

Bài 9. Giới hạn dãy số*Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)*

Họ tên thí sinh:**Số báo danh:****PHẦN E. CÂU HỎI TRẢ LỜI NGẮN**

Câu 1. Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3\sqrt{n} + 1}{3n\sqrt{n} + 2n}$$
Lời giải**Lời giải**

Ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3\sqrt{n} + 1}{3n\sqrt{n} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \left(2\sqrt{n} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right)}{n\sqrt{n} \left(3 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}}{3 + \frac{2}{\sqrt{n}}} = +\infty$$

$$\text{do} \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\sqrt{n} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = 3 \end{cases}$$

Câu 2. Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{n^4 - 2n^3 + 1}{2n^3 + n^2}}$$
Lời giải**Lời giải**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{n^4 - 2n^3 + 1}{2n^3 + n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{\frac{n^3 \left(n - 2 + \frac{1}{n^3} \right)}{n^3 \left(2 + \frac{1}{n} \right)}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{\frac{n - 2 + \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{1}{n}}}} = +\infty$$

Ta có:

$$\text{do} \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - 2 + \frac{1}{n^3} \right) = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2 \end{cases}$$

Câu 3. Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{3n} - 5^n}{2^{2n} + 3 \cdot 5^{2n}}$$
Lời giải**Lời giải**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{3n} - 5^n}{2^{2n} + 3 \cdot 5^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64^n - 5^n}{4^n + 3 \cdot 25^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64^n \left[1 - \left(\frac{5}{64} \right)^n \right]}{64^n \left[\left(\frac{4}{64} \right)^n + 3 \cdot \left(\frac{25}{64} \right)^n \right]}$$

$$= \lim \frac{1 - \left(\frac{5}{64}\right)^n}{\left(\frac{4}{64}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{25}{64}\right)^n} = +\infty, \text{ do } \begin{cases} \lim \left[1 - \left(\frac{5}{64}\right)^n\right] = 1 \\ \lim \left[\left(\frac{4}{64}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{25}{64}\right)^n\right] = 0 \end{cases}.$$

$$\lim n \sqrt{\frac{9n^2}{4n^4 - n^2}}.$$

Câu 4. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim n \sqrt{\frac{9n^2}{4n^4 - n^2}} = \lim \frac{n^2}{n^2} \sqrt{\frac{9}{4 - \frac{1}{n^2}}} = \lim \sqrt{\frac{9}{4 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{3}{2}$$

Ta có:

$$\lim (\sqrt{n^2 - n} + \sqrt{2n^2 - n + 3})$$

Câu 5. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim (\sqrt{n^2 - n} + \sqrt{2n^2 - n + 3}) = \lim n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt{2 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} \right) = +\infty$$

$$\text{do } \begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt{2 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} \right) = \sqrt{1} + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\lim (\sqrt{n^2 + 2n - 2} - n)$$

Câu 6. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim (\sqrt{n^2 + 2n - 2} - n) = \lim \frac{n^2 + 2n - 2 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n - 2} + n} = \lim \frac{2n - 2}{n \sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}} + n}$$

$$= \lim \frac{n \left(2 - \frac{2}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}} + 1 \right)} = \lim \frac{2 - \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1} + 1} = 1.$$

$$\lim (\sqrt{3n^2 + n + 2} - \sqrt{3n^2 + n + 1})$$

Câu 7. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim (\sqrt{3n^2 + n + 2} - \sqrt{3n^2 + n + 1}) &= \lim \frac{3n^2 + n + 2 - (3n^2 + n + 1)}{\sqrt{3n^2 + n + 2} + \sqrt{3n^2 + n + 1}} \\ &= \lim \frac{1}{\sqrt{3n^2 + n + 2} + \sqrt{3n^2 + n + 1}} = 0 \quad \left(\text{do } \lim (\sqrt{3n^2 + n + 2} + \sqrt{3n^2 + n + 1}) = +\infty \right) \end{aligned}$$

$$\lim (n + n^2 - \sqrt{n^4 + 3n + 1})$$

Câu 8. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned}
\lim(n + n^2 - \sqrt{n^4 + 3n + 1}) &= \lim \frac{n^2 + 2n^3 + n^4 - (n^4 + 3n + 1)}{n + n^2 + \sqrt{n^4 + 3n + 1}} \\
&= \lim \frac{\left(2n + 1 - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(\frac{1}{n} + 1\right) + n^2 \sqrt{1 + \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^4}}} = \lim \frac{2n + 1 - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n} + 1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^4}}} = +\infty \\
\text{do } \begin{cases} \lim \left(2n + 1 - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = +\infty \\ \lim \left(\frac{1}{n} + 1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^4}}\right) = 1 + 1 = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Câu 9. Tìm giới hạn sau: $\lim \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 3n}$

Lời giải**Lời giải**

Nhận xét: $1 + 2 + \dots + n$ là tổng của n số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

Vì vậy $1 + 2 + \dots + n = \frac{(1 + n)n}{2}$.

$$\lim \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 3n} = \lim \frac{n(n + 1)}{2(n^2 + 3n)} = \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2n^2 \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{2}$$

Ta có:

Câu 10. Tìm giới hạn sau: $\lim \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}$

Lời giải**Lời giải**

Nhận xét: Xét $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$ là tổng của $n + 1$ số hạng đầu của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội bằng $q = 2$ nên

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = \frac{u_1(1 - q^{n+1})}{1 - q} = \frac{1(1 - 2^{n+1})}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$$

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{1(1 - 3^{n+1})}{1 - 3} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\lim \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n} = \lim \frac{2^{n+1} - 1}{\frac{3^{n+1} - 1}{2}}$$

Khi đó:

$$= \lim 2 \cdot \frac{2 \cdot 2^n - 1}{3 \cdot 3^n - 1} = \lim 2 \cdot \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n}}{3 - \frac{1}{3^n}} = 2 \cdot \frac{0}{3} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sqrt{1+3+5+\dots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}$$

Câu 11. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

Nhận xét: $1+3+5+\dots+(2n-1)$ là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1=1$ và công sai là $d=2$, vì vậy, ta có:

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = \frac{(u_1+u_n)n}{2} = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$$

$$\text{Vì vậy: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sqrt{1+3+5+\dots+(2n-1)}}{2n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{n^2}}{2n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

Câu 12. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

Câu 13. Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau:

Lời giải

Lời giải

Nhận xét: Ta cần áp dụng công thức tổng cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1-q} \text{ trong đó } u_1, q \text{ theo thứ tự là số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.}$$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$, công bội

$$q = -\frac{1}{2}. \text{ Vì vậy: } S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

$$T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$$

Câu 14. Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau:

Lời giải

Lời giải

Nhận xét: Ta cần áp dụng công thức tổng cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1-q} \text{ trong đó } u_1, q \text{ theo thứ tự là số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.}$$

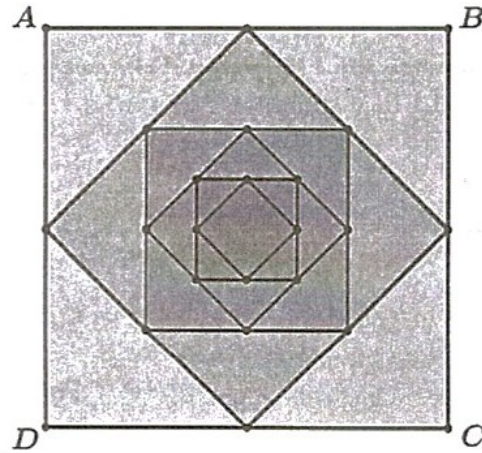
Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$, công bội

$$q = \frac{1}{3}.$$

$$T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Vì vậy

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng 1. Nối các trung điểm của bốn cạnh hình vuông $ABCD$, ta được hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh hình vuông thứ hai, ta được hình vuông thứ ba. Tiếp tục như thế ta nhận được một dãy các hình vuông. Tìm tổng chu vi của dãy các hình vuông đó.



Lời giải

Lời giải

Nếu cạnh hình vuông ban đầu là x thì theo định lí Pythagore, ta có cạnh hình vuông thứ hai là

$$\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}. (*)$$

Gọi cạnh hình vuông $ABCD$ là $u_1 = 1$, từ (*) ta có cạnh hình vuông thứ hai là $u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cạnh hình vuông thứ

ba là $u_3 = \frac{1}{2}$, cạnh hình vuông thứ tư là $u_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}, \dots$

Xét tổng chu vi dãy các hình vuông là:

$$S = 4u_1 + 4u_2 + 4u_3 + \dots = 4 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \dots \right).$$

Để thấy $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng 1, công bội bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$S = 4 \cdot \frac{u_1}{1 - q} = 4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 8 + 4\sqrt{2}$$

Vậy ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3}$$

Câu 16. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(2 - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right)}{n^3 \left(\frac{1}{n^3} - 4 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n^3} - 4} = -\frac{1}{2}$$

Câu 17. Tìm giới hạn sau: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{n^2 - 2n + 3}$

Lời giải

Lời giải

$$\lim \frac{n^3 + 1}{n^2 - 2n + 3} = \lim \frac{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)} = \lim \frac{n \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} = +\infty$$

$$\text{do } \begin{cases} \lim n \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = +\infty \\ \lim \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\lim \frac{\sqrt{3n^2 - 4}}{3n + 2}$$

Câu 18. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\frac{\sqrt{3n^2 - 4}}{3n + 2} = \lim \frac{n \sqrt{3 - \frac{4}{n^2}}}{n \left(3 + \frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{\sqrt{3 - \frac{4}{n^2}}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\lim \frac{\sqrt[3]{3n^3 + n^2 + n + 2}}{\sqrt{4n^2 - 4n + 5}}$$

Câu 19. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim \frac{\sqrt[3]{3n^3 + n^2 + n + 2}}{\sqrt{4n^2 - 4n + 5}} = \lim \frac{n \sqrt[3]{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}}{n \sqrt{4 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}} = \lim \frac{\sqrt[3]{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}}{\sqrt{4 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

$$\lim \frac{3^{n+1} - 4^n}{4^{n-1} + 3}$$

Câu 20. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim \frac{3^{n+1} - 4^n}{4^{n-1} + 3} = \lim \frac{3 \cdot 3^n - 4^n}{\frac{1}{4} \cdot 4^n + 3} = \lim \frac{4^n \left[3 \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right]}{4^n \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4^n}\right)} = \lim \frac{3 \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4^n}} = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$$

$$\lim \frac{3^n + 4^{n+1}}{1 - 5^n}$$

Câu 21. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim \frac{3^n + 4^{n+1}}{1 - 5^n} = \lim \frac{3^n + 4 \cdot 4^n}{1 - 5^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\lim \frac{3^{2n} + 6^n}{6^n + 2 \cdot 5^n}$$

Câu 22. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned}\lim \frac{3^{2n} + 6^n}{6^n + 2 \cdot 5^n} &= \lim \frac{9^n + 6^n}{6^n + 2 \cdot 5^n} = \lim \frac{9^n \left[1 + \left(\frac{6}{9} \right)^n \right]}{9^n \left[\left(\frac{6}{9} \right)^n + 2 \left(\frac{5}{9} \right)^n \right]} \\ &= \lim \frac{1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n}{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 2 \left(\frac{5}{9} \right)^n} = +\infty \left(\text{do } \lim \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n + 2 \left(\frac{5}{9} \right)^n \right] = 0 \right).\end{aligned}$$

Câu 23. Tìm giới hạn sau: $\lim \sqrt[3]{\frac{2^{3n} - 3^{n+1}}{8^{n+1} + 6^{n+1}}}$.

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned}\lim \sqrt[3]{\frac{2^{3n} - 3^{n+1}}{8^{n+1} + 6^{n+1}}} &= \lim \sqrt[3]{\frac{8^n - 3 \cdot 3^n}{8 \cdot 8^n + \frac{1}{6} 6^n}} = \lim \sqrt[3]{\frac{8^n \left(1 - 3 \cdot \left(\frac{3}{8} \right)^n \right)}{8^n \left(8 + \frac{1}{6} \left(\frac{6}{8} \right)^n \right)}} \\ &= \lim \sqrt[3]{\frac{1 - 3 \left(\frac{3}{8} \right)^n}{8 + \frac{1}{6} \left(\frac{3}{4} \right)^n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Câu 24. Tìm giới hạn sau: $\lim (3n - 5 + 2n^3)$;

Lời giải

Lời giải

$$\lim (3n - 5 + 2n^3) = \lim n^3 \left(\frac{3}{n^2} - \frac{5}{n^3} + 2 \right) = +\infty$$

Câu 25. Tìm giới hạn sau: $\lim (\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{2n^2 + 3})$;

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned}\lim (\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{2n^2 + 3}) &= \lim n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} - \sqrt{2 + \frac{3}{n^2}} \right) = -\infty \\ \lim (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 2})\end{aligned}$$

Câu 26. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned}\lim(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}) &= \lim \frac{n^2+n-n^2-2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2}} = \lim \frac{n-2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2}} \\ &= \lim \frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)} = \lim \frac{1-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{2} \\ &\quad \lim(\sqrt[3]{n^3-2n^2-n})\end{aligned}$$

Câu 27. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned}\lim(\sqrt[3]{n^3-2n^2-n}) &= \lim \frac{n^3-2n^2-n^3}{\sqrt[3]{(n^3-2n^2)^2+n^3}\sqrt[3]{n^3-2n^2+n^2}} \\ &= \lim \frac{-2n^2}{\sqrt[3]{(n^3-2n^2)^2+n^3}\sqrt[3]{n^3-2n^2+n^2}} = \lim \frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}+1}} = -\frac{2}{3} \\ &\quad \lim \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}\end{aligned}$$

Câu 28. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ta có:

(có thể chứng minh đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp).

Khi đó:

$$\begin{aligned}\lim \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}} &= \lim \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n(n+7)(6n+5)}} \\ &= \lim \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12\left(1+\frac{7}{n}\right)\left(6+\frac{5}{n}\right)}} = \frac{1}{6} \\ &\quad \lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right]\end{aligned}$$

Câu 29. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned}\lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right] \\ &= \lim \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \lim \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \\ &\quad \lim \left[\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} \right]\end{aligned}$$

Câu 30. Tìm giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim \left[\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} \right] \\ &= \lim \left[\frac{2\sqrt{1}-1\sqrt{2}}{2 \cdot 1} + \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)n} \right] \\ &= \lim \left[\sqrt{1} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right] = \lim \left[1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right] = 1 \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} + \dots$$

Câu 31. Tìm tổng sau:

Lời giải

Lời giải

Ta thấy S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3}$, công bội $q = -\frac{1}{3}$.

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Vì vậy

$$T = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n + \dots$$

Câu 32. Tìm tổng sau:

Lời giải

Lời giải

Ta thấy T là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$T = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 + \sqrt{2}.$$

Vì vậy

Câu 33. Viết dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,271414\dots$

Lời giải

Lời giải

Ta có: $0,271414\dots = 0,27 + 0,0014 + 0,000014 + \dots$

Xét tổng $0,0014 + 0,000014 + 0,00000014 + \dots$

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu là $u_1 = 0,0014$ và công bội $q = \frac{1}{100}$.

$$0,271414\dots = 0,27 + \frac{u_1}{1-q} = \frac{27}{100} + \frac{0,0014}{1-\frac{1}{100}} = \frac{2687}{9900}$$

Vì vậy

Câu 34. Viết dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,511111\dots$

Lời giải

Lời giải

Ta có: $0,511111\dots = 0,5 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots$

Xét tổng $0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $u_1 = 0,01$ và công bội $q = \frac{1}{10}$.
 Vì vậy $0,51111\ldots = 0,5 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \ldots$

$$= 0,5 + \frac{u_1}{1-q} = 0,5 + \frac{0,01}{1-\frac{1}{10}} = \frac{23}{45}.$$

Câu 35. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1, \forall n \geq 2 \end{cases}$, tính $\lim \frac{u_n}{3^n}$.

Lời giải

Lời giải

Xét số a thỏa mãn $u_n - a = 3(u_{n-1} - a), \forall n \geq 2 \Leftrightarrow u_n = 3u_{n-1} - 2a, \forall n \geq 2$.

Suy ra $-2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n - \frac{1}{2} = 3\left(u_{n-1} - \frac{1}{2}\right), \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{2} \Rightarrow v_{n-1} = u_{n-1} - \frac{1}{2}, \forall n \geq 2$ và $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$.

Khi đó dãy (v_n) thỏa mãn $\begin{cases} v_1 = -\frac{5}{2} \\ v_n = 3v_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Ta thấy (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = -\frac{5}{2}$, công bội $q = 3$, suy ra $v_n = -\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1}, \forall n \geq 1$.

Do đó $u_n = v_n + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$.

Vậy $\lim \frac{u_n}{3^n} = \lim \frac{-\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}}{3^n} = \lim \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \right) = -\frac{5}{6}$.

Câu 36. Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh a . Người ta dựng tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$, dựng tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ và cứ tiếp tục như vậy sẽ nhận được một dãy các tam giác. Tính tổng diện tích S của tất cả các tam giác đều $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \ldots$

Lời giải

Lời giải

Diện tích $\Delta A_1B_1C_1$ có cạnh a là $S_1 = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích $\Delta A_2B_2C_2$ có cạnh $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ là $S_2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} \left(a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3}{4} S_1$.

Diện tích $\Delta A_3B_3C_3$ có cạnh $\frac{3a}{4}$ là $S_3 = \left(\frac{3a}{4} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} S_2$.

Theo quy luật đó, ta thấy $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ và công bội $q = \frac{3}{4}$.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = a^2 \sqrt{3}$$

Do đó:

$$\lim(\sqrt{n^2 - 4n + 5} + 3 - n)$$

Câu 37. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim(\sqrt{n^2 - 4n + 5} + 3 - n) \\ &= \lim\left(\frac{(\sqrt{n^2 - 4n + 5} - n)(\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n)}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + 3\right) \\ &= \lim\left(\frac{n^2 - 4n + 5 - n^2}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + 3\right) = \lim\left(\frac{-4n + 5}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + 3\right) = \lim\left(\frac{-4 + \frac{5}{n}}{\sqrt{1 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}} + 1} + 3\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\lim(1 + 3n - \sqrt{9n^2 - n + 7})$$

Câu 38. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim(1 + 3n - \sqrt{9n^2 - n + 7}) \\ &= \lim\left(1 + \frac{9n^2 - 9n^2 + n - 7}{3n + \sqrt{9n^2 - n + 7}}\right) = \lim\left(1 + \frac{n - 7}{3n + \sqrt{9n^2 - n + 7}}\right) = \lim\left(1 + \frac{1 - \frac{7}{n}}{3 + \sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{7}{n^2}}}\right) = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$\lim(\sqrt{n^2 + 6n - 1} - n)$$

Câu 39. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim(\sqrt{n^2 + 6n - 1} - n) \\ &= \lim\left(\frac{n^2 + 6n - 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 6n - 1} + n}\right) = \lim\frac{6n - 1}{\sqrt{n^2 + 6n - 1} + n} = \lim\frac{6 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2}} + 1} = 3 \end{aligned}$$

$$\lim(\sqrt{4n^2 + 6n - 1} - 2n - 3)$$

Câu 40. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim(\sqrt{4n^2 + 6n - 1} - 2n - 3) \\ &= \lim(\sqrt{4n^2 + 6n - 1} - 2n - 3) = \lim\left(\frac{4n^2 + 6n - 1 - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 6n - 1} + 2n} - 3\right) \\ &= \lim\left(\frac{6n - 1}{\sqrt{4n^2 + 6n - 1} + 2n} - 3\right) = \lim\left(\frac{6 - \frac{1}{n}}{\sqrt{4 + \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2}} + 2} - 3\right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \dots$$

Câu 41. Tính tổng sau:

Lời giải

Lời giải

Tổng đã cho là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội

$$q = -\frac{1}{2} \text{ nên } S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

$$\lim \frac{\sqrt{4n^4 + 4n^2 + 6}}{4n^2 + n - 1}$$

Câu 42. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim \frac{\sqrt{4n^4 + 4n^2 + 6}}{4n^2 + n - 1} = \lim \frac{n^2 \cdot \sqrt{4 + \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^4}}}{n^2 \cdot \left(4 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{\sqrt{4 + \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^4}}}{4 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{\sqrt{9n^4 + 6n^2 + 1}}{-n^2 + 2n - 1}$$

Câu 43. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim \frac{\sqrt{9n^4 + 6n^2 + 1}}{-n^2 + 2n - 1} = \lim \frac{n^2 \cdot \sqrt{9 + \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^4}}}{n^2 \cdot \left(-1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{\sqrt{9 + \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^4}}}{-1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} = -3$$

$$\lim \frac{\sqrt{3n^2 + 1} + n}{n^2 - 2n - 1}$$

Câu 44. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim \frac{\sqrt{3n^2 + 1} + n}{n^2 - 2n - 1} = \lim \frac{n \cdot \sqrt{3 + \frac{1}{n^2}} + n}{n^2 - 2n - 1} = \lim \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{3 + \frac{1}{n^2}} + 1}{1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} = 0$$

$$\lim(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1})$$

Câu 45. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$= \lim \frac{n^2 + n - (n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim \frac{n+1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}} + n\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{-3n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 3n + 7}$$

Câu 46. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim \frac{-3n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 3n + 7} = \lim \frac{-3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}} = -\frac{3}{2}$$

(bậc của tử bằng bậc của mẫu).

$$\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n} - 3n + 1}{n^2 + 2}$$

Câu 47. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n} - 3n + 1}{n^2 + 2} = \lim \frac{\sqrt{\frac{9}{n^2} - \frac{1}{n^3}} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} = 0$$

(bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu).

$$\lim \frac{2^n - 5 \cdot 3^n}{3^n + 1}$$

Câu 48. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim \frac{2^n - 5 \cdot 3^n}{3^n + 1} = \lim \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 5}{1 + \frac{1}{3^n}} = -5$$

Câu 49. Tính giới hạn của dãy số sau: $u_n = \sqrt{4n^2 + 1} - 2n$

Lời giải

Lời giải

$$\lim u_n = \lim (\sqrt{4n^2 + 1} - 2n) = \lim (\sqrt{4(+\infty)^2 + 1} - 2(+\infty)) = \infty - \infty$$

Ta thấy

Suy ra, không xác định.

Ta nhân tử và mẫu cho $\sqrt{4n^2 + 1} + 2n$, khi đó

$$\begin{aligned} \lim u_n &= \lim (\sqrt{n^2 + 4} - \sqrt{n^2 + 2}) = \lim \frac{(n^2 + 4) - (n^2 + 2)}{\sqrt{n^2 + 4} + \sqrt{n^2 + 2}} = \lim \frac{2}{\sqrt{n^2 + 4} + \sqrt{n^2 + 2}} \\ &= \lim \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}} = \frac{2.0}{\sqrt{1 + 4.0} + \sqrt{1 + 2.0}} = 0. \end{aligned}$$

Vậy $\lim u_n = 0$.

Câu 50. Tính giới hạn của dãy số sau: $u_n = \sqrt{n^2 + 4} - \sqrt{n^2 + 2}$

Lời giải

Lời giải

Ta thấy $\lim u_n$ có dạng vô định $\infty - \infty$, ta nhân tử và mẫu cho $\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2+2}$,

$$\lim u_n = \lim (\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+2}) = \lim \frac{(n^2+4) - (n^2+2)}{\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2+2}} = \lim \frac{2}{\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2+2}}$$

Khi đó:

$$= \lim \frac{2}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} = \frac{2.0}{\sqrt{1+4.0} + \sqrt{1+2.0}} = 0.$$

Vậy $\lim u_n = 0$.

$$\lim (\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - n)$$

Câu 51. Tính giới hạn sau:

Lời giải**Lời giải**

$$\lim (\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - n) = \lim \frac{n^3 - 3n^2 - n^3}{\sqrt[3]{(n^3 - 3n^2)^2} + n^2 - n \cdot \sqrt[3]{n^3 - 3n^2}} = - \lim \frac{3}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^2} + 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}}}$$

$$\lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}} = 1 \Rightarrow \lim \left(\sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^2} + 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}} \right) = 1$$

Khi $n \rightarrow \infty$ thì:

$$\lim (\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - n) = -3$$

Do đó,

$$\lim (\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2})$$

Câu 52. Tính giới hạn sau:

Lời giải**Lời giải**

$$\begin{aligned} \lim (\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2}) &= \lim (\sqrt[3]{n^3 + 3} - n) + \lim (n - \sqrt{n^2 + 2}) \\ &= \lim \frac{n^3 + 3 - n^3}{(n^3 + 3)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3}} + \lim \frac{n^2 - n^2 - 2}{n + \sqrt{n^2 + 2}} \\ &= \lim \frac{3}{(n^3 + 3)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3}} - \lim \frac{2}{n + \sqrt{n^2 + 2}} \end{aligned}$$

$$\lim \left((n^3 + 3)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3} \right) = \infty; \lim (n + \sqrt{n^2 + 2}) = \infty$$

Khi $n \rightarrow \infty$ thì:

$$\lim \frac{3}{(n^3 + 3)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3}} - \lim \frac{2}{n + \sqrt{n^2 + 2}} = 0$$

Suy ra

$$\lim (\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2}) = 0$$

Do đó,

Câu 53. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dạng phân số:

(a) $0,777777777777\ldots$

(b) $0,277777777777\ldots$

Lời giải

a) $\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10}$ nên

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$$

$$0,7777777777777777\ldots = 7,0,111111111111\ldots = 7 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right) = \frac{7}{9}$$

Suy ra

b) $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10}$ nên

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots = \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{90}$$

$$0,277777777777\ldots = 0,2 + 0,0777777777 = \frac{2}{10} + 7 \cdot \frac{1}{90} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$$

Suy ra

$$\lim \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$$

Câu 54. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\text{Xét } A = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\text{Ta có: } 2A = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}$$

$$\lim A = \lim \frac{2n}{2n+1} = \lim \frac{2}{2 + \frac{1}{n}} = 1$$

Suy ra

$$\lim \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right)$$

Câu 55. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\text{Xét } B = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}$$

$$\text{Ta có } 2B = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{2.4} + \dots + \frac{2}{n(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+2}$$

$$\lim B = \lim \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \lim \left(\frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \right) = \frac{3}{2}$$

Suy ra

$$\lim \frac{\sqrt{n^2 + n} + 3\sqrt{n^2 + 1}}{n + 1}$$

Câu 56. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+3\sqrt{n^2+1}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n^2+n}+3\sqrt{n^2+1}}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+3\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1}+3\sqrt{1}}{1} = 4$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3+n+2n+1}}{3n+1}$$

Câu 57. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3+n+2n+1}}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^2}+2+\frac{1}{n}}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt[3]{8+2}}{3} = \frac{4}{3}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^2+1}+2n^2+3}{3n^2+n+1}$$

Câu 58. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^2+1}+2n^2+3}{3n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n\sqrt{n^2+1}+2n^2+3}{n^2}}{\frac{3n^2+n+1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+2+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{1}+2}{3} = 1$$
$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n}$$

Câu 59. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1 \right) = \sqrt{1+2 \cdot 0} - 1 = 0$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}{n}$$

Câu 60. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+2n)-(n^2+n)}{n(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n})}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{0}{\sqrt{1+2 \cdot 0}+\sqrt{1+0}} = 0$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2}+4 \cdot 6^{n-1}+2}{3^{n+1}+6^{n-1}+1}$$

Câu 61. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim \frac{2^{n+2} + 4 \cdot 6^{n-1} + 2}{3^{n+1} + 6^{n-1} + 1} = \lim \frac{4 \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^n} = \frac{4 \cdot 0 + \frac{2}{3} + 2 \cdot 0}{3 \cdot 0 + \frac{1}{6} + 0} = 4$$

$$\lim (n+1 - \sqrt{n^2 + n})$$

Câu 62. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim (n+1 - \sqrt{n^2 + n}) = \lim \frac{(n+1)^2 - n^2 - n}{n+1 + \sqrt{n^2 + n}} = \lim \frac{n+1}{n+1 + \sqrt{n(n+1)}} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

Do đó, $\lim (n+1 - \sqrt{n^2 + n}) = \frac{1}{2}$.

$$\lim \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n}$$

Câu 63. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n} = \lim \frac{n^2 + n - n^2}{4n^2 + 3n - 4n^2} \cdot \frac{\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{3} \lim \frac{\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{2}{3}$$

Do đó, $\lim \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n} = \frac{2}{3}$.

$$\lim (\sqrt{4n^2 + n} - \sqrt[3]{2n^2 - 8n^3})$$

Câu 64. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim (\sqrt{4n^2 + n} - \sqrt[3]{2n^2 - 8n^3}) &= \lim (\sqrt{4n^2 + n} + 2n) - \lim (\sqrt[3]{2n^2 - 8n^3} + 2n) \\ &= \lim \frac{4n^2 + n - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + n} - 2n} + \lim \frac{2n^2 - 8n^3 + 8n^3}{(2n^2 - 8n^3)^{\frac{2}{3}} + 4n^2 - 2n\sqrt[3]{2n^2 - 8n^3}} \\ &= \lim \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} - 2n} + \lim \frac{2n^2}{\sqrt[3]{(2n^2 - 8n^3)^2} + 4n^2 - 2n\sqrt[3]{8n^3\left(\frac{1}{4n} - 1\right)}} \\ &= \frac{1}{\lim \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2\right)} + \frac{1}{\lim \left[2 \cdot \left(\frac{1}{4n} - 1\right)^{\frac{2}{3}} + 2 - 2\left(\frac{1}{4n} - 1\right)^{\frac{1}{3}}\right]} \end{aligned}$$

$$\text{Khi } n \rightarrow \infty \text{ thì: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right) = 2 - 2 = 0 \\ \lim \left[2 \cdot \left(\frac{1}{4n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 2 - 2 \left(\frac{1}{4n} - 1 \right)^{\frac{1}{3}} \right] = -2 + 2 + 2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lim \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right)} + \frac{1}{\lim \left[2 \cdot \left(\frac{1}{4n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 2 - 2 \left(\frac{1}{4n} - 1 \right)^{\frac{1}{3}} \right]} = +\infty$$

$$\text{Do đó, } \lim \left(\sqrt{4n^2 + n} - \sqrt[3]{2n^2 - 8n^3} \right) = +\infty$$

$$\lim \frac{\sqrt[3]{2n^2 - n^3} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n}$$

Câu 65. Tính giới hạn sau:

Lời giải

Lời giải

$$\lim \frac{\sqrt[3]{2n^2 - n^3} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n} = \lim \frac{2n^2 - n^3 + n^3}{n^2 + n - n^2} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt[3]{(2n^2 - n^3)^2 + n^2 - n^3} \sqrt{2n^2 - n^3}}$$

$$= \lim \frac{\sqrt{n \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n}}{\sqrt[3]{n^6 \cdot \left(\frac{2}{n} - 1 \right)^2 + n^2 - n} \sqrt[3]{n^3 \left(\frac{2}{n} - 1 \right)}} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\left(\frac{2}{n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{n} - 1}}$$

$$\text{Khi } n \rightarrow \infty \text{ thì: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim \left(\left(\frac{2}{n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{n} - 1} \right) = -1 + 1 + 1 = 1 \\ \lim \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)}{\left(\frac{2}{n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{n} - 1}} = 1. \Rightarrow \lim \frac{\sqrt[3]{2n^2 - n^3} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n} = 1$$

Câu 66. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số.

(a) 0,3211111...

(b) 0,313131...

(c) 3,1525252...

Lời giải

Lời giải

a) Ta có $\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10}$ nên

$$\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \dots = \frac{\frac{1}{10^3}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{900} \text{ suy ra } 0,321111\dots = \frac{32}{100} + \frac{1}{900} = \frac{289}{900}$$

b) Ta có $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10^2}$ nên

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots = \frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1}{99}$$

Suy ra $0,313131\dots = 31 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots \right) = 31 \cdot \frac{1}{99} = \frac{31}{99}$.

c) Ta có $\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10^2}$ nên

$$\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + \dots = \frac{\frac{1}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1}{990} \text{ suy ra}$$

$$3,1525252\dots = \frac{31}{10} + 52 \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + \dots \right) = \frac{31}{10} + \frac{52}{990} = \frac{3121}{990}$$

---HẾT---