Bài 3. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

Từ khoá: Phương trình đường tròn; Phương trình tiếp tuyến của đường tròn.

Một nông trại tưới nước theo phương pháp vòi phun xoay vòng trung tâm. Cho biết tâm một vòi phun được đặt tại toạ độ (30; 40) và vòi có thể phun xa tối đa 50 m. Làm thế nào để viết phương trình biểu diễn tập hợp các điểm xa nhất mà vòi này có thể phun tới?



1. Phương trình đường tròn

Hãy nhắc lại công thức tính khoảng cách giữa hai điểm I(a; b) và M(x; y) trong mặt phẳng Oxy.

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) tâm I(a; b), bán kính R.

Ta có M(x; y) $\in $ (C) ⬄ IM = R

 ⬄ $\sqrt{(x-a)^{2}+(y-b)^{2}}$ = R

 ⬄ $(x-a)^{2}+(y-b)^{2}$ = R2.



Phương trình (x – a)2 + (y – b)2 = R2 được gọi là phương trình đường tròn tâm I(a, b) bán kính R.

Ví dụ 1

Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm 0(0; 0), bán kính R;

b) (C) có tâm 7(1; -3), bán kính R = 5;

c) (C) đi qua ba điểm A(3; 6), B(2; 3) và C(6; 5).

Giải

a) Đường tròn (C) tâm 0(0; 0), bán kính R có phương trình: x2 + y2 = R2.

b) Đường tròn tâm 7 (1; -3), bán kính R = 5 có phương trình: (x – 1) + (y + 3)2 = 25.

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Ta có M $\left(\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right)$, N $\left(\frac{9}{2}; \frac{11}{2}\right)$.

Đường trung trực $∆$, của đoạn thẳng AB là đường thắng đi qua M và nhận $\vec{BA}$ = (1; 3) làm vectơ pháp tuyến, nên có phương trình: x + 3y – 16 = 0.

blog hotrohoctap.com

Đường trung trực $∆$, của đoạn thẳng AC là đường thẳng đi qua N và nhận $\vec{AC}$ = (3; -1) làm vectơ pháp tuyến, nên có phương trình: 3x – y – 8 = 0.

$∆$1 cắt $∆$2 tại điểm I(4; 4) cách đều ba điểm A, B, C, suy ra đường tròn (C) cần tìm có tâm I(4; 4) và có bán kính R = IA = $\sqrt{5}$, Vậy (C) có phương trình: (x – 4)2 + (y – 4)2 = 5.

Ví dụ 2

Tìm tâm và bán kính của đường tròn (C) có phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a) (x – 7)2 + (y – 2)2 = 49; b) (x + 3)2 + (y – 5)2 = 14; c) (x – 6)2 + y2 = 9.

Giải

1. (C) có tâm I(7; 2) và có bán kính R= 7.

b) (C) có tâm I(-3; 5) và có bán kính R = $\sqrt{14}$.

c) (C) có tâm I(6; 0) và có bán kính R = 3.

Nhận xét: Ta có $(x-a)^{2}+(y-b)^{2}$ = R2 ⬄ x2 + y2 – 2ax – 2by + (a2 + b2 – R2) = 0.

Vậy phương trình đường tròn $(x-a)^{2}+(y-b)^{2}$ = R2 có thể được viết dưới dạng x2 + y2 – 2ax – 2by + c = 0, trong đó c = a2 + b2 – R2.

Ngược lại, phương trình x2 + y2 – 2ax – 2by + c = 0 là phương trình của đường tròn (C) khi và chỉ khi a2 + b2 – c > 0. Khi đó đường tròn (C) có tâm I(a; b) và bán kính R = $\sqrt{a^{2}+b^{2}-c}$.

Ví dụ 3

Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn? Tìm toạ độ

tâm và bán kính của đường tròn đó.

a) x2 + y2 – 4x + 6y – 23 = 0; b) x2 + y2 – 2x – 4y + 9 = 0.

Giải

a) Phương trình đã cho có dạng x2 + y2 – 2ax – 2by + c = 0 với a = 2; b = -3; c = -23.

Ta có a2 + b2 – c = 4 + 9 + 23 = 36 > 0. Vậy đây là phương trình đường tròn có tâm I(2; -3) và có bán kính R = $\sqrt{36}$ = 6.

b) Phương trình đã cho có dạng x2 + y2 – 2ax – 2by + c = 0 với a = 1; b = 2; c = 9.

Ta có a2 + b2 – c = 1 + 4 – 9 = -4 < 0. Vậy đây không phải phương trình đường tròn.

Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm O(0; 0), bán kính R = 4; b) (C) có tâm I(2; -2), bán kính R = 8;

 c) (C) đi qua ba điểm A(1; 4), B(0; 1), C(4; 3).

blog hotrohoctap.com

 Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn. Tìm toạ độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

a) x2 + y2 – 2x – 4y – 20 = 0; b) (x + 5)2 + (y + 1)2= 121;

c) x2 + y2 – 4x – 8y + 5 = 0; d) 2x2 +2y2 + 6x + 8y – 2 = 0.

Theo dữ kiện đã cho trong hoạt động khởi động của bài học, viết phương trình đường tròn biểu diễn tập hợp các điểm xa nhất mà vỏi nước có thể phun tới.

Một sân khấu đã được thiết lập một hệ trục toạ độ để đạo diễn có thể sắp đặt ánh sáng và xác định vị trí của các diễn viên. Cho biết một đèn chiếu đang rọi trên sân khẩu một vùng sáng bên trong đường tròn (C) có phương trình (x – 13)2 + (y – 4)2 = 16.

a) Tìm toạ độ tâm và bán kính của đường tròn (C).

b) Cho biết toạ độ trên sân khấu của ba diễn viên A, B, C như sau: A(11; 4), B(8; 5), C(15; 5). Diễn viên nào đang được đèn chiếu sáng?

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Cho điểm M (x; y) nằm trên đường tròn (C) tâm I(a; b) và cho điểm M(x; y) tuỳ ý trong mặt phẳng Oxy. Gọi A là tiếp tuyến với (C) tại M0.



a) Viết toạ độ của hai vectơ $\vec{M\_{0}M}$ và $\vec{M\_{0}I}$.

b) Viết biểu thức toạ độ của tích vô hướng của hai vectơ $\vec{M\_{0}M}$ và $\vec{M\_{0}I}$.

c) Phương trình $\vec{M\_{0}M}$ . $\vec{M\_{0}I}$ = 0 là phương trình của đường thẳng nào?

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tâm I (a; b) tại điểm M0 (x0; y0) nắm trên đường tròn là:

(a – x0)(x – x0) + (b – y0)(y – y0) = 0.

Ví dụ 4

Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C): x2 + y2 = 5 tại điểm M(1; 2).

Giải

Ta có 12 + 22 = 5, nên điểm M thuộc (C).

Đường tròn (C): x2 + y2 = 5 có tâm O(0; 0).

Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M(1; 2) là:

(0 – 1)(x – 1) + (0 – 2)(y – 2) = 0

⬄ -x – 2y + 5 = 0

⬄ x + 2y – 5 = 0.



Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C): x2 + y2 – 2x – 4y – 20 = 0 tại điểm A(4; 6).

Một vận động viên ném đĩa đã vung đĩa theo một đường tròn (C) có phương trình:

(x – 1)2 + (y – 1)2 = $\frac{169}{144}$.

Khi người đó vung đĩa đến vị trí điểm M $\left( \frac{17}{12}; 2\right)$ thì buông đĩa (Hình 4). Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm M.



BÀI TẬP

1. Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn. Tìm toạ độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

a) x2 + y2 – 6x – 8y – 21 = 0; b) x2 + y2 – 2x + 4y + 2 = 0;

c) x2 + y2 – 3x + 2y + 7 = 0; d) 2x2 + y2 +x + 4y – 1 = 0.

2. Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm I(1; 5) và có bán kính r = 4;

b) (C) có đường kính MN với M(3; -1) và N(9; 3);

c) (C) có tâm I(2; 1) và tiếp xúc với đường thẳng 5x – 12y + 11 = 0;

d) có tâm A(1; -2) và đi qua điểm B(4; -5).

 3. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác có toạ độ các đỉnh là:

a) M(2; 5), N(1; 2), P(5; 4); b) A(0; 6), B(7; 7), C(8; 0).

 4. Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ Ox, Oy và đi qua điểm A(4; 2);

blog hotrohoctap.com

1. Cho đường tròn (C) có phương trình x2 + y2 – 2x – 4y – 20 = 0.

a) Chứng tỏ rằng điểm M(4; 6) thuộc đường tròn (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(4; 6).

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng 4x + 3y + 2022 = 0.

6. Một cái cổng hình bán nguyệt rộng 8,4 m, cao 4,2 m như Hình 5. Mặt đường dưới cồng được chia thành hai làn cho xe ra vào.

a) Viết phương trình mô phỏng cái cổng.

b) Một chiếc xe tải rộng 2,2 m và cao 2,6 m đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng mà không làm hư hỏng cổng hay không?

