|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **HÀ NỘI**  **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP THÀNH PHỐ**  **Năm học 2021-2022**  **Môn : TOÁN**  **Ngày thi :** 24 tháng 3 năm 2022  Thời gian làm bài : 150 phút |

**Bài I. (5,0 điểm)**

1. Giải phương trình : 
2. Cho là các số thực khác 0, thỏa mãn và . Tính giá trị của biểu thức 

**Bài II. (5,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các số tự nhiênthỏa mãn 
2. Tìm tất cả số nguyên tố để phương trình có nghiệm nguyên dương

**Bài III. (2,0 điểm)** Với các số thực thỏa mãn và tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài IV. (6,0 điểm)** Cho tam giác nhọn , nội tiếp đường tròn . Các đường cao của tam giác đồng quy tại trực tâm H. Gọi lần lượt là giao điểm của đường thẳng với hai đường thẳng 

1. Chứng minh 
2. Gọi là trung điểm của Chứng minh 
3. Gọi lần lượt là trung điểm của . Chứng minh vuông góc với 

**Bài V. (2,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các số nguyên sao cho số là lập phương của một số nguyên tố
2. Trên bảng ta viết số tự nhiên gồm chữ số 2. Mỗi bước ta chọn chữ số liên tiếp nào đó có chữ số ngoài cùng bên trái bằng 2, rồi biến đổi các chữ số được chọn theo quy tắc: chữ số 2 đổi thành chữ số 0 còn chữ số 0 đổi thành chữ số 2
3. Chứng minh mọi cách thực hiện đều phải dừng lại sau một số bước hữu hạn bước
4. Giả sử sau khi thực hiện được bước thì không thể thực hiện được thêm bước nào nữa. Chứng minh là số lẻ

**ĐÁP ÁN**

**Bài I. (5,0 điểm)**

1. **Giải phương trình : **

ĐKXĐ: . Phương trình đã cho đưa về



1. **Cho là các số thực khác 0, thỏa mãn và . Tính giá trị của biểu thức **

Từ giả thiết suy ra 

Th1: 

Do đó 

Th2: 

Suy ra 

**Bài II. (5,0 điểm)**

1. **Tìm tất cả các số tự nhiênthỏa mãn **

Giả sử là hai số tự nhiên thỏa mãn 

(loại) vì không phải là một số chính phương



Th3: . Khi đó 

Dẫn tới 

Điều này vô lý vì không chia hết cho 9

Vậy 

1. **Tìm tất cả số nguyên tố để phương trình có nghiệm nguyên dương**

Biến đổi được 

Nhận xét là số nguyên tố , còn nên dẫn tới



Vậy số nguyên tố cần tìm là 

**Bài III. (2,0 điểm) Với các số thực thỏa mãn và tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức **

**Tìm giá trị lớn nhất**

Ta có :



**Tìm giá trị nhỏ nhất**

Không mất tính tổng quát, giả sử 

Vì nên 

Chứng minh tương tự :

Từ đó 



Nên ta có : 

Vậy 

**Bài IV. (6,0 điểm) Cho tam giác nhọn , nội tiếp đường tròn . Các đường cao của tam giác đồng quy tại trực tâm H. Gọi lần lượt là giao điểm của đường thẳng với hai đường thẳng **

****

1. **Chứng minh **

Dễ chứng minh 

Kẻ đường kính của (O). Dễ chứng minh tứ giác là hình bình hành nên . Ta có 

Suy ra 

Điều này chứng tỏ 

1. **Gọi là trung điểm của Chứng minh **

Xét tam giác vuông tại E có nên tam giác cân tại I

Suy ra . Tương tự 



Từ là đường trung trực của dẫn đến 

N là giao điểm của 

Mặt khác 

Suy ra 

1. **Gọi lần lượt là trung điểm của . Chứng minh vuông góc với **

Gọi S là điểm đối xứng với F qua Q, gọi T là điểm đối xứng với C qua D

Chứng minh được , dẫn tới 

Mặt khác , theo tính chất đường trung bình

và 

Chứng minh tương tự ta có suy ra là đường trung trực của 

**Bài V. (2,0 điểm)**

1. **Tìm tất cả các số nguyên sao cho số là lập phương của một số nguyên tố**

Giả sử là hai số nguyên dương thỏa mãn với p là số nguyên tố. Rõ ràng vì nếu thì vô lý do là số nguyên tố

Không mất tổng quát, giả sử 

Với chú ý Ư

Vì 

Ta có Do đó còn 2 trường hợp 

Th1: 

Th2: . Rõ ràng (Vô lý vì 

Kết luận 

1. **Trên bảng ta viết số tự nhiên gồm chữ số 2. Mỗi bước ta chọn chữ số liên tiếp nào đó có chữ số ngoài cùng bên trái bằng 2, rồi biến đổi các chữ số được chọn theo quy tắc: chữ số 2 đổi thành chữ số 0 còn chữ số 0 đổi thành chữ số 2**
2. **Chứng minh mọi cách thực hiện đều phải dừng lại sau một số bước hữu hạn bước**

Sau mỗi bước, số thu được giảm đi một số nguyên dương đơn vị. Mặt khác số thu được là số không âm. Vì vậy quá trình phải dừng lại sau hữu hạn bước.

1. **Giả sử sau khi thực hiện được bước thì không thể thực hiện được thêm bước nào nữa. Chứng minh là số lẻ**

Đếm từ phải sang trái, ta đánh dấu các chữ số có thứ tự là bội của 22. Như vậy có 91 chữ số được đánh dấu ở các vị trí 22, 44, 66, ..., 2002 tính từ phải sang trái. Gọi S là số chữ số 2 trong các chữ số được đánh dấu. Ban đầu S = 91, là số lẻ.

Trong 22 chữ số liên tiếp luôn có đúng một chữ số được đánh dấu, do đó mỗi bước S tăng 1 hoặc giảm 1, tức là mỗi bước S thay đổi tính chẵn lẻ. Cụ thể là, sau số lẻ bước thay thì S chuyển từ lẻ thành chẵn; sau số chẵn bước thay thì S chuyển từ chẵn thành lẻ.

Nếu S > 0, tồn tại ít nhất một dãy 22 chữ số liên tiếp có chữ số ngoài cùng bên trái là 2, tức là ta còn có thể thực hiện được ít nhất một bước nữa. Do đó để ta không thể thực hiện được bước nào nữa thì S = 0. Từ đó số bước đã thực hiện đến lúc dừng lại phải lẻ, hay n lẻ.