

$\Rightarrow y^2\ge(n^2+n+1)^2$

Thay $y^2=(n^2+n)^2+n^2+n+7$

$\Rightarrow n^2+n-6<0$

$\Leftrightarrow (n-2)(n+3)\le0$

$\Leftrightarrow -3\le n\le2$

Thử trực tiếp $n=2; n=-3$ thỏa mãn

Vậy số nguyên n cần tìm là $n\in\{2;-3\}$

Câu 14:

Chứng minh: số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ với $n \in N$ và $n > 1$ không phải là số chính phương.

Lời giải

) Chứng minh: số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ với $n \in N$ và $n > 1$ không phải là số chính phương.

Ta có $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2\left(n^4 - n^2 + 2n + 2\right) = n^2\left[n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)\right]$

$= n^2\left[(n+1)\left(n^3 - n^2 + 2\right)\right] = n^2(n+1)\left[\left(n^3+1\right) - \left(n^2 - 1\right)\right]$

$= n^2(n+1)^2\left(n^2 - 2n + 2\right)$

Với $n \in N$ và $n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$ và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$

Suy ra $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$ với $n \in N$ và $n > 1$ do đó $n^2 - 2n + 2$ không phải là số chính phương.

Vậy, số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ với $n \in N$ và $n > 1$ không phải là số chính phương

Câu 15:

Tìm các số nguyên n để $B = n^2 - n + 13$ là số chính phương?

Lời giải

Ta có B là số chính phương thì $4B$ cũng là số chính phương.

Đặt $4B = k^2,\ k \in N$

Khi đó, $4B = 4n^2 - 4n + 52 = k^2 \Leftrightarrow (2n - 1 + k)(2n - 1 - k) = -51$

Vì $(2n - 1 + k) > (2n - 1 - k)$ nên ta có 4 trường hợp:

$\begin{cases} 2n - 1 + k = 1 \\ 2n - 1 - k = -51 \end{cases}$, $\begin{cases} 2n - 1 + k = 3 \\ 2n - 1 - k = -17 \end{cases}$, $\begin{cases} 2n - 1 + k = 51 \\ 2n - 1 - k = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} 2n - 1 + k = 17 \\ 2n - 1 - k = -3 \end{cases}$

Giải ra ta lần lượt được: $n = -12, n = -3, n = 13, n = 4$

Vậy, khi $n = -12$ hoặc $n = -3$ hoặc $n = 13$ hoặc $n = 4$ thì $B = n^2 - n + 13$ là số chính phương.

Câu 16:

Tìm số tự nhiên n để $n + 18$ và $n - 41$ là hai số chính phương

Lời giải

Để $n + 18$ và $n - 41$ là hai số chính phương

$\Leftrightarrow n + 18 = p^2$ và $n - 41 = q^2\ (p, q \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow p^2 - q^2 = (n+18) - (n-41) = 59 \Leftrightarrow (p-q)(p+q) = 59$

Nhưng 59 là số nguyên tố, nên: $\begin{cases} p - q = 1 \\ p + q = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 30 \\ q = 29 \end{cases}$

Từ $n + 18 = p^2 = 30^2 = 900 \Rightarrow n = 882$

Thay vào $n - 41,$ ta được $882 - 41 = 841 = 29^2 = q^2$

Vậy với $n = 882$ thì $n + 18$ và $n - 41$ là hai số chính phương

Câu 17:

Cho $a_n = 1 + 2 + 3 + ... + n.$ Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương

Lời giải

Ta có: $a_{n+1} = 1 + 2 + 3 + ... + n + n + 1$

$a_n + a_{n+1} = 2(1 + 2 + 3 + ... + n) + n + 1 = 2.\dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n^2 + 2n + 1$

$= (n+1)^2$ là một số chính phương.

Câu 18: Cho $A = p^4$ trong đó p là số nguyên tố. Tìm các giá trị của p để tổng các ước dương của A là số chính phương.

Lời giải

Các ước dương của A là $1; p; p^2; p^3; p^4$

Tổng các ước là $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2 \; (n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4n^2$

Ta có:

$4p^4 + 4p^3 + p^2 < 4n^2 < 4p^4 + p^2 + 4 + 4p^3 + 8p^2 + 4p$

$\Rightarrow (2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2 \Rightarrow (2n)^2 = (2p^2 + p + 1)^2$

Do đó :

$4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$

$\Leftrightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p_1 = -1 (ktm) \\ p_2 = 3 (tm) \end{array} \right.$

Vậy $p = 3$

Câu 19: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử $n^2 + 4n + 2013 = m^2 \; (m \in \mathbb{N})$

Suy ra $(n+2)^2 + 2009 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - (n+2)^2 = 2009$

$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2)=2009$

Mặt khác $2009=2009.1=287.7=49.41$ và $m+n+2>m-n-2$ nên có các trường hợp sau:

$TH1:\begin{cases} m+n+2=2009 \\ m-n-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1005 \\ n=1002 \end{cases}$

$TH2:\begin{cases} m+n+2=287 \\ m-n-2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=147 \\ n=138 \end{cases}$

$TH3:\begin{cases} m+n+2=49 \\ m-n-2=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=45 \\ n=2 \end{cases}$

Vậy các số cần tìm là $1002; 138; 2$

Câu 20: Cho $S=1.2.3+2.3.4+3.4.5+....+k(k+1)(k+2)$ (với $k\in \mathbb{N}^*$)

Chứng minh rằng $4S+1$ là bình phương của một số tự nhiên

Lời giải

Ta có: $k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2).4=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)\left[(k+3)-(k-1)\right]$

$=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)-\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k-1)$

$\Rightarrow 4S=1.2.3.4-0.1.2.3+2.3.4.5-1.2.3.4+....+k(k+1)(k+2)(k+3)$

$-k(k+1)(k+2)(k-1)=k(k+1)(k+2)(k+3)$

$\Rightarrow 4S+1=k(k+1)(k+2)(k+3)+1$

Mặt khác:

$k(k+1)(k+2)(k+3)+1=k(k+3)(k+1)(k+2)+1$

$=(k^2+3k)(k^2+3k+2)+1=(k^2+3k+1)^2$

Mà $k\in \mathbb{N}^*$ nên $k^2+3k+1\in \mathbb{N}^*$ nên suy ra đpcm.

Câu 21: Tìm số tự nhiên n sao cho số $A=n^2+n+6$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử A là số chính phương, suy ra tồn tại số $k\in \mathbb{N}$ sao cho :

$n^2+n+6=k^2 \Leftrightarrow 4(n^2+n+6)=4k^2$

$\Leftrightarrow (2k)^2-(2n+1)^2=23 \Leftrightarrow (2k+2n+1)(2k-2n-1)=23 \qquad (*)$

Do $k,n\in \mathbb{N}$ nên dễ thấy $2k-n-1$ và $2k+2n+1$ là các số nguyên

Ngoài ra $23>0$ và $2k+2n+1\ge 1; 2k-2n-1<2k+2n+1$

Suy ra $1\le 2k-2n-1<2k+2n+1$

Căn cứ các lập luận trên và 23 là số nguyên tố nên từ (*) suy ra

$$\begin{cases} 2k-2n-1=0 \\ 2k+2n+1=23 \end{cases} \Rightarrow 4n+2=22 \Leftrightarrow n=5$$

Với $n=5$ thì $A=36=6^2$ là số chính phương

Vậy $n=5$ là số tự nhiên cần tìm

Câu 22: Tìm số tự nhiên n để $n^2+4n+2013$ là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử $n^2+4n+2013=m^2\ (m\in \mathbb{N})$

Suy ra $(n+2)^2+2009=m^2 \Leftrightarrow m^2-(n+2)^2=2009$

$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2)=2009$

Mặt khác $2009=2009.1=287.7=49.41$ và $m+n+2>m-n-2$ nên có các trường hợp sau:

$TH1: \begin{cases} m+n+2=2009 \\ m-n-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1005 \\ n=1002 \end{cases}$

$TH2: \begin{cases} m+n+2=287 \\ m-n-2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=147 \\ n=138 \end{cases}$

$TH3: \begin{cases} m+n+2=49 \\ m-n-2=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=45 \\ n=2 \end{cases}$

Vậy các số cần tìm là $1002;138;2$

Câu 23: Cho n là tổng của hai số chính phương. $CMR: n^2$ cũng là tổng của hai số chính phương

Lời giải

Đặt $N=a^2+b^2$ với $a,b\in \mathbb{N}$

Khi đó $N^2=a^4-2a^2b^2+b^2+4a^2b^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$ là tổng của hai số chính phương.

Câu 24: Cho các số a,b,c,d nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn:
$\dfrac{2a+b}{a+b}+\dfrac{2b+c}{b+c}+\dfrac{2c+d}{c+d}+\dfrac{2d+a}{d+a}=6.$ Chứng minh $A=abcd$ là số chính phương.

Lời giải

$$a)\ \frac{2a+b}{a+b}+\frac{2b+c}{b+c}+\frac{2c+d}{c+d}+\frac{2d+a}{d+a}=6$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{a}{a+b}+1+\frac{b}{b+c}+1+\frac{c}{c+d}+1+\frac{d}{d+a}=6$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}=2$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b+c}+1-\frac{c}{c+d}-\frac{d}{d+a}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a+b}-\frac{b}{b+c}+\frac{d}{c+d}-\frac{d}{d+a}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)}+\frac{d(a-c)}{(c+d)(d+a)}=0$$

$$\Leftrightarrow b(c+d)(d+a)-d(a+b)(b+c)=0$$

$$\Leftrightarrow abc-acd+bd^2-b^2d=0$$

$$\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd)=0$$

$$\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd)=0$$

$$\Leftrightarrow ac-bd=0 \Leftrightarrow ac=bd$$

Vậy $A=abcd=(ac)^2$ là số chính phương

Câu 25:

Cho $a_n=1+2+3+....+n.$ Chứng minh rằng a_n+a_{n+1} là một số chính phương.

Lời giải

Ta có:

$$a_{n+1}=1+2+3+.....+n+n+1$$

$$a_n+a_{n+1}=2(1+2+3+.....+n)+n+1$$

$$=2.\frac{n(n+1)}{2}+n+1=n^2+2n+1=(n+1)^2$$ là một số chính phương.

Câu 26: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì:

$A=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $A=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$

$$=(x^2+5xy+4y^2)(x^2+5xy+6y^2)+y^4$$

Đặt $x^2+5xy+5y^2=t\,(t\in\mathbb{Z})$ thì

$$A=(t-y^2)(t+y^2)+y^4=t^2-y^4+y^4=t^2=(x^2+5xy+5y^2)^2$$

Vì $x, y, z\in\mathbb{Z}$ nên $x^2\in\mathbb{Z}, 5xy\in\mathbb{Z}, 5y^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^2+5xy+5y^2\in\mathbb{Z}(dfcm)$

Vậy A là số chính phương

Câu 27: Cho $a_n = 1 + 2 + 3 + ... + n.$ Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương.

Lời giải

Ta có: $a_{n+1} = 1 + 2 + 3 + ... + n + n + 1$

$a_n + a_{n+1} = 2(1 + 2 + 3 + ... + n) + n + 1$

$= 2.\dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n^2 + 2n + 1$

$= (n+1)^2$ là một số chính phương.

Câu 28: Cho a, b, c là các số hữu tỷ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ac = 1.$ Chứng minh rằng biểu thức $Q = (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Lời giải

Vì $ab + ac + bc = 1$ nên $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$

Tương tự: $b^2 + 1 = (a+b)(b+c)$ $\quad c^2 + 1 = (b+c)(c+a)$

Do đó: $Q = (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) = \left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2 \Rightarrow dfcm$

Câu 29: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x thì biểu thức P một số chính phương. $P = (x+5)(x+7)(x+9)(x+11) + 16.$

Lời giải

Ta có: $P = (x+5)(x+7)(x+9)(x+11) + 16.$

$\Leftrightarrow P = (x+5)(x+11)(x+7)(x+9) + 16.$

$\Leftrightarrow P = (x^2+16x+55)(x^2+16x+63) + 16.$

$\Leftrightarrow P = (x^2+16x+55)^2 + 8(x^2+16x+55) + 16.$

$\Leftrightarrow P = (x^2+16x+55)^2 + 2(x^2+16x+55).4 + 4^2.$

$\Leftrightarrow P = (x^2+16x+59)^2.$ Vơi x là số nguyên thì P là một số CP.

Câu 30: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương

Lời giải

b) Giả sử $n^2 + 4n + 2013 = m^2, (m \in \mathbb{N})$

Suy ra $(n+2)^2 + 2009 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - (n+2)^2 = 2009$

$$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2) = 2009$$

Mặt khác $2009 = 2009.1 = 287.7 = 49.41$ và $m + n + 2 > m - n - 2$ nên có các trường hợp sau xảy ra:

TH1: $\begin{cases} m + n + 2 = 2009 \\ m - n - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1005 \\ n = 1002 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} m + n + 2 = 287 \\ m - n - 2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 147 \\ n = 138 \end{cases}$

TH3: $\begin{cases} m + n + 2 = 49 \\ m - n - 2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 45 \\ n = 2 \end{cases}$

Vậy các số cần tìm là: 1002; 138; 2

Câu 31: Từ $2a^2 + a = 3b^2 + b$ có $(a - b)(3a + 3b + 1) = a^2$

Cũng có : $(a - b)(2a + 2b + 1) = b^2$. Suy ra $(a - b)^2.(2a + 2b + 1)(3a + 3b + 1) = (ab)^2$

Gọi $(2a + 2b + 1, 3a + 3b + 1) = d$. Chứng minh được $d = 1$

$\Rightarrow 3a + 3b + 1$ là số chính phương $\Rightarrow a + b$ là số chính phương (đpcm)

Câu 32: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Lời giải

Các ước dương của A là $1; p; p^2; p^3; p^4$

Tổng các ước là $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2 (n \in N)$

$\Rightarrow 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4n^2$

Ta có: $4p^4 + 4p^3 + p^2 < 4n^2 < 4p^4 + p^2 + 4 + 4p^3 + 8p^2 + 4p$

$$\Rightarrow (2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2 \Rightarrow (2n)^2 = (2p^2 + p + 1)^2$$

Do đó : $4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$

$$\Rightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p_1 = -1 \, (không\, thỏa\, mãn) \\ p_2 = 3 \, (thỏa\, mãn) \end{array} \right.$$

Vậy $p = 3$

Câu 33: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử $n^2 + 4n + 2013 = m^2 (m \in N)$

Suy ra $(n + 2)^2 + 2009 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - (n + 2)^2 = 2009$

$\Leftrightarrow (m + n + 2)(m - n - 2) = 2009$

Mặt khác 2009= 2009.1=287.7 = 49.41 và $m + n + 2 > m - n - 2$ nên có các trường hợp sau:

$TH\,1: \begin{cases} m + n + 2 = 2009 \\ m - n - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1005 \\ n = 1002 \end{cases}$

$TH\,2: \begin{cases} m+n+2=287 \\ m-n-2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=147 \\ n=138 \end{cases}$

$TH\,3: \begin{cases} m+n+2=49 \\ m-n-2=41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=45 \\ n=2 \end{cases}$

Vậy các số cần tìm là 1002; 138; 2.

Câu 34: Cho $S=1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots+k(k+1)(k+2)$ $với\ k \in N$¿

Chứng minh rằng $4S+1$là bình phương của một số tự nhiên

Lời giải

Ta có: $k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2).4=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)[(k+3)-(k-1)]$

¿ $\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)-\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k-1)$

$\Rightarrow 4S=1.2.3.4-0.1.2.3+2.3.4.5-1.2.3.4+\ldots+k(k+1)(k+2)(k+3)-k(k+1)(k+2)(k-1)=k(k+1)(k+2)(k+3$

$$\Rightarrow 4S+1=k(k+1)(k+2)(k+3)+1$$

Mặt khác:

$$k(k+1)(k+2)(k+3)+1=k(k+3)(k+1)(k+2)+1=¿$$

Mà $k \in N$¿ $nên\,k^2+3k+1 \in N$¿ nên suy ra đpcm.

Câu 35: Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Lời giải

Gọi hai số lần lượt là a^2 và $(a+1)^2$

Theo bài ra ta có:

$a^2+(a+1)^2+a^2.(a+1)^2=a^4+2a^3+3a^2+2a+1$

$=(a^4+2a^3+a^2)+2(a^2+a)+1=(a^2+a)^2+2(a+1)+1$

$=(a^2+a+1)^2$ là một số chính phương lẻ vì $a^2+a=a(a+1)$là số chẵn nên a^2+a+1là số lẻ

Câu 36:

Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị thì ta vẫn được một số chính phương.

Lời giải

Gọi $\overline{abcd}$ là số phải tìm $a,b,c,d \in \mathbb{N}, 0 \le a,b,c,d \le 9, a \ne 0$

Ta có: $\begin{cases}\overline{abcd}=k^2\\ \overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)}=m^2\end{cases}$ $k,m\in\mathbb{N},31<k<m<100 \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{abcd}=k^2\\ \overline{abcd}+1353=m^2\end{cases}$

Do đó: $m^2-k^2=1353$

$\Rightarrow (m+k)(m-k)=123.11=41.33(k+m<200)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m+k=123\\ m-k=11\end{cases}\\ \begin{cases}m+k=41\\ m-k=33\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=67\\ m=57\end{cases}(TM)\\ \begin{cases}m=37\\ k=4\end{cases}(KTM)\end{array}\right.$$

Vậy số cần tìm là $\overline{abcd}=3136$

Câu 37: Tìm số tự nhiên n sao cho số $A=n^2+n+6$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử A là số chính phương, suy ra tồn tại số $k\in\mathbb{N}$ sao cho :

$n^2+n+6=k^2 \Leftrightarrow 4(n^2+n+6)=4k^2$

$\Leftrightarrow (2k)^2-(2n+1)^2=23 \Leftrightarrow (2k+2n+1)(2k-2n-1)=23$ (*)

Do $k,n\in\mathbb{N}$ nên dễ thấy $2k-n-1$ và $2k+2n+1$ là các số nguyên

Ngoài ra $23>0$ và $2k+2n+1\geq 1; 2k-2n-1<2k+2n+1$

Suy ra $1\leq 2k-2n-1<2k+2n+1$

Căn cứ các lập luận trên và 23 là số nguyên tố nên từ (*) suy ra

$\begin{cases}2k-2n-1=0\\ 2k+2n+1=23\end{cases} \Rightarrow 4n+2=22 \Leftrightarrow n=5$

Với $n=5$ thì $A=36=6^2$ là số chính phương

Vậy $n=5$ là số tự nhiên cần tìm.