**QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU**

**I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

**1. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên**

***Định lý 1.*** Trong các đường vuông góc và đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên.

 $AH⊥a⇒AH<AC,AH<AD$

**2. Quan hệ giữa các đường xiên và các hình chiếu của chúng**

***Định lý 2.*** Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

a) Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

 $AH⊥a,HD>HC⇒AD>AC.$

b) Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.

 $AH⊥a,AD>AC⇒HD>HC.$

c) Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau; nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xien bằng nhau. $AB=AC⇔HB=HC.$

**II. BÀI TẬP**

**Bài 1:** Cho tam giác ABC cân tại A, kẻ $AH⊥BC\left(H\in BC\right).$ Trên các đoạn thẳng HD và HC, lấy các điểm D và E sao cho $BD=CE.$ So sánh các độ dài AD, AE bằng cách xét hai hình chiếu.

**Bài 2:** Cho tam giác $ABC$ cân tại A. Trên cạnh Bc lấy các điểm D và E sao cho $BD=DE=EC.$ Gọi M là trung điểm của DE.

a. Chứng minh $AM⊥BC$ b. So sánh các độ dài 

**Bài 3:**  Cho $ΔABC$ có $\hat{B}<\hat{C}$ , D nằm giữa A,C ( BD không vuông góc với AC). Gọi E, F là chân các đường vuông góc kẻ từ A, C đến đường thẳng BD. So sánh $AE+CF$ với AB và AC.

**Bài 4:**  Cho tam giác $ABC$ cân tại $A.$ Gọi $H$ là chân đường vuông góc kẻ từ $A$ đến $BC,$ điểm $D$ thuộc cạnh $BC$ $(D$ khác $H).$ Chứng minh rằng $AH<AD<AB.$

**Bài 5:**  Cho tam giác $ABC$ không vuông. Kẻ $BD$ vuông góc với $AC$ tại $D,$ kẻ $CE$ vuông góc với $AB$ tại $E.$ Chứng minh rằng $BD+CE<AB+AC.$

**Bài 6:**  Cho $ΔABC$ vuông tại A, M là trung điểm BA. Vẽ $AI⊥MC$ tại I, $BK⊥MC$ tại K. Chứng minh:

1. $AB+AC>3BK$ b. $AC<\frac{CI+CK}{2}<BC$

**Bài 7:**  Cho $ΔMNP$ có $\hat{M}=90°$ , I là điểm nằm giữa N, P.

a) Chứng minh MI bé hơn ít nhất một trong 2 cạnh góc vuông.

b) Vẽ $MH⊥NP$ tại H . Trên cạn NP lấy điểm E sao cho $NE=NM$ , trên cạnh MP lấy điểm F sao cho $MF=MH$ . Chứng minh $ΔMHE=MFE$

c) Chứng minh rằng trong một tam giác vuông tổng độ dài hai cạnh góc vuông nhỏ hơn tổng độ dài cạnh huyền và chiều cao tương ứng.

**HDG**

**Bài 1:** Đường xiên $AB=AC$ nên hình chiếu $HB=HC.$

Ta lại có $BD=CE$ nên $HD=HE.$ Hình chiếu $HD=HE$ nên đường xiên $AD=AE.$

**Bài 2:** a) $ΔAMB=ΔAMC\left(c.c.c\right)$ $⇒\hat{AMB}=\hat{AMC}$.

Ta lại có $\hat{AMB}+\hat{AMC}=180^{0}$ suy ra $\hat{AMB}=90^{0}.$

Vậy $AM⊥BC.$

b) Hình chiếu $MD = ME$ nên đường xiên$AD = AE$. Hình chiếu $MD < MB$ nên đường xiên$AD < AB$. Ta có $AD = AE < AB = AC$

**Bài 3:** Vì $ΔEDA$ vuông tai E nên $AD>AE$ $\left(1\right)$

Vì $ΔCFD$ vuông tại F nên $CD>CF$ $\left(2\right)$

Cộng theo vế $\left(1\right)$và $\left(2\right)$ta được

$AD+CD>AE+CF$ hay $AC>AE+CF$ $\left(3\right)$

****Mặt khác $ΔABC;\hat{B}<\hat{C}⇒AC<AB$ $\left(4\right)$

Từ $\left(3\right)$và $\left(4\right)$ suy ra $AB>AC>AE+CF$.

**Bài 4:**  Ta có $AH<AD$ (quan hệ đường vuông góc, đường xiên).

Nếu $D$ thuộc đoạn $HC⇒HD<HC,$ do đó $AD<AC=AB.$

Nếu $D$ thuộc đoạn $HB⇒HD<HB⇒AD<AB.$

Bởi vậy $AH<AD<AB.$

**Bài 5:**

 vuông tại D nên $BD<AB$

 vuông tại E $,CE<AC.$

Do đó $BD+CE<AB+AC.$

**Bài 6:**

a) Chứng minh được $ΔKMB=ΔIMA$ (cạnh huyền – góc nhọn) $⇒AI=KB;​IM=MK$

$ΔKMB$ vuông tại K $⇒BK<BM$ $\left(1\right)$

$ΔAIM$ vuông tại I $⇒AI<AM$ $\left(2\right)$

Cộng theo vế của $\left(1\right)$và $\left(2\right)$được $AI+BK<BM+AM$

$⇒AI+BK<AB⇒2BK<AB$ $\left(3\right)$

Vì $ΔIAC$ vuông tại I nên $AI<AC⇒BK<AC$ $\left(4\right)$

Cộng theo vế cuả $\left(3\right)$và $\left(4\right)$được $AB+AC>3BK$

b) $ΔAMC$ vuông tại M có $AC<CM=CI+IM=CI+\frac{IK}{2}=\frac{CI+(CI+IK)}{2}=\frac{CI+CK}{2}$ $\left(5\right)$

 $ΔAIC;ΔABC$ lần lượt vuông tại I, A $⇒\left\{\begin{array}{c}\&IC<AC\\\&AC<BC\end{array}\right.⇒IC<BC$ $\left(6\right)$

Mặt khác $ΔBKC$ vuông tại K nên $CK<BC$ $\left(7\right)$

Cộng theo vế của $\left(6\right)$và $\left(7\right)$được $\frac{CI+CK}{2}<BC$ $\left(8\right)$

Từ $\left(5\right)$và $\left(8\right)$suy ra $AC<\frac{CI+CK}{2}<BC$ (đpcm).

**Bài 7:**

a) Giải sử I thuộc NH khi đó $\hat{MIH}<90°⇒MIN>90°$

$ΔMIN$ có $MIN>90°$ suy ra $MN>MI$

Tương tự nếu I thuộc NP suy ra $MP>MI$.

Vậy MI bé hơn ít nhất một trong 2 cạnh góc vuông.

b) Ta có $\hat{HMF}=\hat{MNH}$ (cùng phụ $\hat{NMH}$)

$ΔMNE$ cân tại N. $ΔMHF$ cân tại M lại có $\hat{HMF}=\hat{MNH}$

Suy ra các góc ở đáy bằng nhau: $⇒\hat{MEH}=\hat{MHF}$

Có $\hat{MHF}+\hat{FHE}=90°⇔\hat{MEH}+\hat{FHE}=90°$

Gọi S là giao điểm của ME và HF, $ΔHSE$ có $\hat{SEH}+\hat{SHE}=90°$suy ra $\hat{HSE}=90°$ hay $ME⊥HF$ tại S

$ΔHMS=ΔFMS$ ( cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Suy ra $HS=SF$

$ΔHSE=ΔFSE$ (cạnh – góc – cạnh). Suy ra $HE=FE$

$ΔMHE=ΔMFE$ (cạnh – cạnh – cạnh)

c) Ta cần chứng minh$AB+AC<BC+AH$ . Đặt $BC=a;AB=c;AC=b;AH=h$

Giải sử $b+c<a+h$

Bình phương 2 vế ta có

$$\left(b+c\right)^{2}<\left(a+h\right)^{2}$$

$⇒b^{2}+c^{2}+2bc<a^{2}+h^{2}+2ah$

$⇒\left(b^{2}+c^{2}\right)-a^{2}+2bc-2ah<h^{2}$

(pitago và $2bc=2ah=S\_{ΔABC}$)

$⇒0<h^{2}$ **(**luôn đúng**)**

Vậy$b+c<a+h$ là đúng hay … (đpcm)