

Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0 ĐẾN 180. ĐỊNH LÝ COSIN, SIN TRONG TAM GIÁC

|FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

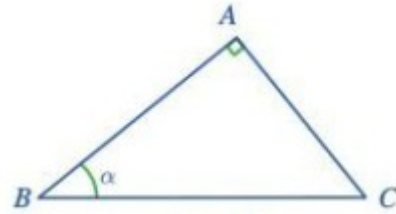
I. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° .

Cho tam giác ABC vuông tại A có góc $\widehat{ABC} = \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC}, \cos \alpha = \frac{AB}{BC}, \tan \alpha = \frac{AC}{AB}, \cot \alpha = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha, \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$



- sin của góc α , kí hiệu là $\sin \alpha$, được xác định bởi: $\sin \alpha = y_0$;

- cosin của góc α , kí hiệu là $\cos \alpha$, được xác định bởi: $\cos \alpha = x_0$;

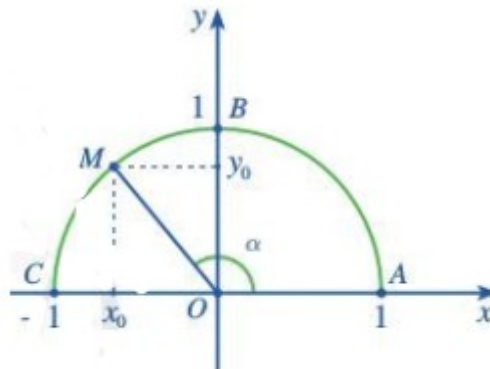
- tang của góc α , kí hiệu là $\tan \alpha$, được xác định bởi: $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0} (x_0 \neq 0)$;

- cotang của góc α , kí hiệu là $\cot \alpha$, được xác định bởi: $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0} (y_0 \neq 0)$.

Các số $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc α .

Ví dụ 1. Tính các giá trị lượng giác của các góc: $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$.

Giải.



Với $\alpha = 0^\circ$; khi đó, M trùng với $A(1;0)$. Do đó $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\tan 0^\circ, \cot 0^\circ$ không xác định.

Với $\alpha = 90^\circ$; khi đó, M trùng với $B(0;1)$. Do đó $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cot 90^\circ = 0$, $\tan 0^\circ$ không xác định.

Với $\alpha = 180^\circ$; khi đó, M trùng với $C(-1;0)$. Do đó $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\tan 180^\circ = 0$, $\cot 180^\circ$ không xác định.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ); \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$$

Chú ý.

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

Với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ thì:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ)$$

Ví dụ 2. Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức sau:

$$T = \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos 55^\circ + \cos 165^\circ - \cos 180^\circ.$$

Giải

$$T = \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos(90^\circ - 35^\circ) + \cos(180^\circ - 15^\circ) + 1$$

$$= \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \sin 35^\circ - \cos 15^\circ + 1 = 1$$

Ví dụ 3. Viết giá trị lượng giác của góc 120° .

Giải

Ta có: $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$$\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}; \quad \cot 120^\circ = -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tương tự ta có bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt:

GTLG α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\parallel$

II. Định lý côsin

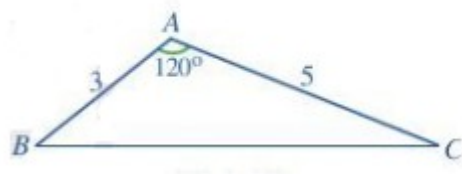
Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$, khi đó

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 5$ và $\angle A = 120^\circ$



a) Tính $\cos A$;

b) Tính độ dài cạnh BC .

Giải

a) Ta có: $\cos A = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

b) Áp dụng định lý côsin trong tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Thay số ta có:

$$BC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49.$$

Do đó $BC = \sqrt{49} = 7$.

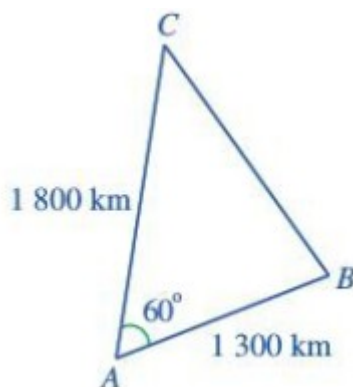
Ví dụ 5. Hai máy bay cùng xuất phát từ một sân bay A và bay theo hai hướng khác nhau, tạo với nhau góc 60° . Máy bay thứ nhất bay với vận tốc 650 km/h , máy bay thứ hai bay với vận tốc 900 km/h . Sau 2 giờ, hai máy bay cách nhau bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết rằng cả hai máy bay bay theo đường thẳng và sau 2 giờ bay đều chưa hạ cánh.

Giải

Giả sử sau 2 giờ, máy bay thứ nhất đến vị trí B , máy bay thứ hai đến vị trí C . Ta có:

$$AB = 2 \cdot 650 = 1300 (\text{km}), AC = 2 \cdot 900 = 1800 (\text{km}),$$

$$\angle BAC = 60^\circ$$



Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC , ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC \\ &= 1300^2 + 1800^2 - 2 \cdot 1300 \cdot 1800 \cdot \cos 60^\circ = 2590000. \end{aligned}$$

Do đó $BC \approx 1609,35 (\text{km})$.

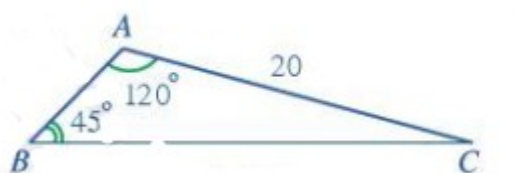
Vậy sau 2 giờ hai máy bay cách nhau khoảng 1609,35 km.

III. Định lí sin

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R . Khi đó:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \quad a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C.$$

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $\angle A = 120^\circ, \angle B = 45^\circ$ và $CA = 20$. Tính:



a) $\sin A$;

b) Độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Giải

$$\sin A = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a) Ta có:

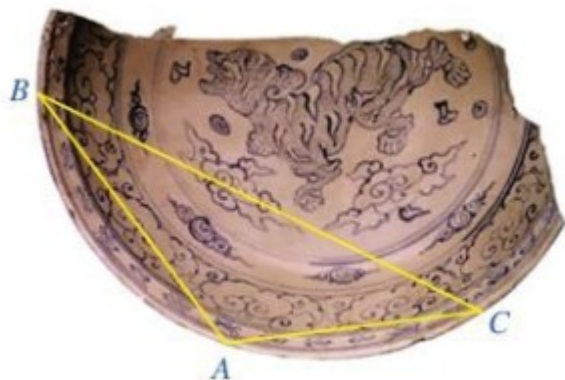
$$\text{b) Áp dụng định lí sin trong tam giác } ABC, \text{ ta có: } \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = 2R.$$

$$\text{Do đó } BC = \frac{CA \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{20 \cdot \sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = 10\sqrt{6};$$

$$R = \frac{CA}{2 \cdot \sin B} = \frac{20}{2 \cdot \sin 45^\circ} = 10\sqrt{2}$$

Ví dụ 7. Các nhà khảo cổ học tìm được một mảnh chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ. Để xác định đường kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy ba điểm trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau:

$$BC \approx 28,5 \text{ cm}; \angle BAC \approx 120^\circ$$



Tính đường kính của chiếc đĩa theo đơn vị xăng-ti-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Giải

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có:

$$2R = \frac{BC}{\sin A} \approx \frac{28,5}{\sin 120^\circ} \approx 33(\text{cm}).$$

Vậy đường kính của chiếc đĩa khoảng 33cm .

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° .

Câu 1. Tìm góc α , $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ trong mỗi trường hợp sau

- $\sin \alpha = \frac{1}{2}$
- $\cos \alpha = 0$
- $\tan \alpha = -\sqrt{3}$

Lời giải.

- $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ khi $\alpha = 30^\circ$ hay $\alpha = 150^\circ$
- $\cos \alpha = 0$ khi $\alpha = 90^\circ$
- $\tan \alpha = -\sqrt{3}$ khi $\alpha = 120^\circ$

Câu 2. Cho góc $\alpha = 135^\circ$. Hãy tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$

Lời giải.

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 135^\circ = -\cos(180^\circ - 135^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = -1 \quad \text{và} \quad \cot 135^\circ = \frac{1}{\tan 135^\circ} = -1$$

Câu 3. Tính giá trị lượng giác của các góc sau đây

- 120°
- 150°
- 180°

Lời giải.

Sử dụng 2 góc bù nhau: 120° và 60° , 150° và 30° ta có:

$$a) \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}; \tan 120^\circ = -\sqrt{3}; \cot 120^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$b) \sin 150^\circ = \frac{1}{2}; \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \cot 150^\circ = -\sqrt{3}.$$

c) Điểm cuối M của góc $180^\circ = \angle xOM$ có tọa độ $M(-1; 0)$ nên $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\tan 180^\circ = 0$, $\cot 180^\circ$ không xác định.

Câu 4. Tính theo hàm số lượng giác của các góc bé hơn 90° :
 $\sin 100^\circ$, $\sin 160^\circ$, $\cos 170^\circ$, $\tan 103^\circ 45'$, $\cot 124^\circ 15'$.

Lời giải.

$$\sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 100^\circ) = \sin 80^\circ;$$

$$\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 160^\circ) = \sin 20^\circ;$$

$$\tan 103^\circ 45' = -\tan(180^\circ - 103^\circ 45') = -\tan 76^\circ 15'$$

$$\cot 124^\circ 15' = -\cot(180^\circ - 124^\circ 15') = -\cot 55^\circ 45'$$

Câu 5. Tìm giá trị của biểu thức

$$a) A = 2 \sin 30^\circ + 3 \cos 45^\circ - \sin 60^\circ$$

$$b) B = 3 \cos 30^\circ + 3 \sin 45^\circ - \cos 60^\circ$$

Lời giải.

$$a) \text{ Ta có } A = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}.$$

$$b) \text{ Ta có } B = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Câu 6. Tính giá trị của biểu thức

$$a) a \sin 0^\circ + b \cos 0^\circ + c \sin 90^\circ.$$

$$b) a \cos 90^\circ + b \sin 90^\circ + c \sin 180^\circ.$$

$$c) a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ.$$

Lời giải.

$$a) \text{ Ta có } a \sin 0^\circ + b \cos 0^\circ + c \sin 90^\circ = b + c.$$

$$b) \text{ Ta có } a \cos 90^\circ + b \sin 90^\circ + c \sin 180^\circ = b.$$

$$c) \text{ Ta có } a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ = a^2 - c^2.$$

Câu 7. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$$

$$b) B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$$

$$c) C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$$

Lời giải

$$a) A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } B &= 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ = 3 - (1)^2 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \\
 \text{c) } C &= \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ \\
 C &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4
 \end{aligned}$$

Câu 8. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$
 b) $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$
 c) $C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

Lời giải

- a) $A = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ)$
 $= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 1 + 1 = 2$
 b) $B = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$
 $= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) = 0$
 c) $C = (\tan 5^\circ \tan 85^\circ)(\tan 15^\circ \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ)$
 $= (\tan 5^\circ \cot 5^\circ)(\tan 15^\circ \cot 15^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 45^\circ) = 1$

Câu 9. Tính giá trị của biểu thức

- a) $\sin x + \cos x$ khi x bằng $0^\circ, 135^\circ, 120^\circ$.
 b) $2 \sin x + \cos 2x$ khi x bằng $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$.
 c) $\sin^2 x + \cos^2 x$ khi x bằng $30^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 145^\circ, 180^\circ$

Lời giải.

- a) Khi $x = 0^\circ$ thì $\sin x + \cos x = 1$.

Khi $x = 135^\circ$ thì $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

Khi $x = 120^\circ$ thì $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

- b) Khi $x = 0^\circ$ thì $2 \sin x + \cos 2x = 2 \sin 0^\circ + \cos 120^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$.

Khi $x = 45^\circ$ thì $2 \sin x + \cos 2x = 2 \sin 45^\circ + \cos 90^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \sqrt{2}$.

Khi $x = 30^\circ$ thì $2 \sin x + \cos 2x = 2 \sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

- c) Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ với mọi giá trị của x .

Câu 10. Tính giá trị của biểu thức $T = \sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - 2 \sin x \cdot \cos x}$ khi $\tan x = \sqrt{3}$, $\tan x = -\frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } T = \sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - 2 \sin x \cdot \cos x}$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2 x} - \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x} = |\cos x| - |\sin x - \cos x|$$

$$\text{Khi } \tan x = \sqrt{3} \text{ thì } x = 60^\circ \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ và } \cos x = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } T = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Khi } \tan x = -\frac{3}{4} \text{ thì } \sin^2 x = \frac{9}{25}, \cos^2 x = \frac{16}{25} \text{ và } \sin x \cdot \cos x = \tan x \cdot \cos^2 x = -\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{25} = -\frac{12}{25}$$

$$\text{Do đó } T = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} - \sqrt{1 - 2 \cdot \left(-\frac{12}{25}\right)} = -\frac{3}{5}$$

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức

a) $\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$

b) $\sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$

Lời giải.

Sử dụng hai góc phụ nhau thì ta có

a) $\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ = \sin^2 78^\circ + \cos^2 78^\circ + \sin^2 89^\circ + \cos^2 89^\circ = 1 + 1 = 2$

b) $\sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ = \cos^2 87^\circ + \cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ = 1 + 1 = 2$

Câu 12. Tính giá trị của biểu thức

a) $A = \cos 0^\circ + \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \dots + \cos 180^\circ$

b) $B = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ$

c) $C = \tan 1^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \tan 5^\circ \dots \tan 89^\circ$

Lời giải.

a) Sử dụng hai góc bù nhau để ghép cặp

$$A = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 10^\circ + \cos 170^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 90^\circ = 0$$

b) Sử dụng 2 góc phụ nhau để ghép cặp

$$B = (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ$$

$$= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \frac{1}{2} + 1$$

$$= 44 + \frac{3}{2} = \frac{91}{2}$$

c) Sử dụng 2 góc phụ nhau để ghép cặp

$$C = (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 3^\circ \cdot \tan 87^\circ) \dots (\tan 43^\circ \cdot \tan 47^\circ) \cdot \tan 45^\circ$$

$$= (\tan 1^\circ \cdot \cos 1^\circ) \cdot (\tan 3^\circ \cdot \cos 3^\circ) \dots (\tan 43^\circ \cdot \cos 43^\circ) \cdot 1 = 1$$

Câu 13. a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \cos^4 x - \cos^2 x + \sin^2 x$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức: $Q = \sin^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x$

Lời giải.

a) Ta có

$$P = \cos^4 x - \cos^2 x + \sin^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x + (1 - \cos^2 x)$$

$$= \cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = (\cos^2 x - 1)^2 = \sin^4 x$$

Vậy P có giá trị lớn nhất là 1 khi $\sin x = 1$, tức $x = 90^\circ$.

b) Ta có $Q = \sin^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x = \sin^4 x - 2\sin^2 x + 1 = (\sin^2 x - 1)^2 = \cos^4 x$

Vậy Q có giá trị nhỏ nhất là 0 khi $\cos x = 0$ tức $x = 90^\circ$;

Q có giá trị lớn nhất là 1 khi $\cos x = 1$, tức $x = 0^\circ$ hoặc $x = 180^\circ$.

Dạng 2. Định lí cosin

Câu 1. Cho tam giác ABC , biết

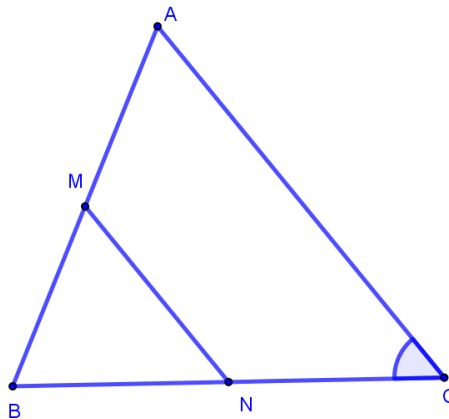
a) $a=12, b=13, c=15$. Tính độ lớn góc A . b) $AB=5, AC=8, \angle A=60^\circ$. Tính cạnh BC

Lời giải.

a) Ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13^2 + 15^2 - 12^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{25}{39}$. Suy ra $\angle A \approx 50^\circ$

b) Ta có $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 49$. Vậy $BC = 7$

Câu 2. Cho tam giác ABC , có đoạn thẳng nối trung điểm AB và BC bằng 3, cạnh $AB=9$ và $\angle ACB=60^\circ$. Tính cạnh BC .



Lời giải.

Đặt $BC = x, x > 0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC .

Ta có $MN = 3 \Rightarrow AC = 6$. Theo định lí cô-sin ta có

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos C \Leftrightarrow 81 = 36 + x^2 - 12x \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow BC = x = 3(1 + \sqrt{6})$$

Dạng 3. Định lí sin

Câu 3. Cho tam giác ABC , biết

a) $\angle A=60^\circ, \angle B=45^\circ, b=4$. Tính cạnh b và c . b) $\angle A=60^\circ, a=6$. Tính R

Lời giải.

a) Ta có $A+B+C=180^\circ \Rightarrow C=180^\circ - A - B = 75^\circ$.

Suy ra $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{4 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 4,9$ và $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{4 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 5,5$

b) Ta có $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{6}{2 \sin 60^\circ} \approx 3,5$.

Câu 4. Cho tam giác ABC , có $\angle B = 60^\circ, \angle C = 45^\circ, BC = a$

a) Tính độ dài hai cạnh AB, AC .

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

b) Chứng minh

Lời giải.

a) Ta có $\angle A = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$. Đặt $AC = b, AB = c$. Theo định lý hàm số sin, ta có

$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}. \text{ Suy ra } b = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin 75^\circ}; c = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin 75^\circ}$$

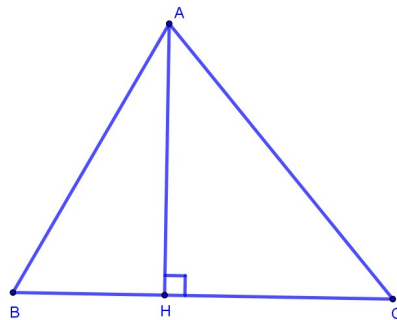
b) Kẻ $AH \perp BC$ do $\angle B, \angle C$ đều là góc nhọn nên H thuộc đoạn BC , hay $BC = HB + HC$.

$$\text{Ta có } HC = \frac{b\sqrt{2}}{2}; HB = \frac{c}{2}$$

$$\text{Suy ra } a = HC + HB = b \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a\sqrt{6} + a\sqrt{2}}{4\sin 75^\circ}$$

$$\text{Do đó } \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ và}$$

$$\cos 75^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 75^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - 2\sqrt{12}} = \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$



PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° .

Câu 1. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng?

A. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C.

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 2. Giá trị của $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 1

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Câu 3. Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$

B. $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

D. 2

Lời giải

Chọn A

$$\tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Câu 4. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$

B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$

C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$

D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$

Lời giải

Chọn D

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 5. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$

B. $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$

C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$

D. $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$

Lời giải

Chọn B

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 6. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$

B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$

C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$

D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$

Lời giải

Chọn D

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 7. Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 0

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$

Câu 8. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$

B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$

C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$

D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$.

Câu 9. Giá trị của $\tan 45^\circ + \cot 135^\circ$ bằng bao nhiêu?

- A. 2. B. 0. C. $\sqrt{3}$. D. 1.

Lời giải

Chọn B.

$$\tan 45^\circ + \cot 135^\circ = 1 - 1 = 0$$

Câu 10. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$.

- A. $P = 1$. B. $P = 0$. C. $P = \sqrt{3}$. D. $P = -\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:
$$P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

Câu 11. Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. 1. D. -1.

Lời giải

Chọn A

$$E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin (90^\circ + 36^\circ) \cos (90^\circ - 6^\circ) = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \cdot \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Câu 12. Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$A = (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ) = (\sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) = 2$$

Câu 13. Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$A = (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1$$

Câu 14. Tổng $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$ bằng

- A. 21. B. 23. C. 22. D. 24.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned}
 S &= \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ \\
 &= (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \sin^2 86^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) \\
 &= (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) = 22
 \end{aligned}$$

Câu 15. Giá trị của $A = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$ là

- A. 2. **B.** 1. C. 0. D. -1.

Lời giải

Chọn B

$$A = (\tan 5^\circ \cdot \tan 85^\circ) \cdot (\tan 10^\circ \cdot \tan 80^\circ) \dots (\tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1$$

Câu 16. Giá trị của $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$ là

- A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. C. -2. D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$B = (\cos^2 73^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ) = (\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \sin^2 87^\circ) = 2$$

Câu 17. Biểu thức $A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$ có giá trị bằng

- A. 1. **B.** -1. C. 2. D. -2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) nên suy ra $\cos \alpha + \cos(180^\circ - \alpha) = 0$

$$A = (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 140^\circ) + (\cos 60^\circ + \cos 120^\circ)$$

Do đó:

$$+ (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 180^\circ = \cos 180^\circ = -1$$

Câu 18. Cho $\tan \alpha - \cot \alpha = 3$. Tính giá trị của biểu thức sau: $A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$

- A. $A = 12$. **B.** $A = 11$. C. $A = 13$. D. $A = 5$.

Lời giải

Chọn B

$$\tan \alpha - \cot \alpha = 3 \Leftrightarrow (\tan \alpha - \cot \alpha)^2 = 9 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha - 2 \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 9$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha - 2 = 9 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 11$$

Câu 19. Biết $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Hỏi giá trị của $\sin^4 a + \cos^4 a$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. C. -1. D. 0.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = (\sin a + \cos a)^2 \Rightarrow \sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}$.

$\sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a) - 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Câu 20. Biểu thức $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$ có giá trị bằng:

- A. 1. B. 2. C. -3. D. 0.

Lời giải

Chọn A.

$\because \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$.

$\because \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$.

$f(x) = 3(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x) = 1$

Câu 21. Biểu thức: $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

- A. 1. B. 2. C. -2. D. -1.

Lời giải

Chọn A.

$f(x) = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Câu 22. Biểu thức $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

- A. -1. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn B.

$\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x = \tan^2 x (\sin^2 x - 1) + \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (-\cos^2 x) + \sin^2 x = 0$

Câu 23. Cho $\sin x + \cos x = m$. Tính theo m giá trị của $M = \sin x \cdot \cos x$.

- A. $m^2 - 1$. B. $\frac{m^2 - 1}{2}$. C. $\frac{m^2 + 1}{2}$. D. $m^2 + 1$.

Lời giải

Chọn B

$\sin x + \cos x = m \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = m^2 \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x \cdot \cos x = m^2$

$\Leftrightarrow 1 + 2\sin x \cdot \cos x = m^2 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$

Vậy $M = \frac{m^2 - 1}{2}$.

Dạng 2. Định lý cosin

Câu 1. Cho tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$. B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.
C. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$. D. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lý cosin trong tam giác ABC , ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

- Câu 2.** Cho tam giác ABC có $a=8, b=10$, góc C bằng 60° . Độ dài cạnh c là?
 A. $c=3\sqrt{21}$. B. $c=7\sqrt{2}$. C. $c=2\sqrt{11}$. D. $c=2\sqrt{21}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 84 \Rightarrow c = 2\sqrt{21}$.

- Câu 3.** Cho $\triangle ABC$ có $b=6, c=8, A=60^\circ$. Độ dài cạnh a là:
 A. $2\sqrt{13}$. B. $3\sqrt{12}$. C. $2\sqrt{37}$. D. $\sqrt{20}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 52 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$.

- Câu 4.** Cho $\triangle ABC$ có $B=60^\circ, a=8, c=5$. Độ dài cạnh b bằng:
 A. 7. B. 129. C. 49. D. $\sqrt{129}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7$.

- Câu 5.** Cho $\triangle ABC$ có $AB=9, BC=8, B=60^\circ$. Tính độ dài AC .
 A. $\sqrt{73}$. B. $\sqrt{217}$. C. 8. D. $\sqrt{113}$.

Lời giải

Chọn A

Theo định lý cosin có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 73 \Rightarrow AC = \sqrt{73}$$

Vậy $AC = \sqrt{73}$.

- Câu 6.** Cho tam giác ABC có $AB=2, AC=1$ và $A=60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .
 A. $BC=\sqrt{2}$. B. $BC=1$. C. $BC=\sqrt{3}$. D. $BC=2$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Theo định lý cosin ta có: } BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

- Câu 7.** Tam giác ABC có $a=8, c=3, B=60^\circ$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

A. 49.

B. $\sqrt{97}$

C. 7.

D. $\sqrt{61}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 3^2 - 2.8.3.\cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 8. Tam giác ABC có $\angle C = 150^\circ$, $BC = \sqrt{3}$, $AC = 2$. Tính cạnh AB ?

A. $\sqrt{13}$.B. $\sqrt{3}$.

C. 10.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Theo định lý cosin trong $\triangle ABC$ ta có:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos \angle C = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 9. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC . Biết $b = 7$; $c = 5$; $\cos A = \frac{4}{5}$. Tính độ dài của a .

A. $3\sqrt{2}$.B. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.C. $\frac{23}{8}$.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABC ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\frac{4}{5} = 18$$

$$\text{Suy ra: } a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Câu 10. Cho $\angle xOy = 30^\circ$. Gọi A, B là 2 điểm di động lần lượt trên Ox, Oy sao cho $AB = 2$. Độ dài lớn nhất của OB bằng bao nhiêu?

A. 4.

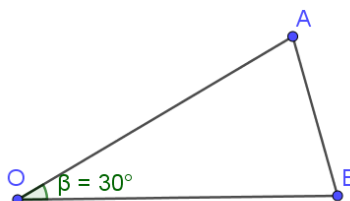
B. 3.

C. 6.

D. 2.

Lời giải

Chọn A



$$\begin{aligned} \text{Áp dụng định lý cosin:} \\ AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos 30^\circ \Leftrightarrow 4 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow OA^2 - \sqrt{3}.OB.OA + OB^2 - 4 = 0 (*) \end{aligned}$$

Coi phương trình (*) là một phương trình bậc hai ẩn OA . Để tồn tại giá trị lớn nhất của OB

$$\text{thì } \Delta(*) \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}OB)^2 - 4(OB^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow OB^2 \leq 16 \Leftrightarrow OB \leq 4$$

$$\text{Vậy } \max OB = 4.$$

- Câu 11.** Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?
 A. $a^2 < ab + ac$. B. $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$. C. $b^2 + c^2 > a^2 + 2bc$. D. $ab + bc > b^2$.

Lời giải

Chọn C

Do $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos A \leq 2bc \Rightarrow b^2 + c^2 \leq a^2 + 2bc$ nên mệnh đề C sai.

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có $a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ac$;đáp án A đúng.

Tương tự $a + c > b \Rightarrow ab + bc > b^2$;mệnh đề D đúng.

Ta có: $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cdot \cos B < 2ac \Rightarrow a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$;mệnh đề B đúng.

- Câu 12.** Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 9$ cm. Tính $\cos A$.

- A. $\cos A = -\frac{2}{3}$. B. $\cos A = \frac{1}{2}$. C. $\cos A = \frac{1}{3}$. D. $\cos A = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 9} = \frac{2}{3}$.

- Câu 13.** Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Khi đó:

- A. Góc $C > 90^\circ$ B. Góc $C < 90^\circ$
 C. Góc $C = 90^\circ$ D. Không thể kết luận được gì về góc C .

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Mà: $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ suy ra: $\cos C > 0 \Rightarrow C < 90^\circ$.

- Câu 14.** Cho tam giác ABC thỏa mãn: $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Khi đó:

- A. $A = 30^\circ$. B. $A = 45^\circ$. C. $A = 60^\circ$. D. $A = 75^\circ$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^\circ$.

- Câu 15.** Cho các điểm $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$. Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu?

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (9; -3)$.

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = 0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ.$$

Suy ra:

Câu 16. Cho tam giác ABC , biết $a=24, b=13, c=15$. Tính góc A ?

- A. $33^\circ 34'$. B. $117^\circ 49'$. C. $28^\circ 37'$. D. $58^\circ 24'$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13^2 + 15^2 - 24^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = -\frac{7}{15} \Rightarrow A \simeq 117^\circ 49'.$

Câu 17. Cho tam giác ABC , biết $a=13, b=14, c=15$. Tính góc B ?

- A. $59^\circ 49'$. B. $53^\circ 7'$. C. $59^\circ 29'$. D. $62^\circ 22'$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{33}{65} \Rightarrow B \simeq 59^\circ 29'.$

Câu 18. Cho tam giác ABC biết độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và thỏa mãn hệ thức $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$ với $b \neq c$. Khi đó, góc $\widehat{BAC}$ bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 120° .

Lời giải

Chọn D

Ta có $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b^3 - ba^2 = c^3 - ca^2 \Leftrightarrow b^3 - c^3 - a^2(b - c) = 0$

$\Leftrightarrow (b - c)(b^2 + bc + c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = -bc$

Mặt khác $\cos \widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$

Câu 19. Tam giác ABC có $AB=c, BC=a, CA=b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ.

- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .

Lời giải

Chọn B

Theo bài ra, ta có: $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2) \Leftrightarrow b^3 - a^2b = a^2c - c^3 \Leftrightarrow b^3 + c^3 - a^2b - a^2c = 0$

$\Leftrightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2) - a^2(b + c) = 0 \Leftrightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 - bc + c^2 - a^2 = 0$

(do $b + c \neq 0$)

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \angle BAC = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BAC = 60^\circ$$

Câu 20. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $MA:MB:MC = 1:2:3$ khi đó góc AMB bằng bao nhiêu?

- A. 135° . B. 90° . C. 150° . D. 120° .

Lời giải

$$MB = x \Leftrightarrow MA = 2x; MC = 3x \text{ với } 0 < x < BC = \sqrt{2}$$

$$\text{Ta có } \cos \angle BAM = \frac{1 + 4x^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 2x} = \frac{3x^2 + 1}{4x}$$

$$\cos \angle MAC = \frac{1 + 4x^2 - 9x^2}{4x} = \frac{1 - 5x^2}{4x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3x^2 + 1}{4x} \right)^2 + \left(\frac{1 - 5x^2}{4x} \right)^2 = 1 \Rightarrow 9x^4 + 6x^2 + 1 + 1 - 10x^2 + 25x^4 = 16$$

$$\Rightarrow 34x^4 - 4x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{5 + 2\sqrt{2}}{17} > \frac{1}{5} (I) \\ x^2 = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{17} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos \angle AMB = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM} = \frac{4x^2 + x^2 - 1}{2 \cdot 2x \cdot x}$$

$$= \frac{5x^2 - 1}{4x^2} = \left(\frac{25 - 10\sqrt{2}}{17} - 1 \right) : \frac{20 - 8\sqrt{2}}{17} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

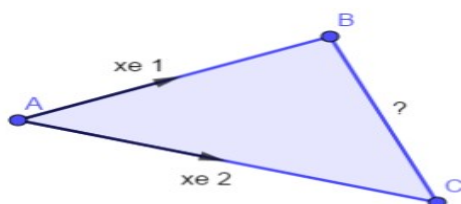
$$\text{Vậy } \angle AMB = 135^\circ$$

Câu 21. Hai chiếc xe cùng xuất phát ở vị trí A, đi theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Xe thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h , xe thứ hai chạy với tốc độ 40 km/h . Hỏi sau 1h, khoảng cách giữa 2 xe là:

- A. 13 km . B. $15\sqrt{3} \text{ km}$. C. $10\sqrt{13}$. D. 15 km .

Lời giải

Chọn C



Trong 1h, xe 1 đi được quãng đường là $AB = 30 \text{ km}$

Trong 1h, xe 2 đi được quãng đường là $AC = 40 \text{ km}$

Sau 1h khoảng cách giữa 2 xe là BC : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 1300$
 $\Rightarrow BC = 10\sqrt{13} \text{ km}$

Câu 22. Hai tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A, đi theo hai hướng và tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với vận tốc 30 km/h , tàu thứ hai chạy với vận tốc 40 km/h . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách xa nhau bao nhiêu km ?

A. $25\sqrt{10}$.

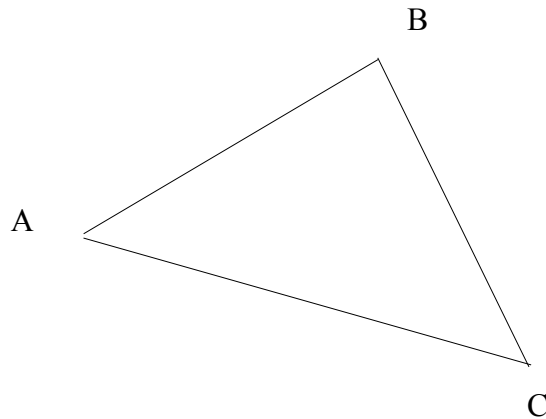
B. $30\sqrt{10}$.

C. $18\sqrt{13}$.

D. $20\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D



Sau 2 giờ tàu thứ nhất cách vị trí A một khoảng cách $AB = 30 \cdot 2 = 60(\text{km})$

Và tàu thứ hai cách vị trí A một khoảng cách $AC = 40 \cdot 2 = 80(\text{km})$

Khi đó hai tàu cách nhau một khoảng cách BC .

Theo định lý Côsin, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$\begin{aligned} \text{P } BC^2 &= 3600 + 6400 - 2 \cdot 60 \cdot 80 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 5200 \end{aligned}$$

$$\text{P } BC = 20\sqrt{13}(\text{km})$$

Câu 23. Khoảng cách từ A đến C không thể đo trực tiếp vì phải qua một đầm lầy nên người ta làm như sau. Xác định một điểm B có khoảng cách AB là 12 km và đo được góc $\angle ACB = 37^\circ$. Hãy tính khoảng cách AC biết rằng BC bằng 5 km .

A. $AC \approx 17\text{ km}$.

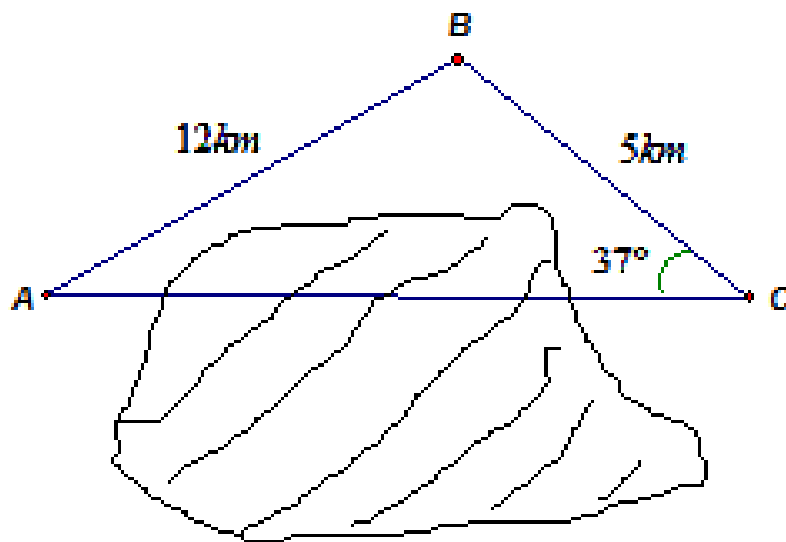
B. $AC \approx 12\text{ km}$.

C. $AC \approx 15,6\text{ km}$.

D. $AC \approx 20\text{ km}$.

Lời giải

Chọn C



Áp dụng định lí Côsin ta có:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB$$

$$\Leftrightarrow 144 = AC^2 + 25 - 10AC \cdot \cos 37^\circ$$

$$\Leftrightarrow AC^2 - 10AC \cdot \cos 37^\circ - 119 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AC = 5 \cos 37^\circ + \sqrt{25 \cos^2 37^\circ + 119} \approx 15,6(n) \\ AC = 5 \cos 37^\circ - \sqrt{25 \cos^2 37^\circ + 119} \approx -7,6(l) \end{cases}$$

Vậy $AC \approx 15,6 \text{ km}$.

Dạng 3. Định lí sin

Câu 24. Cho tam giác ABC . Tìm công thức sai:

A. $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

B. $\sin A = \frac{a}{2R}$.

C. $b \sin B = 2R$.

D. $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Câu 25. Cho tam giác ABC có góc $\angle BAC = 60^\circ$ và cạnh $BC = \sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R = 4$.

B. $R = 1$.

C. $R = 2$.

D. $R = 3$.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$$

Ta có:

Câu 26. Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC có $AC = 4 \text{ cm}$, góc $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Độ dài cạnh BC là

A. $2\sqrt{6}$.

B. $2+2\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{3}-2$.

D. $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow BC = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{6}$$

Câu 27. Cho $\triangle ABC$ có $AB=5$; $\hat{A}=40^\circ$; $\hat{B}=60^\circ$. Độ dài BC gần nhất với kết quả nào?

A. 3,7.

B. 3,3.

C. 3,5.

D. 3,1.

Lời giải

Chọn B

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$$

$$\text{Áp dụng định lý sin: } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{5}{\sin 80^\circ} \sin 40^\circ \approx 3,3$$

Câu 28. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b+c=2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\cos B + \cos C = 2\cos A$.

B. $\sin B + \sin C = 2\sin A$.

C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2}\sin A$.

D. $\sin B + \cos C = 2\sin A$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{\frac{b+c}{2}}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{b+c}{2\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2\sin A$$

Câu 29. Tam giác ABC có $a=16,8$; $\hat{B}=56^\circ 13'$; $\hat{C}=71^\circ$. Cạnh c bằng bao nhiêu?

A. 29,9.

B. 14,1.

C. 17,5.

D. 19,9.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: Trong tam giác } ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 71^\circ - 56^\circ 13' = 52^\circ 47'$$

$$\text{Mặt khác } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{16,8 \cdot \sin 71^\circ}{\sin 52^\circ 47'} \approx 19,9$$

Câu 30. Tam giác ABC có $\hat{A}=68^\circ 12'$, $\hat{B}=34^\circ 44'$, $AB=117$. Tính AC ?

A. 68.

B. 168.

C. 118.

D. 200.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: Trong tam giác } ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 68^\circ 12' - 34^\circ 44' = 77^\circ 4'$$

Mặt khác $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{117 \cdot \sin 34^{\circ} 44'}{\sin 77^{\circ} 4'} \simeq 68.$