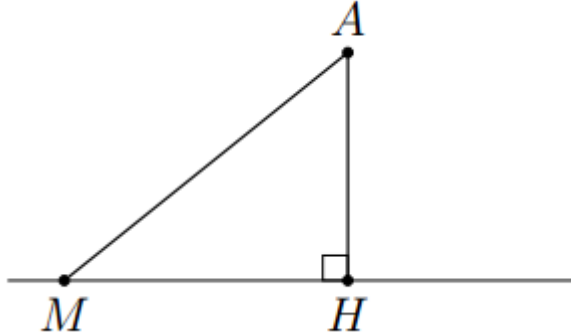


PHƯƠNG PHÁP

1. Một số bất đẳng thức cơ bản

Kết quả 1. Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn thì lớn hơn

Kết quả 2. Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất. Như trong hình vẽ ta luôn có $AM \geq AH$



Kết quả 3. Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có bất đẳng thức $AB + BC \geq AC$.

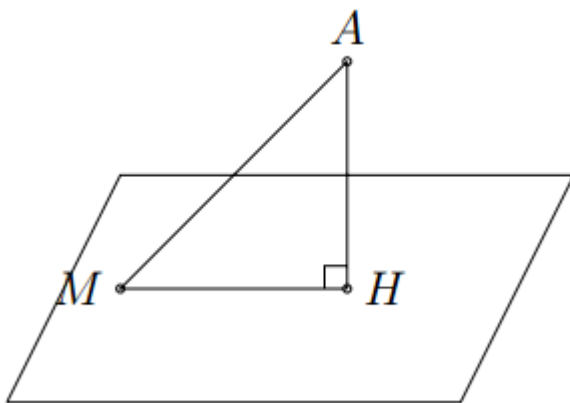
Tổng quát hơn ta có bất đẳng thức của đường gấp khúc: Với n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta luôn có $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$

Kết quả 4. Với hai số không âm x, y ta luôn có $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Kết quả 5. Với hai véc tơ a, b ta luôn có $|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|$. Đẳng thức xảy ra khi $a = kb, k \in \mathbb{R}$

2. Một số bài toán thường gặp

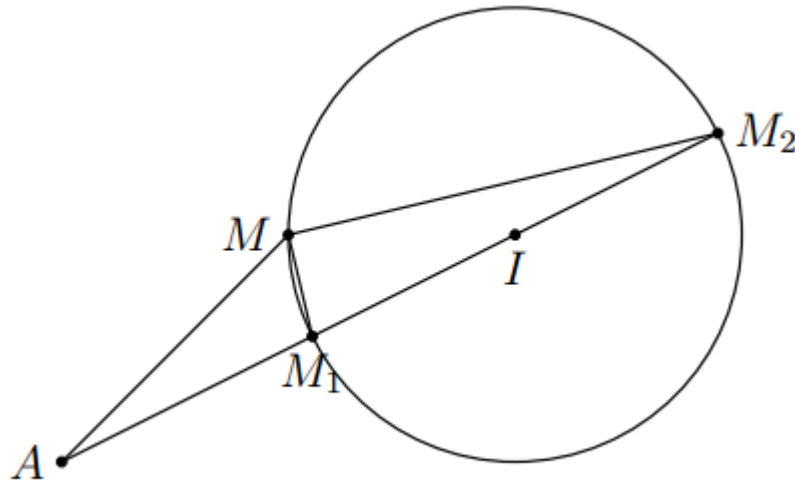
Bài toán 1. Cho điểm A cố định và điểm M di động trên hình (H) ((H) là đường thẳng, mặt phẳng). Tìm giá trị nhỏ nhất của AM



Lời giải: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên hình (H) . Khi đó, trong tam giác AHM vuông tại M ta có $AM \geq AH$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$. Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A lên (H)

Bài toán 2. Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R , M là điểm di động trên (S) . Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM .



Lời giải. Xét A nằm ngoài mặt cầu (S) . Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu (S) ($AM_1 < AM_2$) và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI . Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C) . Ta có $\angle M_1MM_2 = 90^\circ$, nên $\angle AMM_2$ và $\angle AM_1M$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có

$$AI - R = AM_1 \leq AM \leq AM_2 = AI + R$$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có

$$R - AI \leq AM \leq R + AI$$

Vậy $\min AM = |AI - R|, \max AM = R + AI$

Bài toán 3. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Lời giải.

1. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm về hai phía so với (P) . Khi đó

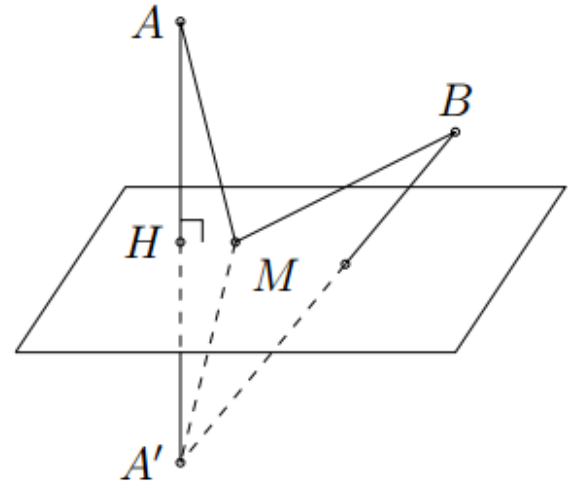
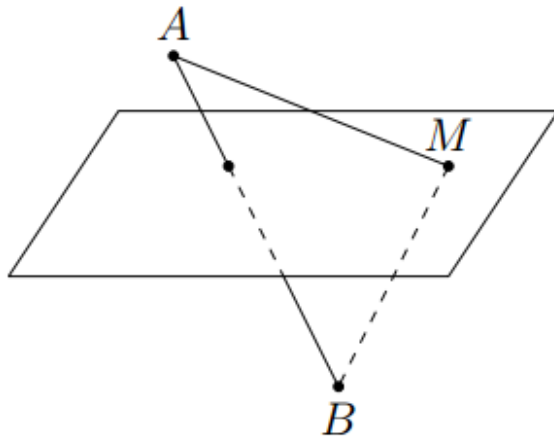
$$AM + BM \geq AB$$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P) .

- **TH 2:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P) . Gọi A' đối xứng với A qua (P) . Khi đó

$$AM + BM = A'M + BM \geq A'B$$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .



2. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P) . Khi đó

$$|AM - BM| \leq AB$$

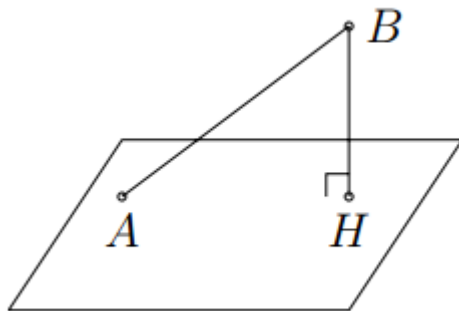
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P) .

- **TH 2:** Nếu A và B nằm khác phía so với (P) . Gọi A' đối xứng với A qua (P) , Khi đó

$$|AM - BM| = |A'M - BM| \leq A'B$$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .

Bài toán 4. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P) , khi đó

$$d(B, (P)) = BH \leq BA$$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bài toán 5. Cho các số thực dương α, β và ba điểm A, B, C . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua C và $T = \alpha d(A, (P)) + \beta d(B, (P))$ nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Xét A, B nằm về cùng phía so với (P) .

- Nếu $AB \parallel (P)$ thì

$$P = (\alpha + \beta)d(A, (P)) \leq (\alpha + \beta)AC$$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I . Gọi D là điểm thỏa mãn $\frac{IB}{ID} = \frac{\alpha}{\beta}$ và E là trung điểm BD . Khi đó

$$P = \alpha d(A, (P)) + \beta \cdot \frac{IB}{ID} d(D, (P)) = 2\alpha d(E, (P)) \leq 2(\alpha + \beta)EC$$

2. Xét A, B nằm về hai phía so với (P) . Gọi I là giao điểm của AB và (P) , B' là điểm đối xứng với B qua I . Khi đó

$$P = \alpha d(A, (P)) + \beta d(B', (P))$$

Đến đây ta chuyển về trường hợp trên.

So sánh các kết quả ở trên ta chọn kết quả lớn nhất.

Bài toán 6. Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và điểm A . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i (i = \overline{1, n})$ lớn nhất.

Lời giải.

- Xét n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ nằm cùng phía so với (P) . Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho. Khi đó

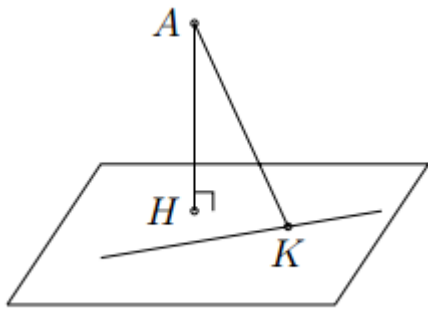
$$\sum_{i=1}^n d(A_i, (P)) = nd(G, (P)) \leq nGA$$

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác ($m + k = n$). Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A . Khi đó

$$P = md(G_3, (P)) + kd(G_2, (P))$$

Đến đây ta chuyển về bài toán trên.

Bài toán 7. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất



Lời giải. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ . Khi đó $d(A, (P)) = AH \leq AK$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK .

Bài toán 8. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$. Xét véc tơ

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{MA_1} + \alpha_2 \vec{MA_2} + \dots + \alpha_n \vec{MA_n}$$

Trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$. Tìm điểm

M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\vec{w}|$ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$$\alpha_1 \vec{GA_1} + \alpha_2 \vec{GA_2} + \dots + \alpha_n \vec{GA_n} = \vec{0}$$

(điểm G hoàn toàn xác định).

Ta có $\vec{MA_k} = \vec{MG} + \vec{GA_k}$ với $k = 1, 2, \dots, n$, nên

$$\vec{w} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \vec{MG} + \alpha_1 \vec{GA_1} + \alpha_2 \vec{GA_2} + \dots + \alpha_n \vec{GA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \vec{MG}$$

Do đó

$$|\vec{w}| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| \cdot |\vec{MG}|$$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $|\vec{w}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $|\vec{MG}|$ nhỏ nhất, mà $M \in (P)$ nên điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P) .

Bài toán 9. Trong không gian Oxy , cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$. Xét biểu thức:

$$T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$$

Trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các số thực cho trước. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho

1. T giá trị nhỏ nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$.

2. T có giá trị lớn nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$$\alpha_1 \vec{GA_1} + \alpha_2 \vec{GA_2} + \dots + \alpha_n \vec{GA_n} = \vec{0}$$

Ta có $\overline{MA_k} = \overline{MG} + \overline{GA_k}$ với $k = 1; 2; \dots; n$, nên

$$MA_k^2 = (\overline{MG} + \overline{GA_k})^2 = MG^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GA_k} + GA_k^2$$

Do đó

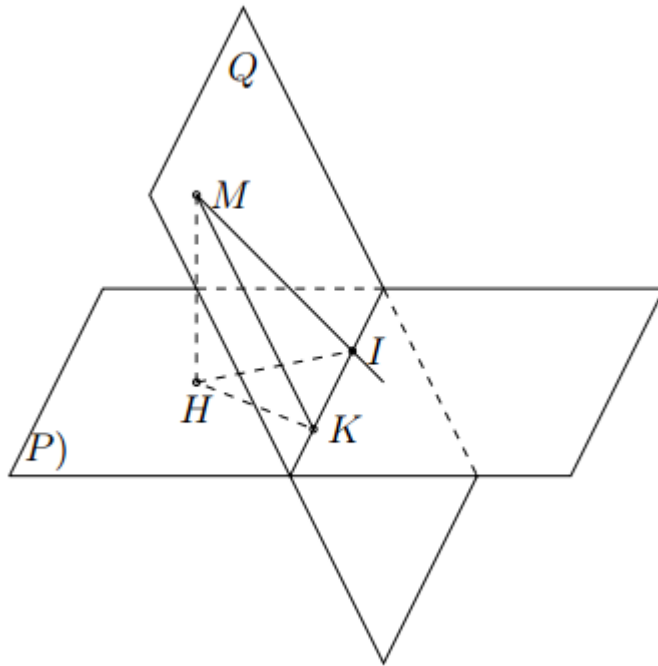
$$T = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)MG^2 + \alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + \dots + \alpha_n GA_n^2$$

Vì $\alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + \dots + \alpha_n GA_n^2$ không đổi nên

- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.
- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.

Mà $M \in (P)$ nên MG nhỏ nhất khi điểm M là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P) .

Bài toán 10. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Viết phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.



Lời giải. Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và lấy điểm $M \in d, M \neq I$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên (P) và giao tuyến Δ của (P) và (Q) .

Đặt ϕ là góc giữa (P) và (Q) , ta có $\phi = \angle MKH$, do đó

$$\tan \phi = \frac{HM}{HK} \geq \frac{HM}{HI}$$

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI) , nên (Q) đi qua M và nhận $(n_P \wedge u_d)^\wedge u_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

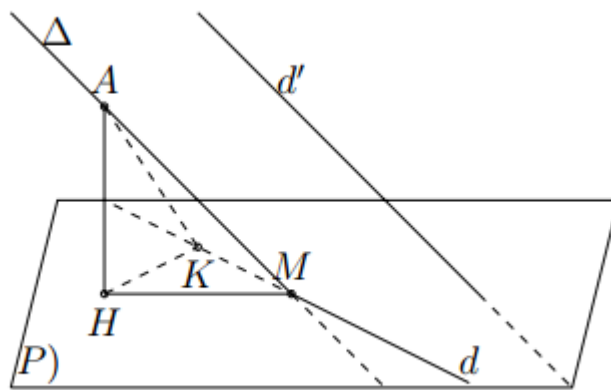
- Gọi $\vec{n} = (a; b; c), a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là một VTPT của mặt phẳng (Q) . Khi đó $\vec{n} \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và (Q) , ta có

$$\cos \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{n}| |\vec{n}_P|} = f(t)$$

với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Bài toán 11. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.



Lời giải. Trên đường thẳng d , lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d' . Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P) .

Trên đường thẳng Δ , lấy điểm A . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d , ϕ là góc giữa Δ và (P) .

Khi đó $\phi = \angle AMH$ và $\cos \phi = \frac{HM}{AM} \geq \frac{KM}{AM}$

Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK) . Do đó (P) đi qua M và nhận $(\vec{u}_d \wedge \vec{u}_d') \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Gọi $\vec{n} = (a; b; c), a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là một VTPT của mặt phẳng (P) . Khi đó $\vec{n} \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và d' , ta có

$$\sin \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{n}| |\vec{u}_{d'}|} = f(t)$$

với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$