|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **TỈNH QUẢNG NAM** | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT ĐỢT 1**  **NĂM HỌC 2022 – 2023** |

**HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN**

**Môn: TOÁN**

***(Hướng dẫn chấm này gồm có 08 trang)***

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | | | | | **Điểm** |
| **Câu 1**  **(3,0đ)** | *Giải hệ phương trình .* | | | | |  |
| Điều kiện: | | | | | 0,25 |
| - Xét phương trình thứ nhất của hệ:  (\*) | | | | | 0,25 |
| \* Khi  không thỏa phương trình thứ hai. | | | | | 0,25 |
| \* Khi : Phương trình (\*) tương đương với phương trình:    (\*\*) | | | | | 0,25 |
| Để ý rằng  (với )  Vì thế phương trình (\*\*) tương đương với phương trình: | | | | | 0,25 |
| Thay  vào phương trình thứ hai ta được :  (1) | | | | | 0,25 |
| - Xét phương trình: (I)  Đặt . Khi đó phương trình (I) trở thành:  (II)  Từ phương trình (I) suy ra  . | | | | | 0,25  0,25 |
| Xét  với , ,  Suy ra  nghịch biến trên . | | | | | 0,25 |
| Xét , . Suy ra  đồng biến trên . | | | | | 0,25 |
| Mà . Do đó pt (II) có nghiệm duy nhất . | | | | | 0,25 |
| + Với  Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: | | | | | 0,25 |
| **Câu 2**  **(2,0đ)** | *Cho dãy số  được xác định như sau:*  *. Tính .* | | | | |  |
| - Nhận xét: . | | | | | 0,25 |
| (\*)  + Chia hai vế của (\*) cho:  ta được: | | | | | 0,5 |
| Mà  .  Do đó dãy số  giảm và bị chặn dưới bởi số 0. Suy ra dãy số  có giới hạn. | | | | | 0,25 |
| Đặt  Mặt khác | | | | | 0,25 |
| Lại có: . Cho *i* chạy từ 1 đến *n*, ta có:        ……………………….. | | | | | 0,25 |
| Cộng vế theo vế các đẳng thức trên suy ra: | | | | | 0,25 |
| . | | | | | 0,25 |
| **\* Cách khác:** Nhận xét: . | 0,25 | | | |  |
| Suy ra  . Do đó dãy  là dãy tăng. | 0,25 | | | |
| Giả sử bị chặn trên . Suy ra tồn tại  (do ).  Từ  suy ra  (vô lý).  Điều này chứng tỏ không bị chặn trên. Do đó . | 0,5 | | | |
| Đặt  và . Ta có dãy  tăng và không bị chặn trên.  . | 0,5 | | | |
| Theo định lý **Stolz**, suy ra. | 0,25 | | | |
| Vậy . | 0,25 | | | |
| **Câu 3**  **(5,0đ)** | *Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm trên đường tròn (O) sao cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Xét một điểm C trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC không cân tại C. Gọi (O1) là đường tròn đi qua A và tiếp xúc với BC tại C; (O2) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại C. Hai đường tròn (O1) và (O2) cắt nhau tại điểm thứ hai là D (D khác C).*  *a) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt đường thẳng OD tại S. Chứng minh OA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADS.*  *b) Chứng minh đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định khi điểm C di động trên đường tròn (O) (tam giác ABC không cân tại C).* | | | | |  |
| **a**  **(1,5đ)** | C:\Users\MyPC\Desktop\ScreenHunter\ScreenHunter 179.png  *Hình vẽ phục vụ câu a:* ***0,25*** *(Học sinh không vẽ hình – không chấm)* | | | | |  |
| Tương tự . Suy ra tứ giác  là hình bình hành. Do đó đi qua trung điểm của *OC*. | | | | | 0,5 |
| Mà đi qua trung điểm của *CD* nên *O*1*O*2 *// OD*. Mà  nên . | | | | | 0,5 |
| Suy ra .  Suy ra *OA* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ADS*. | | | | | 0,25 |
| **b**  **(3,5đ)** | Tương tự | | | | | **0,5** |
|  | | | | | **0,5** |
| Do đó: Suy ra 4 điểm *A*, *D*, *O*, *B* cùng nằm trên một đường tròn. | | | | | **0,5** |
| **\* Cách khác:** Gọi *M* là giao điểm của tia *CD* và đường tròn *(O).*  ,  *(Đúng một trong hai ý được 0,5)* | | | | **0,75** |  |
| Suy ra | | | | **0,25** |
| Mà  nên | | | | **0,25** |
| Suy ra 4 điểm *A*, *D*, *O*, *B* cùng nằm trên một đường tròn. | | | | **0,25** |
| + Ta thấy *OD*, *AB*, tiếp tuyến của (*O*) tại C là các trục đẳng phương của từng cặp đường tròn (*ADOB*) và (*COD*), (*O*) và (*ADOB*), (*O*) và (*COD*). Do đó 3 đường trên đồng quy tại *S*. | | | | | 0,75 |
| + Đường đối cực của *S* đối với (*O*) đi qua *C* và vuông góc với *OD* nên *CD* là đường đối cực của *S* đối với (*O*).  Mà *AB* đi qua cực *S* của *CD* đối với (*O*) nên *CD* đi qua cực *E* của *AB* đối với (*O*). | | | | | **0,5**  **0,5** |
| Hơn nữa *A, B* và (O) cố định nên *E*  cố định. Vậy *CD* đi qua *E* cố định. | | | | | **0,25** |
| **\* Lưu ý:**  Ta có  nên *SM* là tiếp tuyến của đường tròn (*O*).  Mà *S* nằm trên đường chéo *AB* nên tứ giác *AMBC* là tứ giác điều hòa. | | **0,5** | | |  |
| Suy ra giao điểm *E* của hai tiếp tuyến của đường tròn (*O*) tại *A* và *B* nằm trên đường chéo *CM*. | | **0,5** | | |  |
| Hơn nữa *A, B* và (O) cố định nên *E*  cố định. Vậy *CD* đi qua *E* cố định. | | **0,25** | | |  |
| **Câu 4**  **(2,0đ)** | *a) Cho  là số nguyên lớn hơn . Chứng minh  không chia hết cho*  *b) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố  và  thỏa mãn  chia hết cho .* | | | | |  |
| **a**  **(1,0đ)** | Giả sử . Suy ra  là số tự nhiên lẻ.  Khi đó  có dạng , với là các số nguyên tố lẻ,  là các số nguyên dương và . | | | | | 0,25 |
| + Do  là số nguyên tố lẻ nên ( là số tự nhiên lẻ ; ).  Không mất tính tổng quát, gọi là số nhỏ nhất trong các dãy .  Ta có  . | | | | | 0,25 |
| Mà  nên  (với *u* số nguyên dương).  Lại có . Do đó . | | | | | 0,25 |
| Hơn nữa  và  lẻ nên  (\*)  Mà  (mâu thuẫn với (\*)).  Vậy  không chia hết cho | | | | | 0,25 |
| **b**  **(1,0đ)** | Khi  chia hết cho , có 3 trường hợp xảy ra :  **- TH1:** *p*, *q* là các số nguyên tố lẻ.  Vì  chia hết cho  nên .  Lại có | | | | | 0,25 |
| Tương tự ta chứng minh được .  Mà *p*, *q* là các số nguyên tố nên  (Mâu thuẫn ở câu a). | | | | | 0,25 |
| **- TH2:** .  mà . Suy ra | | | | | 0,25 |
| **- TH3:** . Khi đó  Vậy, các cặp số cần tìm là | | | | | 0,25 |
| **\* Cách khác:**    Mà | | | **0,25** | |  |
| Tương tự . Mànên  Suy ralà số chẵn. Khi đó, xảy ra 2 trường hợp: | | | **0,25** | |
| **- TH1:** Trong hai số, có đúng một số bằng  Khi , ta có : mà . Suy ra  Tương tự . Suy ra | | | **0,25** | |
| **- TH2:** . Khi đó (thỏa)  Vậy, các cặp số cần tìm là | | | **0,25** | |
| **Câu 5**  **(3,0đ)** | *Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn   và* | | | | |  |
| Giả sử tồn tại hàm thỏa mãn yêu cầu bài toán.  - Cho .  - Cho .  - Cho . | | | | | 0,5 |
| - Với  ta có: | | | | | 0,5 |
| - Xét  + Với  ta có:  + Với  ta có: | | | | | 0,5 |
| Suy ra: | | | | | 0,5 |
| , với  (thỏa: ). | | | | | 0,25 |
| **- Thử lại:**  Với ,  thay vào  ta được :  (luôn đúng với mọi *c*).  *(Phải có phép thử lại)* | | | | | 0,5 |
| Vậy hàm số cần tìm là: , với , *c* là hằng số, . | | | | | 0,25 |
| **Câu 6**  **(2,0đ)** | *Cho tập hợp X có 2023 phần tử. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn hai tập hợp con khác nhau của X sao cho giao của hai tập hợp này là một tập hợp có đúng một phần tử?* | | | | |  |
| Giả sử giao của hai tập hợp thỏa yêu cầu là tập hợp .  Ta đếm số cách chọn hai tập hợp *A*, *B* con của và không giao nhau. Có hai trường hợp xảy ra :  **- TH1:** Hai tập hợp *A*, *B* đều khác tập rỗng.  Giả sử *A* có  phần tử . Khi đó *B* là tập hợp con (khác rỗng) của tập hợp có  phần tử.  - Ứng với mỗi giá trị , có  cách chọn tập hợp *A* và có  cách chọn tập hợp *B* (bỏ tập rỗng).  Do đó, với mỗi giá trị , có  cặp tập hợp *A*, *B*. | | | | | 0,5 |
| - Cho , suy ra số cách chọn hai tập hợp là:  (Do mỗi cặp *A*, *B* được tính hai lần). | | | | | 0,25 |
| Ta có  Từ suy ra:   ; | | | | | 0,25 |
| Số cách chọn hai tập hợp *A*, *B* (không tính thứ tự) là  . | | | | | 0,25 |
| **- TH2:** Một trong hai tập hợp *A*, *B* có một tập bằng rỗng.  Giả sử , tập hợp là tập hợp con khác rỗng của .  Trường hợp này có  cách chọn tập hợp . | | | | | 0,25 |
| Từ hai trường hợp trên suy ra số cách chọn hai tập hợp con khác nhau (không chứa ) giao nhau bằng rỗng là . | | | | | 0,25 |
| Với mỗi cách chọn hai tập hợp trên, ta thêm phần tử  vào mỗi tập hợp để được hai tập hợp thỏa đề. Vậy số cách chọn hai tập hợp thỏa đề là  . | | | | | 0,25 |
| **Câu 7**  **(3,0đ)** | *Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện  Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* | | | | |  |
| Ta có  Đặt . Khi đó  và . | | | | | 0,25  0,25 |
| Theo đề | | | | | 0,5 |
| (vì nên ) | | | | | 0,5 |
| + Lại có  nên  hay . | | | | | 0,5 |
| Suy ra . | | | | | 0,25 |
| Xét , .  Suy ra  nghịch biến trên .  Do đó . Dấu “=” xảy ra khi | | | | | 0,5 |
| Vậy giá trị nhỏ nhất của *P* bằng 1012 khi | | | | | 0,25 |

**--------------- HẾT ---------------**

***Chú ý:*** *Nếu học sinh có lời giải đúng, khác với đáp án, Giám khảo căn cứ thang điểm câu tương ứng cho điểm phù hợp.*