SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH

CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO
KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023
Môn: Toán

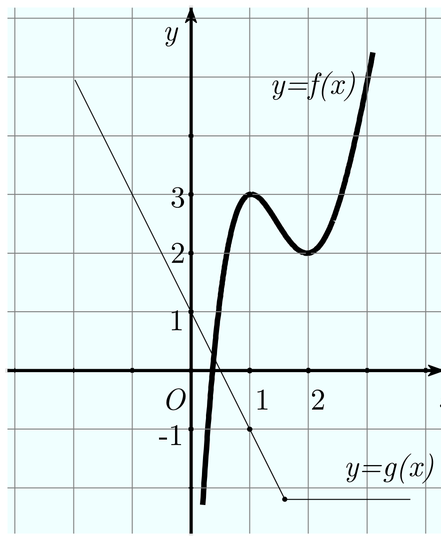
TÊN CHUYÊN ĐỀ:
CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Người biên soạn: Nguyễn Minh Nhiên.
Đơn vị công tác: Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh.

1. Các bài toán về đạo hàm

1.1. Dạng 1: Dựa vào đồ thị tính giá trị đạo hàm tại một điểm.

Câu 1: Cho $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ là những hàm số có đồ thị là các đường cong nét dày và đường nét mỏng trong hình bên dưới, đặt $y=h\left(x\right)=f\left(x\right)g\left(x\right)$. Giá trị của $h'\left(1\right)+h'\left(2\right)$ bằng



A. -6. **B.** -10. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ ta có $f\left(1\right)=3,f\left(2\right)=2,g\left(1\right)=-1,g\left(2\right)=a$ là hằng số.

Vì $x=1;x=2$ là các điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ nên $f'\left(1\right)=f'\left(2\right)=0$.

Tia Bt song song với trục hoành nên $g'\left(2\right)=0$.

Đường thẳng đi qua AB có hệ số góc là $-\tan\widehat{MAN}=-2$ hay $g'\left(1\right)=-2$.

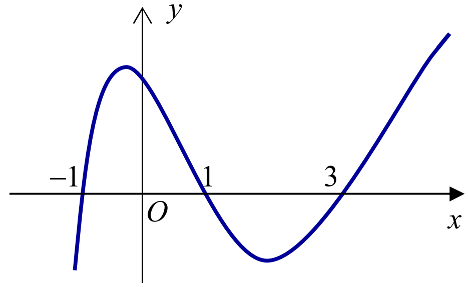
Ta lại có $h'\left(x\right)=f'\left(x\right)g\left(x\right)+g'\left(x\right)f\left(x\right)$ nên

$h'\left(1\right)=f'\left(1\right)g\left(1\right)+g'\left(1\right)f\left(1\right)=-6;h'\left(2\right)=f'\left(2\right)g\left(2\right)+g'\left(2\right)f\left(2\right)=0$.

Vậy $h'\left(1\right)+h'\left(2\right)=-6$.

1.2. Dạng 2: Bài toán liên quan tiếp tuyến của đồ thị

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong $\left(C\right)$, biết đồ thị của $f'\left(x\right)$ như hình vẽ:



Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B phân biệt lần lượt có hoành độ a, b. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $4 \ge a - b \ge -4$. **B.** a, $b \ge 0$. **C.** a, $b < 3$. **D.** $a^2 + b^2 > 10$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị, ta có $f'(1) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 có dạng:

$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = f(1)$.

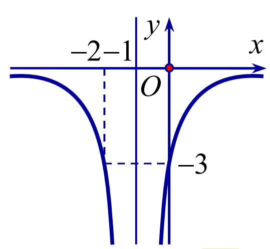
Phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến trên với đồ thị (C): $f(x) = f(1)$.

Từ đồ thị, ta có $f'(-1) = f'(3) = 0$. Ta được bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y = f(1)$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm có hoành độ lần lượt là 1, a, b với $a < -1$ và $b > 3$. Như vậy đáp án D đúng, các khẳng định A, B, C đều không thỏa điều trên.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \ne 0, d \ne 0)$ có đồ thị (C). Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành có phương trình là



A. $x - 3y + 2 = 0$. **B.** $x + 3y + 2 = 0$. **C.** $x + 3y - 2 = 0$. **D.** $x - 3y - 2 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{ax+b}{cx+d}$ có $f'\left(x\right)=\frac{\left(ad-bc\right)^2}{\left(cx+d\right)^2}$.

Ta có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $f\left(0\right)=2\Leftrightarrow\frac{b}{d}=2\Leftrightarrow b=2d$.

Từ đồ thị $y=f'\left(x\right)$ nhận đường thẳng $x=-1$ làm tiệm cận đứng nên

$-\frac{d}{c}=-1\Leftrightarrow d=c\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{ad-2d^2}{\left(dx+d\right)^2}=\frac{a-2d}{d\left(x+1\right)^2}$.

Mặt khác ta lại có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ đi qua điểm $\left(-2;-3\right)$ nên

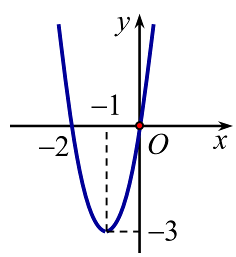
$f'\left(-2\right)=-3\Rightarrow\frac{a-2d}{d}=-3\Leftrightarrow a=-d$.

Vậy $f\left(x\right)=\frac{-dx+2d}{dx+d}=\frac{-x+2}{x+1}$.

Đồ thị $\left(C\right)$ cắt trục Ox tại điểm $\left(2;0\right)$ và $f'\left(2\right)=-\frac{1}{3}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại giao điểm của $\left(C\right)$ và trục Ox là $y=-\frac{1}{3}\left(x-2\right)$ $\Leftrightarrow x+3y-2=0$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đạo hàm là hàm số $y=f'\left(x\right)$ với đồ thị như hình vẽ bên.



Biết rằng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?

A. -4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c$

Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ đi qua các điểm $A\left(-2;0\right)$, $O\left(0;0\right)$ và $C\left(-1;-3\right)$ nên ta có

$$\begin{cases}12a-4b+c=0\\c=0\\3a-2b+c=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\\c=0\end{cases}\Rightarrow y=f\left(x\right)=x^3+3x^2+d \text{ và } f'\left(x\right)=3x^2+6x.$$

Gọi tiếp điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và trục hoành là $M\left(x_0;0\right)$ với $x_0<0$.

Tiếp tuyến có hệ số góc

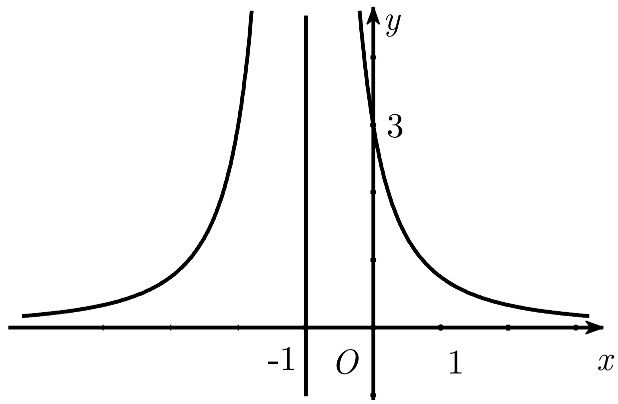
$k=0\Rightarrow y'\left(x_0\right)=0\Leftrightarrow 3x_0^{\ 2}+6x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right.$. Vì $x_0<0\Rightarrow x_0=-2$.

$M\left(-2;0\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)\Rightarrow -8+12+d=0\Rightarrow d=-4$.

Khi đó $y=f\left(x\right)=x^3+3x^2-4$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là -4.

1.3. Dạng 3: Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ tính giá trị $f\left(a\right)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ có dạng:



Biết rằng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ đi qua điểm $A\left(0;4\right)$. Khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

A. $f\left(1\right)=2$. **B.** $f\left(2\right)=\dfrac{11}{2}$. **C.** $f\left(1\right)=\dfrac{7}{2}$. **D.** $f\left(2\right)=6$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ đi qua $A\left(0;4\right)$ nên $b=4d$ $\left(1\right)$.

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$.

Căn cứ theo đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ ta có $-\dfrac{d}{c}=-1\Rightarrow c=d$ $\left(2\right)$.

Đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ đi qua $\left(0;3\right)$ nên $\dfrac{ad-bc}{d^2}=3\Rightarrow ad-bc=3d^2$ $\left(3\right)$.

Thay $\left(1\right)$, $\left(2\right)$ vào $\left(3\right)$ ta được $ad-4d^2=3d^2\Rightarrow a=7d$ $\left(d\neq 0\right)$ vì nếu $d=0$ thì $a=b=c=d=0$.

Do đó $f\left(x\right)=\dfrac{7dx+4d}{dx+d}=\dfrac{7x+4}{x+1}$.

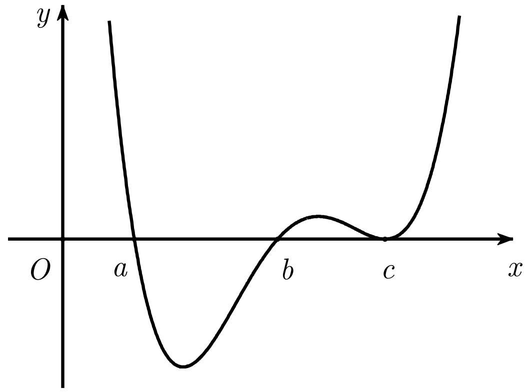
Vậy $f\left(2\right)=6$.

2. Các dạng toán về xét tính đơn điệu

2.1. Dạng 1. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ xác định tính đơn điệu của $y=f\left(x\right)$.

2.2. Dạng 2. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ hoặc $y=f\left(x\right)$ xác định tính đơn điệu của $y=f\left(u\left(x\right)\right)$, $y=u\left(f\left(x\right)\right)$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'\left(x+2019\right)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ a,b,c là các số nguyên và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi m_1 là số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = g\left(x\right) = f\left(x^2 - 2x + m\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$; m_2 là số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = h\left(x\right) = f\left(x^2 - 4x + m\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;2\right)$. Khi đó, $m_1 + m_2$ bằng

A. $2b - 2a$. **B.** $2b - 2a + 2$. **C.** $2b - 2a - 2$. **D.** $2b - 2a + 1$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị của hàm số $y = f'\left(x + 2019\right)$ suy ra bảng xét dấu của $y = f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		$a-2019$		$b-2019$		$c-2019$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Xét hàm số $y = g\left(x\right) = f\left(x^2 - 2x + m\right)$

$g'\left(x\right) = \left(2x - 2\right)f'\left(x^2 - 2x + m\right)$.

Ta thấy $2x - 2 > 0, \forall x \in \left(1;2\right)$ nên $y = g\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(1;2\right)$ khi và chỉ khi

$a - 2019 \le x^2 - 2x + m \le b - 2019, \forall x \in \left(1;2\right)$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + a - 2019 \le m \le -x^2 + 2x + b - 2019, \forall x \in \left(1;2\right)$

$\Leftrightarrow 1 + a - 2019 \le m \le b - 2019 \Leftrightarrow a - 2018 \le m \le b - 2019$.

Số giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m_1 = b - 2019 - a + 2018 + 1 = b - a$.

Xét hàm số $y = h\left(x\right) = f\left(x^2 - 4x + m\right)$

$h'\left(x\right) = \left(2x - 4\right)f'\left(x^2 - 4x + m\right)$.

Ta thấy $2x - 4 < 0, \forall x \in \left(1;2\right)$ nên $y = h\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(1;2\right)$ khi và chỉ khi

$a - 2019 \le x^2 - 4x + m \le b - 2019, \forall x \in \left(1;2\right)$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x + a - 2019 \le m \le -x^2 + 4x + b - 2019, \forall x \in \left(1;2\right)$

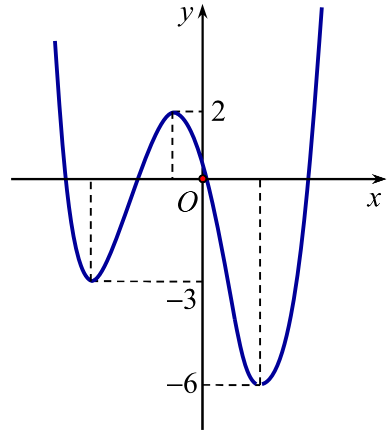
$\Leftrightarrow 4 + a - 2019 \le m \le 3 + b - 2019 \Leftrightarrow a - 2015 \le m \le b - 2016$.

Số giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m_2 = b - 2016 - a + 2015 + 1 = b - a$.

Vậy $m_1 + m_2 = 2b - 2a$.

2.3. Dạng 3. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ hoặc $y = f\left(x\right)$ xác định tính đơn điệu của $y = \left|f\left(x\right)\right|,\ y = \left|f\left(u\left(x\right)\right)\right|$.

Câu 7: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left|f\left(x-1\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

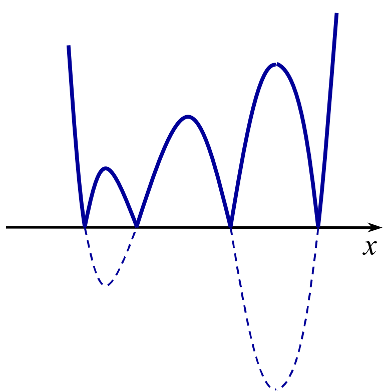
A. 9. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 15.

Lời giải

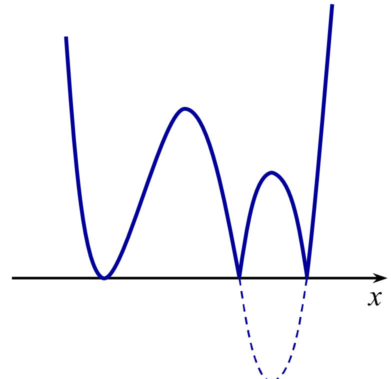
Chọn B

Nhận xét: Số giao điểm của $\left(C\right): y = f\left(x\right)$ với Ox bằng số giao điểm của $\left(C'\right): y = f\left(x-1\right)$ với Ox.

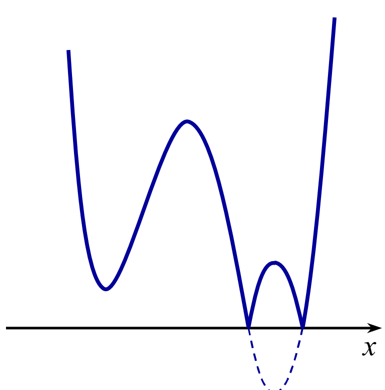
Vì $m > 0$ nên $\left(C''\right): y = f\left(x-1\right)+m$ có được bằng cách tịnh tiến $\left(C'\right): y = f\left(x-1\right)$ lên trên m đơn vị.



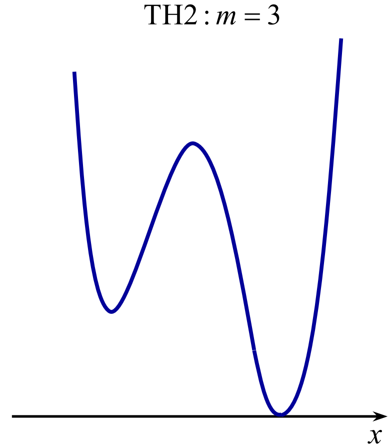
$\text{TH1}: 0 < m < 3$



$\text{TH2}: m = 3$



$\text{TH3}: 3 < m < 6$



$\text{TH4}: m \geq 6$

TH1: $0 < m < 3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.
TH2: $m = 3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.
TH3: $3 < m < 6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.
TH4: $m \geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

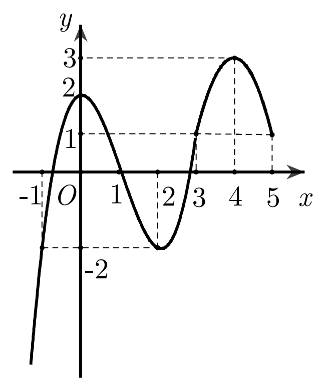
Vậy $3 \le m < 6$. Do $m \in \mathbb{Z}^*$ nên $m \in \{3;4;5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

2.4. Dạng 4. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ hoặc $y = f(x)$ xác định tính đơn điệu của $y = f(|x|)$, $y = f(u(|x|))$.

2.5. Dạng 5. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ hoặc $y = f(x)$ xác định tính đơn điệu của $y = f(u(x)) + g(x)$.

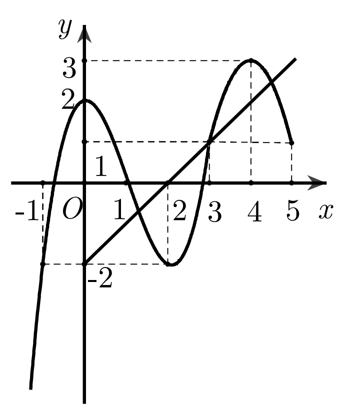
Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = -2f(2-x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $y = -2f(2-x) + x^2 \Rightarrow y' = -(2-x)'2f'(2-x) + 2x = 2f'(2-x) + 2x$

$y' < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) + x < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < (2-x) - 2$

Đặt $t = 2 - x$ suy ra $f'(t) < t - 2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = t - 2$ cắt đồ thị $y = f'(t)$ tại ba điểm có hoành độ liên tiếp là $1 < a < 2; 3; 4 < b < 5$

Do đó cùng từ đồ thị ta có

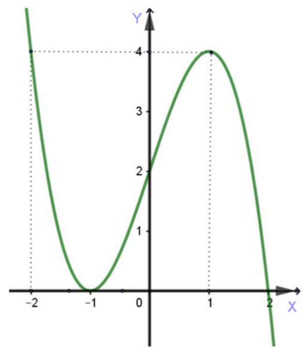
$$f'(t) < t - 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < t < 3 \\ t > b \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a < 2 - x < 3 \\ 2 - x > b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 2 - a \\ x < 2 - b \end{array}\right.$$

• Vì $1 < a < 2 \Rightarrow 0 < 2 - a < 1$ nên $(-1;0) \subset (-1;2-a)$. Do đó, hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;2-a\right)$ nên cũng nghịch biến trên $\left(-1;0\right)$.

• Vì $4 < b < 5 \Rightarrow -3 < 2 - b < -2$ nên $(-3;-2) \not\subset (-\infty;2-b)$. Do đó, hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;2-b\right)$ thì không nghịch biến trên $\left(-3;-2\right)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ như hình vẽ. có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in \left(0;10\right)$ để hàm số $g\left(x\right) = f\left(x^2 - 2x - 1\right) + m\ln\left(2x - x^2\right)$ đồng biến trên khoảng $x \in \left(0;1\right)$.



A. 9. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g\left(x\right) = f\left(x^2 - 2x - 1\right) + m\ln\left(2x - x^2\right)$ trên khoảng $\left(0;1\right)$.

Ta có $g'\left(x\right) = \left(2x - 2\right).f'\left(x^2 - 2x - 1\right) + m.\dfrac{2 - 2x}{2x - x^2}$

$= \left(2x - 2\right)\left(f'\left(x^2 - 2x - 1\right) - \dfrac{m}{2x - x^2}\right)$.

Do $x \in \left(0;1\right)$ nên $2x - 2 < 0$. Để hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$ thì ta phải có

$f'\left(x^2 - 2x - 1\right) - \dfrac{m}{2x - x^2} \le 0$ với $\forall x \in \left(0;1\right)$

$\Leftrightarrow m \ge \left(2x - x^2\right).f'\left(x^2 - 2x - 1\right)$ với $\forall x \in \left(0;1\right)$

Đặt $t = x^2 - 2x - 1$ với $x \in \left(0;1\right)$ $\Rightarrow t \in \left(-2;-1\right)$. Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình

$m \ge \left(-1 - t\right).f'\left(t\right)$ đúng với $\forall t \in \left(-2;-1\right)$.

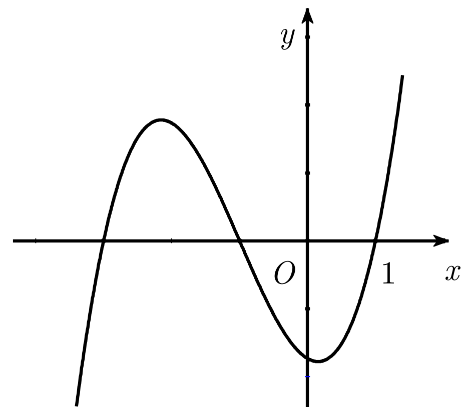
Từ đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ ta có $0 < f'\left(t\right) < 4$ với $\forall t \in \left(-2;-1\right)$.

Và do $0 < -1 - t < 1$ với $\forall t \in \left(-2;-1\right)$. Từ đó suy ra $\left(-1 - t\right).f'\left(t\right) < 4$ với $\forall t \in \left(-2;-1\right)$.

Vậy $m \ge \left(-1 - t\right).f'\left(t\right)$ $\forall t \in \left(-2;-1\right) \Leftrightarrow m \ge 4$.

Do m nguyên, $m \in \left(0;10\right)$ nên có 6 giá trị thỏa mãn.

Câu 10: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'\left(x\right)$ có đồ thị được cho trong hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $\left[-2019;2019\right]$ để hàm số $g\left(x\right) = f\left(2019^x\right) - mx + 2$ đồng biến trên $\left[0;1\right]$?



A. 2028. **B.** 2019. **C.** 2011. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = 2019^x \ln 2019.f'(2019^x) - m$.

Ta lại có hàm số $y = 2019^x$ đồng biến trên $[0;1]$.

Với $x \in [0;1]$ thì $2019^x \in [1;2019]$ mà hàm $y = f'(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ nên hàm $y = f'(2019^x)$ đồng biến trên $[0;1]$.

Mà $2019^x > 0; f'(2019^x) > 0, \forall x \in (0;1)$ nên hàm $h(x) = 2019^x \ln 2019.f'(2019^x)$ đồng biến trên $[0;1]$.

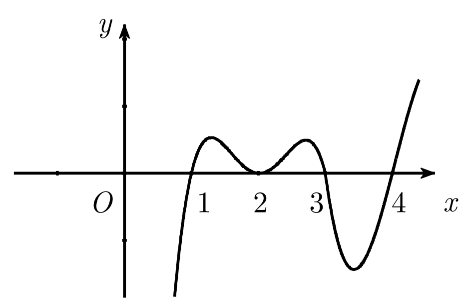
Hay $h(x) \geq h(0) = 0, \forall x \in [0;1]$.

Do vậy, hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[0;1] \Leftrightarrow g'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [0;1]$

$\Leftrightarrow m \leq 2019^x.\ln 2019.f'(2019^x), \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow m \leq 0$.

Vậy $m \leq 0$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(3x+1) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = 3\left[f'(3x+1) + 1 - x^2\right]$

$f'\left(3x+1\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x+1<1\\3<3x+1<4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<0\\\dfrac{2}{3}<x<1\end{array}\right.$.

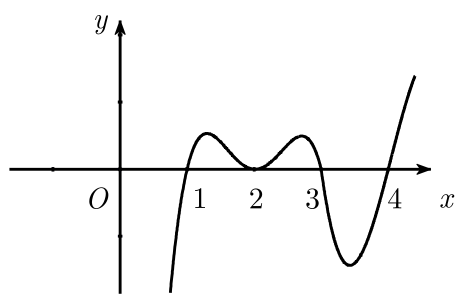
$f'\left(3x+1\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<\dfrac{2}{3}\\x>1\end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'\left(x\right)$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{2}{3}$		1		2		$+\infty$
$f'\left(3x+1\right)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$g'\left(x\right)$		$-$				$+$							

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.

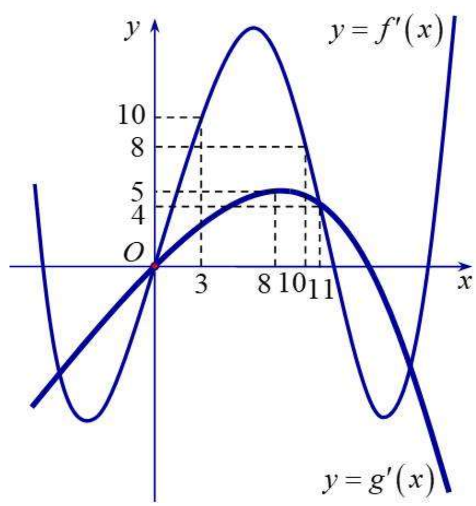
Câu 12: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)-\left(\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x+4\right)$ nghịch biến trong khoảng nào?

A. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$. **B.** $\left(-3;0\right)$. **C.** $\left(1;\sqrt{3}\right)$. **D.** $\left(-\sqrt{3};+\infty\right)$.

Câu 13: Cho hai hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$. Hai hàm số $y=f'\left(x\right)$ và $y=g'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong **đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y=g'\left(x\right)$.



Hàm số $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(5; \frac{31}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$. **C.** $\left(\frac{31}{5}; +\infty\right)$. **D.** $\left(6; \frac{25}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Kẻ đường thẳng $y = 10$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại $A(a;10)$, $a \in (8;10)$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} f(x+4) > 10, \text{khi } 3 < x+4 < a \\ g\left(2x - \frac{3}{2}\right) \le 5, \text{khi } 0 \le 2x - \frac{3}{2} < 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+4) > 10, \text{khi } -1 < x < 4 \\ g\left(2x - \frac{3}{2}\right) \le 5, \text{khi } \frac{3}{4} \le x \le \frac{25}{4} \end{cases}.$$

Do đó $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right) > 0$ khi $\frac{3}{4} \le x < 4$.

Kiểu đánh giá khác:

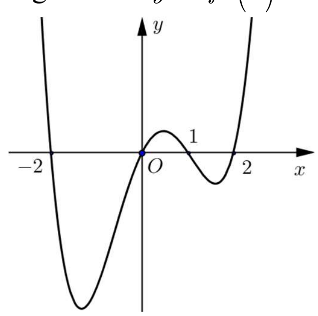
Ta có $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right)$.

Dựa vào đồ thị, $\forall x \in \left(\frac{9}{4}; 3\right)$, ta có $\frac{25}{4} < x + 4 < 7$, $f(x+4) > f(3) = 10$;

$3 < 2x - \frac{3}{2} < \frac{9}{2}$, do đó $g\left(2x - \frac{3}{2}\right) < f(8) = 5$.

Suy ra $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right) > 0, \forall x \in \left(\frac{9}{4}; 3\right)$. Do đó hàm số đồng biến trên $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$, biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên



Hàm số $y = f(2-x) + 2019$ đồng biến trên các khoảng

A. $(-2;0)$ và $(1;2)$. **B.** $(-2;0)$ và $(2;4)$. **C.** $(0;1)$ và $(1;2)$. **D.** $(0;1)$ và $(2;4)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -f'(2-x)$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow f'(2-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x=-2 \\ 2-x=0 \\ 2-x=1 \\ 2-x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \\ x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu $y' = -f'(2-x)$:

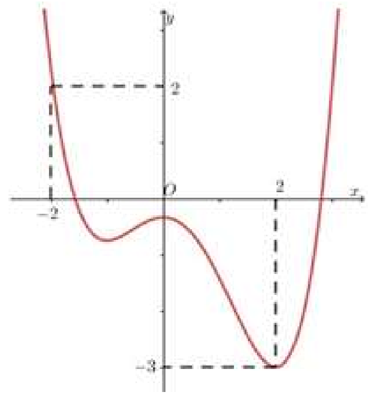
x	$-\infty$		0		1		2		4		$+\infty$
$y' = -f'(2-x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	

x	$-\infty$	0	1	2	4	$+\infty$

y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;1),(2;4)$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của $m\in(-20;20)$ để hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x^3}{4}\right)-\dfrac{m\left(x^2+4\right)^2}{20}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=\dfrac{3x^2}{4}\cdot f'\left(\dfrac{x^3}{4}\right)-\dfrac{mx\left(x^2+4\right)}{5}$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$ ($g'(x)=0$ chỉ tại hữu hạn điểm). Điều này tương đương với

$$\frac{3x}{4}\cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right)\ge\frac{m\left(x^2+4\right)}{5}\Leftrightarrow m\le\frac{15x}{4\left(x^2+4\right)}\cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right),\ \forall x\in(0;+\infty).$$

Với $x>0$ thì $\dfrac{x^3}{4}>0\Rightarrow f'\left(\dfrac{x^3}{4}\right)\ge -3$. Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{x^3}{4}=2\Leftrightarrow x^3=8\Leftrightarrow x=2$.

Ta có $0<\dfrac{x}{x^2+4}\le\dfrac{x}{4x}=\dfrac{1}{4},\ \forall x>0$. Đẳng thức xảy ra khi $x=2$.

Suy ra $\dfrac{15x}{4\left(x^2+4\right)}\cdot f'\left(\dfrac{x^3}{4}\right)\ge\dfrac{15}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot(-3)=-\dfrac{45}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=2$.

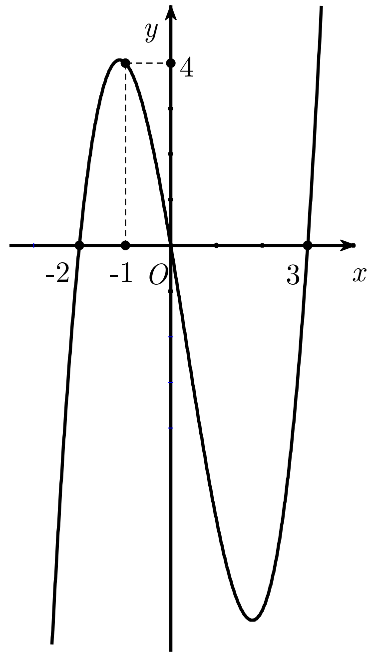
Như thế, $m\le-\dfrac{45}{16}$. Kết hợp với m nguyên âm và $m\in(-20;20)$ thì $m\in\{-19;-18;\cdots;-3\}$.

Vậy có 17 số nguyên âm của $m\in(-20;20)$ để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

3. Các bài toán về cực trị

3.1. Dạng 1. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xác định cực trị của $y=f(x)$.

Câu 16: Cho hàm số F là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $F(0)=m$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của *m* để hàm số $y=\left|F\left(x\right)\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f\left(x\right)=x^3-x^2-6x$

Khi đó $F(x)=\int f\left(x\right)dx=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-3x^2+m$.

$F'\left(x\right)=f\left(x\right)=x^3-x^2-6x=0$ có 3 nghiệm -2; 0; 3 nhận xét $F=m$

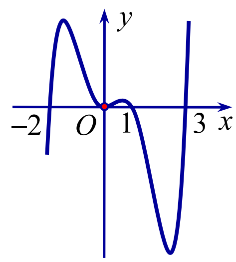
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$m-\dfrac{16}{3}$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-\dfrac{63}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số $y=\left|F\left(x\right)\right|$ có 7 điểm cực trị thì $\begin{cases} m>0 \\ m-\dfrac{16}{3}<0 \end{cases}$ suy ra có 5 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

3.2. Dạng 2. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ hoặc $y=f\left(x\right)$ xác định cực trị của $y=f\left(u\left(x\right)\right)$, $y=u\left(f\left(x\right)\right)$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên.



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị $y=f'\left(x\right)$ ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=1\\x=3\end{array}\right.$;

$f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\-2<x<1\end{array}\right.$; $f'\left(x\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\1<x<3\end{array}\right.$.

Ta có $g'\left(x\right)=2xf'\left(x^2\right)$; $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1\\x^2=3\\x^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$.

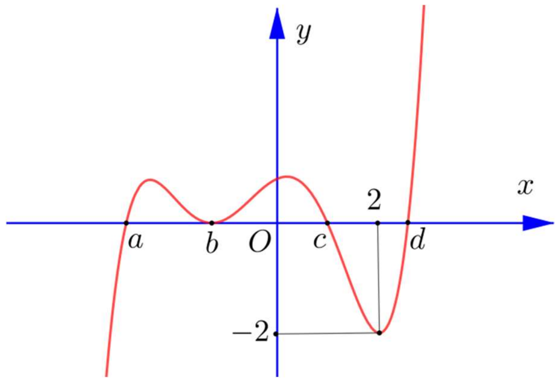
Ta có $f'\left(x^2\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x^2<1\\x^2>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<x<1\\x\neq0\end{cases}\\\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{3}\\x<-\sqrt{3}\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g\left(x\right)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 18: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x^2\right)\right]^{2021}$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g\left(x\right)=\left[f\left(x^2\right)\right]^{2021}\Rightarrow g'\left(x\right)=4042x.f'\left(x^2\right).\left[f\left(x^2\right)\right]^{2020}$

Dựa vào đồ thị ta có $f'\left(x\right)=k\left(x-a\right)\left(x-b\right)^{2m}\left(x-c\right)\left(x-d\right),\,k>0$

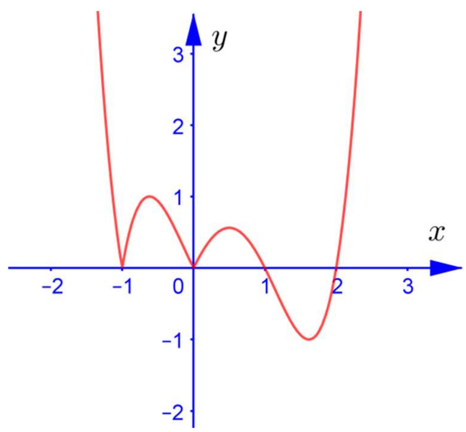
$f'\left(x^2\right)=0\Rightarrow k\left(x^2-a\right)\left(x^2-b\right)^{2m}\left(x^2-c\right)\left(x^2-d\right)$

$\Rightarrow g'\left(x\right)=4042k.x.\left(x^2-a\right)\left(x^2-b\right)^{2m}\left(x^2-c\right)\left(x^2-d\right).\left[f\left(x^2\right)\right]^{2020}$

Do $\left[f\left(x^2\right)\right]^{2020}\geq 0;\left(x^2-b\right)^{2m}\geq 0\;\Rightarrow g'\left(x\right)=0$ có 5 nghiệm $\pm\sqrt{c};\pm\sqrt{d};0$

Vậy hàm số $g\left(x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc 6 có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x+1\right)^3+m\right]^7$ có 2 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g\left(x\right)=\left[f\left(x+1\right)^3+m\right]^7\Rightarrow g'\left(x\right)=21.\left[f\left(x+1\right)^3+m\right]^6.f\left(x+1\right)^2.f'\left(x+1\right)$

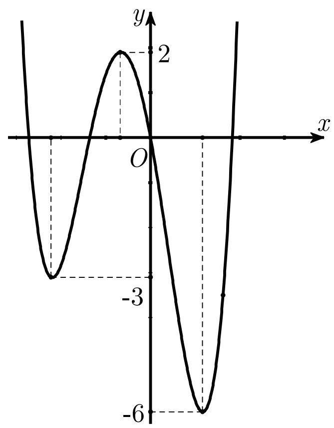
Ta có $\left[f\left(x+1\right)^3+m\right]^6.f\left(x+1\right)^2$ nên dấu của $g'\left(x\right)$ phụ thuộc vào dấu $f'\left(x+1\right)$.

Hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên có 2 điểm cực trị, số điểm cực trị hàm $f(x+1)$ bằng số điểm cực trị hàm $f(x)$ nên $g(x)$ có 2 điểm cực trị với mọi m.

Vậy với mọi m hàm số $g(x)$ đều có 2 điểm cực trị.

3.3. Dạng 3. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ hoặc $y=f(x)$ xác định cực trị của $y=\left|f(x)\right|$, $y=\left|f(u(x))\right|$.

Câu 20: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x-1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 12. **B.** 15. **C.** 18. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang phải 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y=f(x-1)$.

Do đó đồ thị hàm số $y=f(x-1)$ có 3 cực trị và có 4 giao điểm với Ox.

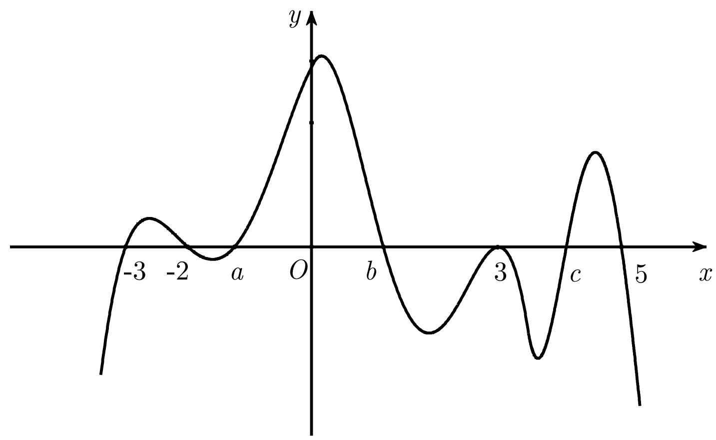
Để được đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ với m nguyên dương ta phải tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x-1)$ lên trên m đơn vị.

Để thỏa mãn điều kiện đề bài thì đồ thị hàm số $y=f(x-1)+m$ cắt Ox tại đúng 2 điểm , do đó $3\le m<6 \Rightarrow S=\{3;4;5\}$.

Tổng giá trị các phần tử của S là 12.

3.4. Dạng 4. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ hoặc $y=f(x)$ xác định cực trị của $y=f\left(\left|x\right|\right)$, $y=f\left(u\left(\left|x\right|\right)\right)$.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3;-2;a;b;3;c;5$ với $-\dfrac{4}{3}<a<-1;1<b<\dfrac{4}{3};4<c<5$ có dạng như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(2\left|x\right|+m-3\right)$ có 7 điểm cực trị?



A. 2.   **B.** 3.   **C.** 4.   **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta thấy hàm số $y = f\left(x\right)$ đạt cực trị tại các điểm $-3; -2; a; b; c; 5$.

Xét hàm số $y = g\left(x\right) = f\left(2\left|x\right| + m - 3\right)$

$g'\left(x\right) = \dfrac{2x}{\left|x\right|}.f'\left(2\left|x\right| + m - 3\right)$.

Khi đó, để xác định số điểm cực trị của hàm số $y = g\left(x\right)$ ta cần xác định số nghiệm của hệ

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2\left|x\right| + m - 3 \in \left\{-3; -2; a; b; c; 5\right\} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \left|x\right| \in \left\{\dfrac{-m}{2}; \dfrac{-m+1}{2}; \dfrac{a+3-m}{2}; \dfrac{b+3-m}{2}; \dfrac{c+3-m}{2}; \dfrac{m+8}{2}\right\} \end{array}\right.$$

Đặt $x_1 = \dfrac{-m}{2}; x_2 = \dfrac{-m+1}{2}; x_3 = \dfrac{a+3-m}{2}; x_4 = \dfrac{b+3-m}{2}; x_5 = \dfrac{c+3-m}{2}; x_6 = \dfrac{m+8}{2}$.

Ta có $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$.

Với mỗi $i = 1; 2; \ldots; 7$

Nếu $x_i > 0$ phương trình $\left|x\right| = x_i$ có hai nghiệm phân biệt $x = \pm x_i$, dẫn đến $x = \pm x_i$ là hai điểm cực trị của hàm số $y = g\left(x\right)$.

Nếu $x_i = 0$ phương trình $\left|x\right| = x_i$ có duy nhất $x = 0$, dẫn đến $x = 0$ là điểm cực trị của hàm số $y = g\left(x\right)$.

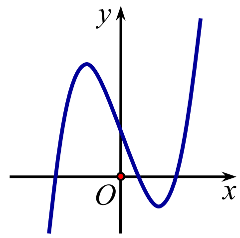
Nếu $x_i < 0$ phương trình $\left|x\right| = x_i$ vô nghiệm.

Do đó, hàm số $y = g\left(x\right)$ có 7 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow x_3 \le 0 < x_4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a+3-m}{2} \le 0 \\ \dfrac{b+3-m}{2} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a + 3 \le m < b + 3 \Rightarrow -1 + 3 \le m < \dfrac{4}{3} + 3.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $2; 3; 4$.

Câu 22: Hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$.



Hỏi hàm số $y = f\left(|x|\right) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Từ đồ thị hàm số của $f'\left(x\right)$ ta thấy $f\left(x\right)$ có hai cực trị dương nên hàm số $y = f\left(|x|\right)$ lấy đối xứng phần đồ thị hàm số bên phải trục tung qua trục tung ta được bốn cực trị, cộng thêm giao điểm của đồ thị hàm số $y = f\left(|x|\right) + 2018$ với trục tung nữa ta được tổng cộng là 5 cực trị.

Cách 2: Ta có: $y = f\left(|x|\right) + 2018 = f\left(\sqrt{x^2}\right) + 2018$.

Đạo hàm $y' = f'\left(\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}.f'\left(|x|\right)$.

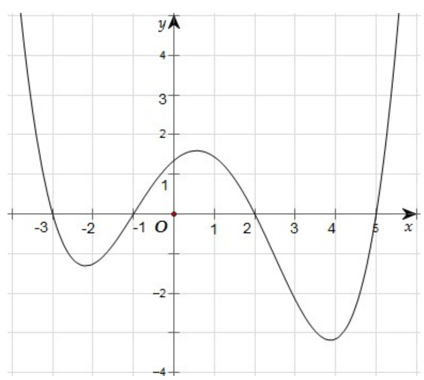
Từ đồ thị hàm số của $f'\left(x\right)$ suy ra $f'\left(x\right)$ cùng dấu với $\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right)$ với $x_1 < 0$, $0 < x_2 < x_3$.

Suy ra $f'\left(|x|\right)$ cùng dấu với $\left(|x| - x_1\right)\left(|x| - x_2\right)\left(|x| - x_3\right)$.

Do $|x| - x_1 > 0$ nên $y' = f'\left(\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}f'\left(|x|\right)$ cùng dấu với $\left(|x| - x_2\right)\left(|x| - x_3\right).\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$.

Vậy hàm số $y = f\left(|x|\right) + 2018$ có 5 cực trị.

Câu 23: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g\left(x\right) = f\left(|x| + m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)$ có đúng 7 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g\left(x\right) = f\left(|x| + m\right) = \begin{cases} f\left(x + m\right) & , khi\ x \geq 0 \\ f\left(-x + m\right), & khi\ x < 0 \end{cases}$

Do hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Hàm số $g\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$

Và ta lại có $g(-x) = f(|x| + m) = g(x) \Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = g(x)$ đối xứng qua trục Oy.

Hàm số $y = g(x)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị dương, 3 điểm cực trị âm và một điểm cực trị bằng 0

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right.$

Xét trên khoảng $(0; +\infty)$, ta được $g(x) = f(x + m)$

+ Ta có $g'(x) = f'(x + m)$

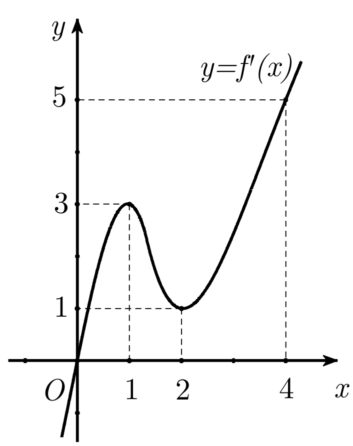
+ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + m = -3 \\ x + m = -1 \\ x + m = 2 \\ x + m = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m - 3 \\ x = -m - 1 \\ x = -m + 2 \\ x = -m + 5 \end{array}\right.$

+ Nhận thấy $-m - 3 < -m - 1 < -m + 2 < -m + 5$

Theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -m - 1 > 0 \\ -m - 3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in \{-3; -2\} \end{cases}$

3.5. Dạng 5. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ hoặc $y = f(x)$ xác định cực trị của $y = f(u(x)) + g(x)$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0$; $f''(x) > -\frac{1}{6}, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = \left|f(x^2) - mx\right|$, với m là tham số dương, có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

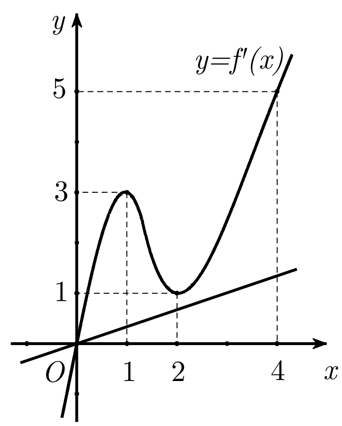
Do đó, $f'(x^2) > 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Xét hàm số $h\left(x\right)=f\left(x^2\right)-mx$; $h'\left(x\right)=2x.f'\left(x^2\right)-m$.

Với $x<0$, $h'\left(x\right)<0\Rightarrow$ Phương trình $h'\left(x\right)=0$ vô nghiệm.

Với $x\ge 0$ ta có $h''\left(x\right)=2f'\left(x^2\right)+4x^2f''\left(x^2\right)>2f'\left(x^2\right)-\dfrac{2x^2}{3}$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta thấy với $x\ge 0$, đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ luôn nằm trên đường thẳng $y=\dfrac{x}{3}$.



Do đó, $2f'\left(x^2\right)-\dfrac{2x^2}{3}\ge 0,\forall x\ge 0\Rightarrow h''\left(x\right)\ge 0,\forall x\ge 0$ hay hàm số $y=h'\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Mà $h'\left(0\right)=-m<0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}h'\left(x\right)=+\infty$ nên phương trình $h'\left(x\right)=0$ có một nghiệm duy nhất $x_0\in\left(0;+\infty\right)$

Bảng biến thiên

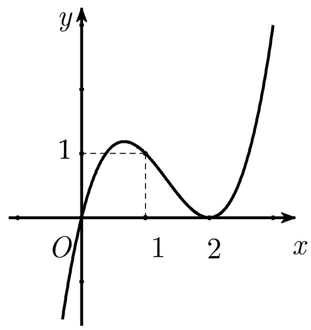
x	$-\infty$		0		x_0		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$h\left(x_0\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó phương trình $h\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Đồng thời hàm số $y=h\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x=x_0$, giá trị cực tiểu $h\left(x_0\right)<0$.

Vậy hàm số $y=\left|h\left(x\right)\right|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 25: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc bốn thỏa mãn $f\left(0\right)f\left(2\right)<0$. Biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x^2\right)+\dfrac{x^4}{2}-2x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

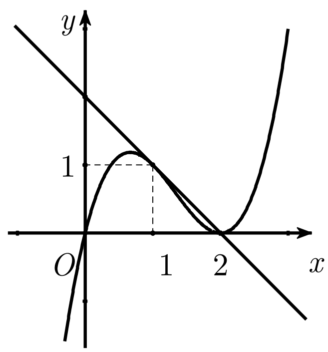


A. 7 **B.** 8 **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $h\left(x\right)=f\left(x^2\right)+\dfrac{x^4}{2}-2x^2$; $h'\left(x\right)=2x.f'\left(x^2\right)+2x^3-4x=2x\left[f'\left(x^2\right)+x^2-2\right]$.



Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ và hàm số $y=-x+2$ suy ra

$f'\left(x\right)+x-2>0,\forall x\in\left(2;+\infty\right)$ và $f'\left(x\right)+x-2<0,\forall x\in\left(-\infty;2\right)$.

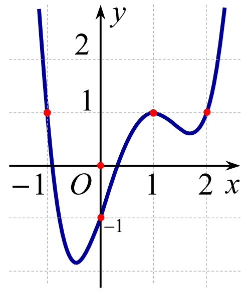
Do đó, $f'\left(x^2\right)+x^2-2<0\Leftrightarrow x^2<2\Leftrightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g\left(x\right)$	$+\infty$		$f\left(2\right)$				$f\left(0\right)$				$f\left(2\right)$		$+\infty$

Từ giả thiết $f\left(0\right)f\left(2\right)<0$ suy ra $g\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt và hàm số $g\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị do đó hàm số $h\left(x\right)=\left|g\left(x\right)\right|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 26: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Đặt $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x$. Hàm số $g\left(x\right)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

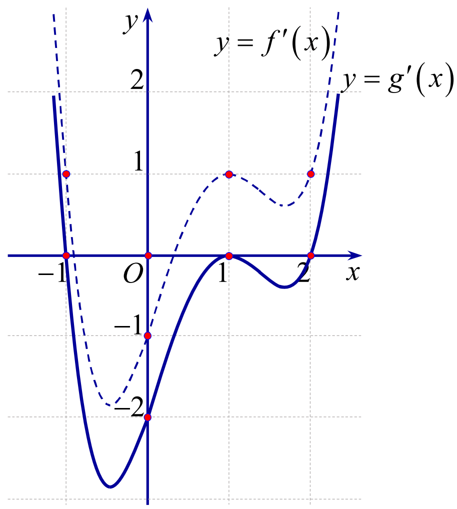


A. $x = 2$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chọn B

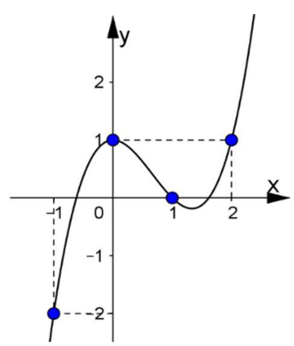
Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$. Do đó đồ thị của hàm số $g'(x)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị của hàm số $f'(x)$ đi xuống 1 đơn vị.



Quan sát đồ thị $g'(x)$ ta thấy $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua điểm $x = -1$.

Do đó $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



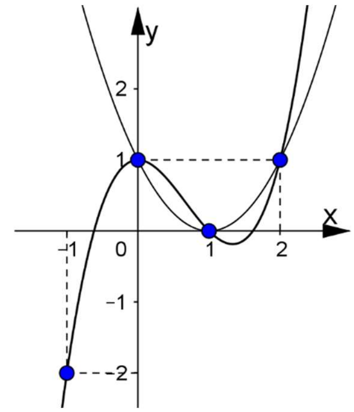
Hàm số $g(x) = f(x) - \dfrac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x = 1$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $g'(x) = f'(x) - (x-1)^2$ do đó số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f'(x)$ và parabol $y = (x-1)^2$; $g'(x) > 0$ khi đồ thị $y = f'(x)$ nằm trên parabol $y = (x-1)^2$ và ngược lại.

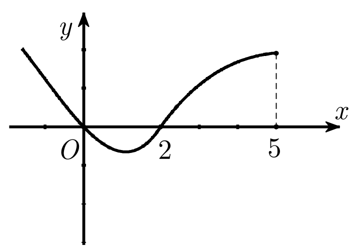


Từ đồ thị suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$ nhưng $g'(x)$ chỉ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x = 1$. Do đó hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

4. Các bài toán về min, max

4.1. Dạng 1. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ xác định min, max của $y = f\left(x\right)$.

Câu 28: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f\left(0\right) + f\left(3\right) = f\left(2\right) + f\left(5\right)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;5\right]$ lần lượt là



A. $f\left(0\right), f\left(5\right)$. **B.** $f\left(2\right), f\left(0\right)$. **C.** $f\left(1\right), f\left(5\right)$. **D.** $f\left(2\right), f\left(5\right)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Bảng biến thiên:

x	0		2		5
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$f\left(0\right)$	$\searrow$	$f\left(2\right)$	$\nearrow$	$f\left(5\right)$

Dựa vào đồ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[2;5]} f\left(x\right) = f\left(2\right)$

Và $\max\limits_{\left[0;5\right]} f\left(x\right) = \max\left\{f\left(0\right), f\left(5\right)\right\}$

Vì $f\left(x\right)$ đồng biến trên đoạn $\left[2;5\right]$ nên

$f\left(3\right) > f\left(2\right) \Rightarrow f\left(5\right) - f\left(2\right) > f\left(5\right) - f\left(3\right) = f\left(0\right) - f\left(2\right)$

Do đó $f\left(5\right) > f\left(0\right)$, vậy $\max\limits_{\left[0;5\right]} f\left(x\right) = \max\left\{f\left(0\right), f\left(5\right)\right\} = f\left(5\right)$

Cách 2:

Căn cứ đồ thị của $y = f'\left(x\right)$ và ứng dụng tích phân, ta có:

$S_1 = \int_0^2 |f'(x)|dx = \int_0^2 f'(x)dx = f(0) - f(2)$ và $S_2 = \int_2^5 |f'(x)|dx = \int_2^5 f'(x)dx = f(2) - f(5)$

Theo giả thiết, ta có $f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Rightarrow f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$

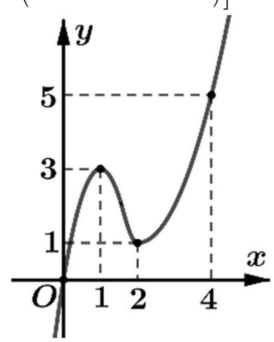
Suy ra $S_2 = \int_2^5 |f'(x)|dx > \int_3^5 |f'(x)|dx = f(5) - f(3) = S_1$.

Suy ra $S_2 > S_1 > 0 \Rightarrow f(5) > f(0) > f(2)$.

Vậy $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2), \max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

4.2. Dạng 2. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ hoặc $y = f(x)$ xác định min, max của $y = f(u(x))$, $y = u(f(x))$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $M,\ m$ lần lượt là GTLN – GTNN của hàm số $g(x) = f\left[2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right]$.



Tổng $M + m$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

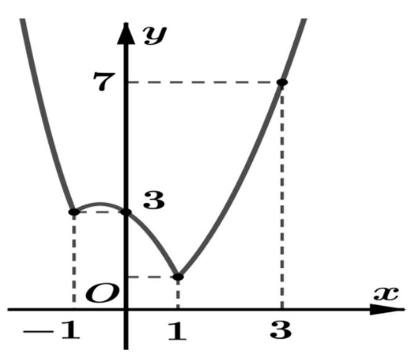
Chọn C

Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vì $0 \le \sin^2 2x \le 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \le 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \le 2(\sin^4 x + \cos^4 x) \le 2$.

Dựa vào đồ thị suy ra $\begin{cases} M = \max g(x) = f(1) = 3 \\ m = \min g(x) = f(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow M + m = 4$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị là hình bên và hàm số $y = g(t) = t^3 - 3t^2 + 5$. Gọi $M,\ m$ theo thứ tự là GTLN – GTNN của $y = g(|f(x) - 2|)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tích $M.m$ bằng



A. 2. **B.** 3. **C.** 54. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

$y=g\left(\left|f\left(x\right)-2\right|\right)=\left|f\left(x\right)-2\right|^{3}-3\left(f\left(x\right)-2\right)^{2}+5$.

Trên $\left[-1;3\right]$, ta có $1\le f\left(x\right)\le 7\Leftrightarrow -1\le f\left(x\right)-2\le 5\longrightarrow 0\le \left|f\left(x\right)-2\right|\le 5.$

Đặt $t=\left|f\left(x\right)-2\right|$ với $t\in\left[0;5\right]$. Khi đó $y=t^{3}-3t^{2}+5\rightarrow y'=3t^{2}-6t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.$.

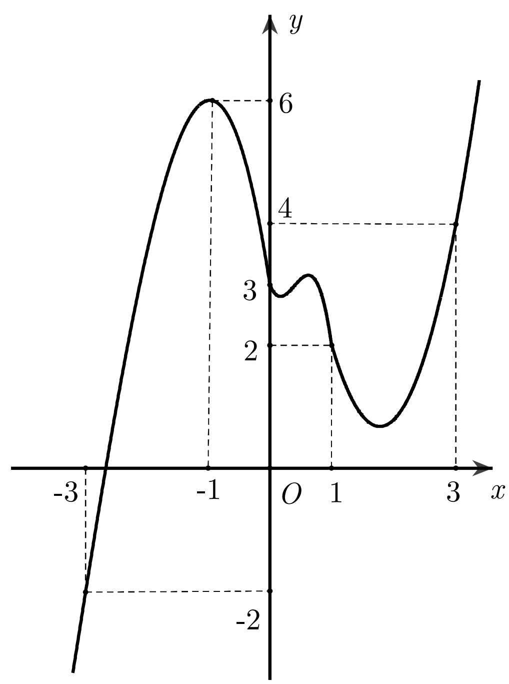
Ta có $y\left(0\right)=5;\ y\left(2\right)=1;\ y\left(5\right)=55.$ Suy ra $\begin{cases}M=55\\m=1\end{cases}\longrightarrow M.m=55.$

4.3. Dạng 3. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ hoặc $y=f\left(x\right)$ xác định min, max của $y=\left|f\left(x\right)\right|$, $y=\left|f\left(u\left(x\right)\right)\right|$.

4.4. Dạng 4. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ hoặc $y=f\left(x\right)$ xác định min, max của $y=f\left(\left|x\right|\right)$, $y=f\left(u\left(\left|x\right|\right)\right)$.

4.5. Dạng 5. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ hoặc $y=f\left(x\right)$ xác định min, max của $y=f\left(u\left(x\right)\right)+g\left(x\right)$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

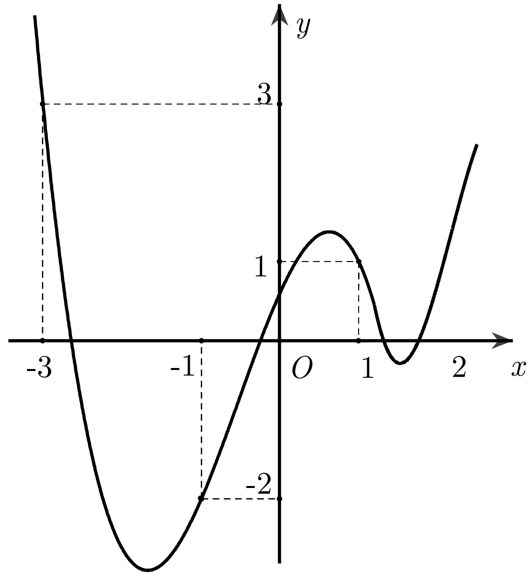


Đặt $g\left(x\right)=2f\left(x\right)-\left(x+1\right)^{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$. **B.** $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

C. $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(3)$. **D.** Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên $\left[-3;3\right]$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{1}{3}x^{3}-\dfrac{3}{4}x^{2}+\dfrac{3}{2}x+2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

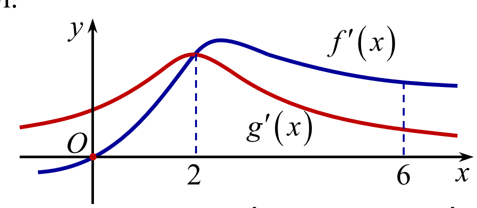
A. $\min\limits_{\left[-3;\,1\right]} g\left(x\right)=g\left(-1\right)$.

B. $\min\limits_{\left[-3;\,1\right]} g\left(x\right)=g\left(1\right)$.

C. $\min\limits_{\left[-3;\,1\right]} g\left(x\right)=g\left(-3\right)$.

D. $\min\limits_{\left[-3;\,1\right]} g\left(x\right)=\dfrac{g\left(-3\right)+g\left(1\right)}{2}$.

Câu 33: Cho hai hàm số $y=f(x)$, có đạo hàm là $f^{'}(x)$, $g^{'}(x)$. Đồ thị hàm số $y=f^{'}(x)$ và $g^{'}(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0)-f(6)<g(0)-g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là

A. $h(6)$, $h(2)$. **B.** $h(2)$, $h(6)$. **C.** $h(0)$, $h(2)$. **D.** $h(2)$, $h(0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $h^{'}(x)=f^{'}(x)-g^{'}(x)$; $h^{'}(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên

x	0		2		6
$h'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	
$h\left(x\right)$	$h\left(0\right)$	$\searrow$	$h\left(2\right)$	$\nearrow$	$h\left(6\right)$

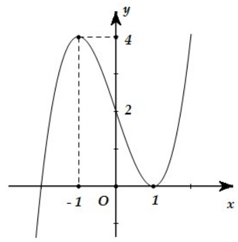
Và $f(0)-f(6)<g(0)-g(6) \Leftrightarrow f(0)-g(0)<f(6)-g(6)$. Hay $h(0)<h(6)$.

Vậy $\max_{[0,6]} h(x)=h(6)$; $\min_{[0,6]} h(x)=h(2)$.

5. Các bài toán về tiệm cận

5.1. Dạng 1. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ hoặc $y=f\left(x\right)$ xác định tiệm cận của đồ thị hàm số $y=g\left(f\left(x\right)\right), y=\dfrac{h\left(x\right)}{g\left(f\left(x\right)\right)}$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{f^2\left(x\right)-4f\left(x\right)}$ bằng



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$

Dựa vào đồ thị của $y=f\left(x\right)$, ta có $\begin{cases} f\left(-1\right)=4 \\ f\left(1\right)=0 \\ f'\left(-1\right)=0 \\ f'\left(1\right)=0 \\ f\left(0\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c+d=4 \\ a+b+c+d=0 \\ 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=2 \end{cases}$

Do đó $f\left(x\right)=x^3-3x+2$

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{f^2\left(x\right)-4f\left(x\right)}=\dfrac{x^2-1}{\left(x^3-3x+2\right)^2-4\left(x^3-3x+2\right)}=\dfrac{x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2\left(x^2-4\right)}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm1;\pm2\right\}$. Do đó $y=\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}$

Ta có

□ $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}=-\infty$

$\Rightarrow$ $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

□ $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}=+\infty$

$\Rightarrow$ $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

□ $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}=+\infty$

$\Rightarrow$ $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

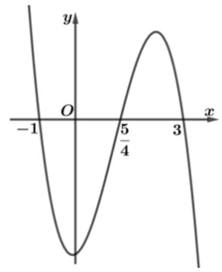
□ $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}=-\infty$

$\Rightarrow$ $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có 4 đường tiệm cận.

Câu 35: Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2018}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx\ (m,n,p,q\in\mathbb{R})$.

Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 2

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$. Từ đồ thị ta có $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{5}{4}\\x=3\end{array}\right.$ và $(m<0)$.

Suy ra $h'(x)=4m(x+1)\left(x-\dfrac{5}{4}\right)(x-3)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$.

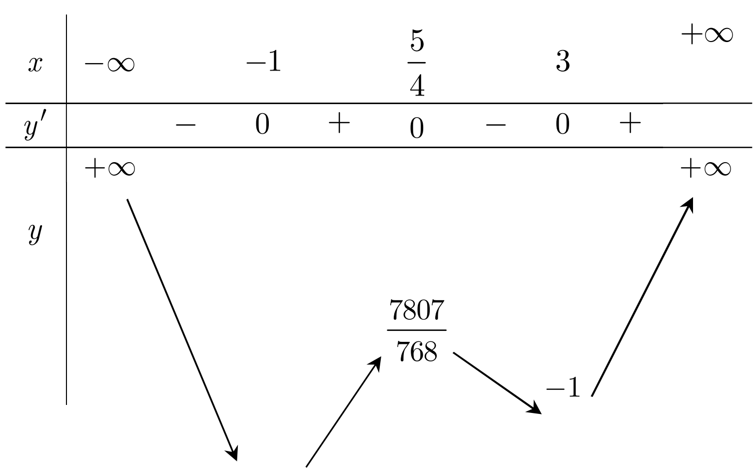
Suy ra $h(x)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx+C$. Từ đề bài ta có $C=0$.

Vậy $h(x)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx$.

Xét $h(x)-m^2-m=0\Leftrightarrow m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$.

Xét hàm số $f(x)=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1\Rightarrow f'(x)=4x^3-13x^2-2x+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{5}{4}\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



$-\dfrac{35}{3}$

Để đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h\left(x\right)-m^2-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m<0$ ta có $-\dfrac{35}{3}<m<-1$.

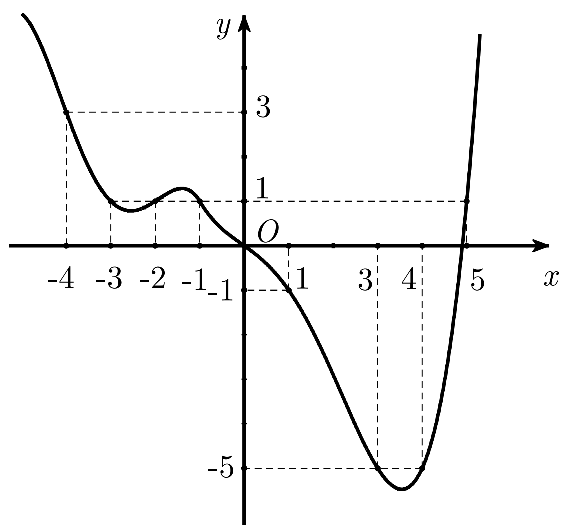
Do m nguyên nên $m\in\left\{-11;-10;...;-2\right\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

6. CÁC BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO

6.1. Dạng 1. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ hoặc $y=f\left(x\right)$ xác định số nghiệm phương trình $f\left(x\right)=g\left(m\right)$.

6.2. Dạng 2. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và sự biến thiên của $y=u\left(x\right)$ xác định số nghiệm phương trình $f\left(u\left(x\right)\right)=g\left(m\right)$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Số nghiệm của phương trình $f\left(2\sin x\right)=1$ trên đoạn $\left[0;2\pi\right]$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2\sin x$, $t\in\left[-2;2\right]$.

Xét phương trình $f\left(t\right)=1$, dựa vào đồ thị ta thấy

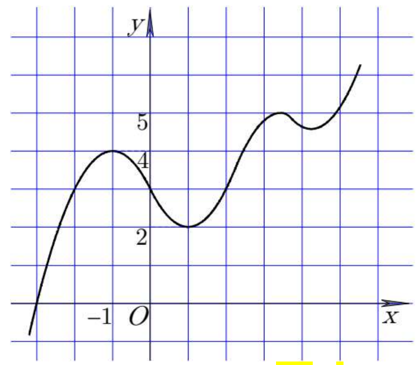
$$f\left(t\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-3\left(l\right)\\t=-2\left(n\right)\\t=-1\left(n\right)\\t=5\quad\left(l\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sin x=-2\\2\sin x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\\sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Với $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$, $x\in\left[0;2\pi\right]\Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{2}$.

Với $\sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$, $x\in\left[0;2\pi\right]\Rightarrow x=\frac{5\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm

Câu 37: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x^2-2x$, $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{3}{2}$		-1		$\frac{3}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]$.

Ta có: $f\left(x^2-2x\right)=m\ \left(1\right)\Leftrightarrow f\left(t\right)=m\ \left(2\right)$.

Ta thấy, với mỗi giá trị $t\in\left(-1;\frac{21}{4}\right]$ ta tìm được hai giá trị của $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.

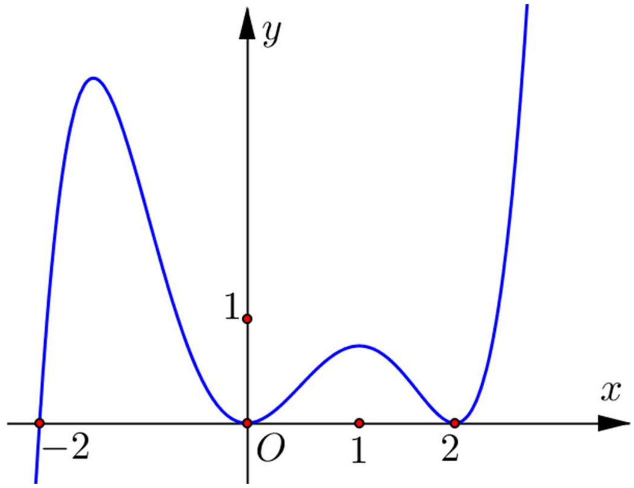
Do đó, phương trình $\left(1\right)$ có 4 nghiệm thực phân biệt thuộc $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $\left(2\right)$ có hai nghiệm thực phân biệt thuộc $\left(-1;\frac{21}{4}\right]$

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc $\left(-1;\frac{21}{4}\right]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy có hai giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu là $m=3$ và $m=5$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'\left(x\right)=0$

A. 14. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right).f'\left(f\left(x\right)\right)$

Cho $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow f'\left(x\right).f'\left(f\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x\right)=0\ \left(1\right) \\ f'\left(f\left(x\right)\right)=0\ \left(2\right) \end{array}\right.$.

Từ $\left(1\right)$ ta có $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\ \left(-2<a<-1\right) \\ x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Vậy $f'\left(x\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Từ $\left(2\right)$ ta có $f'\left(f\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=a\ \left(-2<a<-1\right) \\ f\left(x\right)=0 \\ f\left(x\right)=1 \\ f\left(x\right)=2 \end{array}\right.$.

Với $f\left(x\right)=0$. Dựa vào đồ thị phương trình $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ trong đó nghiệm $x=0$; $x=2$ trùng với nghiệm phương trình $f'\left(x\right)=0$.

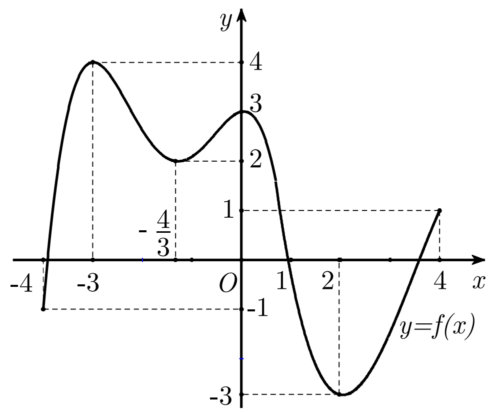
Với $f\left(x\right)=1$. Dựa vào đồ thị phương trình $f\left(x\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_2 \\ x=x_3 \\ x=x_4 \end{array}\right.$.

Với $f\left(x\right)=2$. Dựa vào đồ thị phương trình $f\left(x\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_5 \\ x=x_6 \\ x=x_7 \end{array}\right.$

Với $f\left(x\right)=a\ \left(-2<a<-1\right)$. Dựa vào đồ thị phương trình $f\left(x\right)=a$ có 1 nghiệm x_8.

Vậy phương trình $g'\left(x\right)=0$ có 12 nghiệm.

Câu 39: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\left[-4;4\right]$, có các điểm cực trị trên $\left(-4;4\right)$ là $-3;-\dfrac{4}{3};0;2$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x^3+3x\right)+m$ với m là tham số. Gọi m_1 là giá trị của m để $\max\limits_{[0;1]} g\left(x\right)=4$, m_2 là giá trị của m để $\min\limits_{[-1;0]} g\left(x\right)=-2$. Giá trị của m_1+m_2 bằng



A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t\left(x\right)=x^3+3x$ với $x\in\left[-4;4\right]$. Ta có $t'\left(x\right)=3x^2+1>0,\ \forall x\in\left[-4;4\right]$.

Suy ra hàm số $t\left(x\right)$ đồng biến trên $(-4;4)$ nên $x\in\left[0;1\right]\Rightarrow t\in\left[0;4\right]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\max\limits_{[0;4]} f\left(t\right)=3\Rightarrow \max\limits_{[0;4]}\left[f\left(t\right)+m\right]=m+3$.

Mà $\max\limits_{[0;1]} g\left(x\right)=4\Rightarrow m+3=4\Rightarrow m=1\Rightarrow m_1=1$.

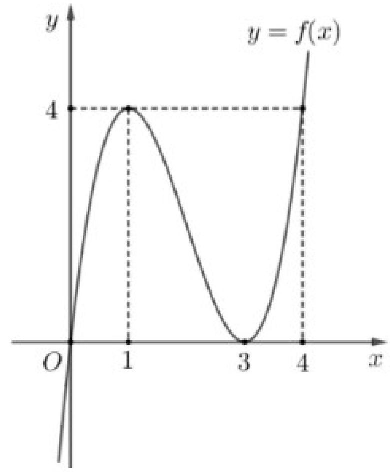
Tương tựhàm số $t\left(x\right)$ đồng biến nên $x\in\left[-1;0\right]\Rightarrow t\in\left[-4;0\right]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\min\limits_{[-4;0]} f\left(t\right)=-1\Rightarrow \min\limits_{[-4;0]}\left[f\left(t\right)+m\right]=m-1$.

Mà $\min\limits_{[-1;0]} g\left(x\right)=-2\Rightarrow m-1=-2\Rightarrow m=-1\Rightarrow m_2=-1$.

Khi đó $m_1+m_2=1+(-1)=0$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left[x\left(x-3\right)^2\right]=m$ có 9 nghiệm thực thuộc đoạn $\left[0;4\right]$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=x\left(x-3\right)^2$ khi đó $t'=0\Leftrightarrow\left(x-3\right)^2+2x\left(x-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của t như sau

x	$-\infty$		0		1		3		4		$+\infty$
$t'\left(x\right)$		$+$			0	$-$	0			$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

+ Nếu $\left[\begin{array}{l}t<0\\t>4\end{array}\right.$ phương trình $t=x\left(x-3\right)^2$ không có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;4\right]$.

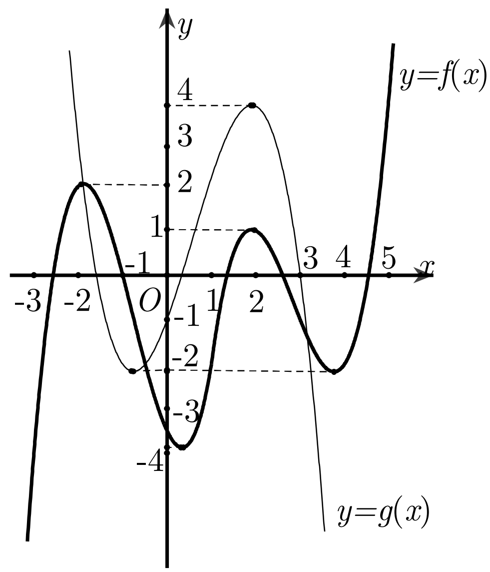
+ Nếu $\left[\begin{array}{l}t=0\\t=4\end{array}\right.$ phương trình $t=x\left(x-3\right)^2$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0;4\right]$.

+ Nếu $0<t<4$ phương trình $t=x\left(x-3\right)^2$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;4\right]$.

Vậy phương trình $f\left[x\left(x-3\right)^2\right]=m$ có 9 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[0;4\right]\Leftrightarrow f\left(t\right)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt $t\in\left(0;4\right)\Leftrightarrow 0<m<4\Rightarrow m\in\left\{1,2,3\right\}$.

6.3. Dạng 3. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ xác định số nghiệm phương trình $f\left(g\left(x\right)\right)=0$.

Câu 41: Cho hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên.



Khi đó, tổng số nghiệm của hai phương trình $f\left(g\left(x\right)\right)=0$ và $g\left(f\left(x\right)\right)=0$ là

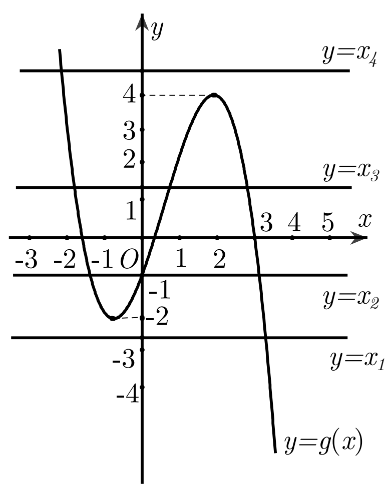
A. 22. **B.** 21. **C.** 25. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A

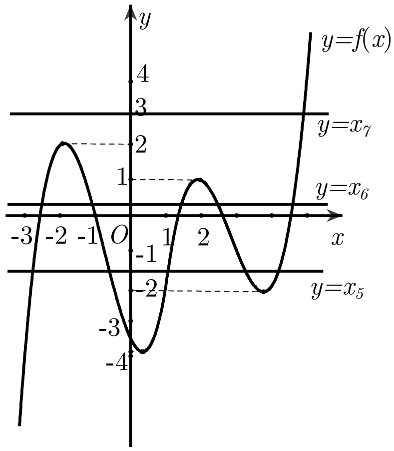
Từ đồ thị ta có

Phương trình $f\left(x\right)=0$ có các nghiệm $-3<x_1<-2<x_2=-1<1<x_3<2<4<x_4<5$.



Do đó, $f\left(g\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g\left(x\right)=x_1 \\ g\left(x\right)=x_2 \\ g\left(x\right)=x_3 \\ g\left(x\right)=x_4 \end{array}\right.$ tổng số nghiệm của các phương trình này là 11.

Phương trình $g\left(x\right)=0$ có các nghiệm $-2<x_5<0<x_6<1<3=x_7$.

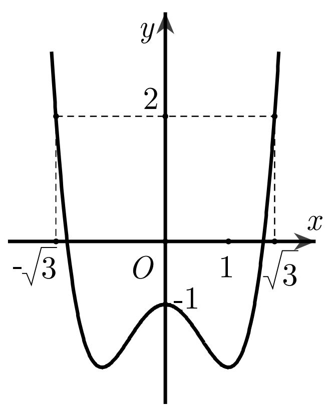


Do đó, $g\left(f\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=x_5 \\ f\left(x\right)=x_6 \\ f\left(x\right)=x_7 \end{array}\right.$ tổng số nghiệm của các phương trình này là 11.

Vậy tổng số nghiệm của hai phương trình là 22.

6.4. Dạng 4. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ và sự biến thiên của $y=u\left(x\right)$ xác định số nghiệm phương trình $f\left(x\right)-u\left(x\right)=g\left(m\right)$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $3f\left(x\right)\geq x^3-3x+m$, với m là tham số thực, nghiệm đúng với $\forall x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ là

A. $m\geq 3f\left(-\sqrt{3}\right)$. **B.** $m\leq 3f\left(0\right)$. **C.** $m\geq 3f\left(1\right)$. **D.** $m\leq 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

ChọnD.

Ta có $3f\left(x\right)-x^3+3x-m\geq 0 \Leftrightarrow 3f\left(x\right)-x^3+3x\geq m$.

Đặt $h\left(x\right)=3f\left(x\right)-x^3+3x$. Ta có $h'\left(x\right)=3f'\left(x\right)-3x^2+3$. Suy ra

$$\begin{cases} h'\left(-\sqrt{3}\right)=3f'\left(-\sqrt{3}\right)-6=0 \\ h'\left(\sqrt{3}\right)=3f'\left(\sqrt{3}\right)-6=0 \\ h'\left(0\right)=3f'\left(0\right)+3=0 \\ h'\left(1\right)=3f'\left(1\right)<0 \end{cases}$$

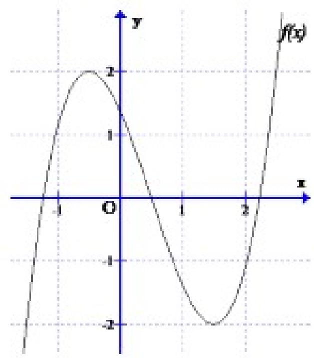
Ta có bảng biến thiên

x	$-\sqrt{3}$		0		1		$\sqrt{3}$
$h'(x)$		$-$	0		$-$		
$h(x)$	$h(-\sqrt{3})$	$\searrow$	$h(0)$		$\searrow$		$h(\sqrt{3})$

Do đó, bất phương trình $3f(x) \ge x^3 - 3x + m$ đúng với $\forall x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

$\Leftrightarrow m \le h(\sqrt{3}) \Leftrightarrow m \le 3f(\sqrt{3})$.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(\left|f(x)\right|\right)\right| - \left|f(x)\right| = 0$ là

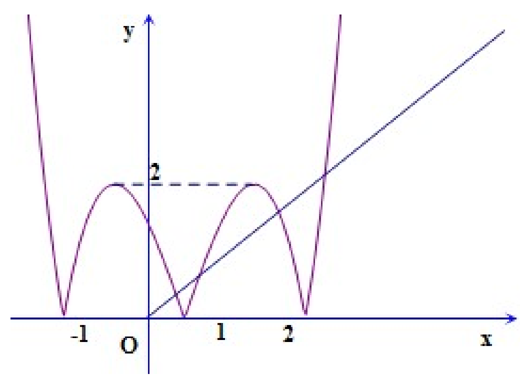
A. 20. **B.** 24. **C.** 10. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\left|f(x)\right| = t \ge 0$. Khi đó phương trình trở thành

$\left|f(t)\right| = t, (1)$.



Từ đồ thị hàm số ta có

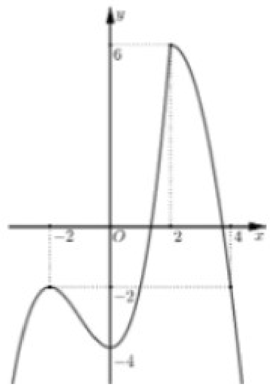
Phương trình (1) có 4 nghiệm $\left[\begin{array}{l} t = a, (0 < a < 1) \\ t = b, (a < b < 1) \\ t = c, (1 < c < 2) \\ t = d, (2 < d) \end{array}\right.$

Khi đó các phương trình $\left|f\left(x\right)\right| = a, \left|f\left(x\right)\right| = b, \left|f\left(x\right)\right| = c$ mỗi phương trình có 6 nghiệm phân biệt không trùng nhau. Phương trình $\left|f\left(x\right)\right| = d$ có 2 nghiệm phân biệt không trùng với nghiệm của 3 phương trình trên.

Vậy phương trình đã cho có 20 nghiệm phân biệt.

Câu 44: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;2\right]$?

A. 11 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 7



Lời giải

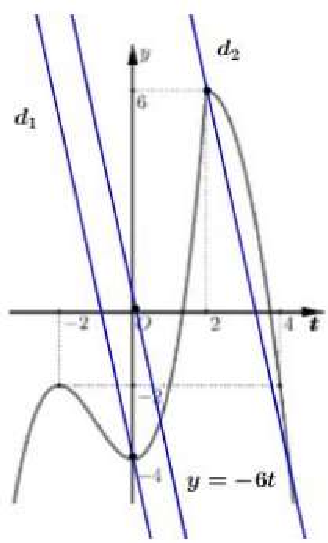
Chọn D

Đặt $t = \frac{x}{2}+1, x \in \left[-2;2\right] \Rightarrow t \in \left[0;2\right]$ và $x = 2\left(t-1\right)$

Khi đó ta có $\frac{1}{3}f\left(t\right)+2\left(t-1\right)=m, t \in \left[0;2\right] \Leftrightarrow f\left(t\right)=3m-6\left(t-1\right)=-6t+3m+6\left(*\right)$

Số nghiệm của $\left(*\right)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f\left(t\right)$ và đường thẳng $\left(d\right): y = -6t+3m+6$

Vẽ đồ thị hàm số $y = f\left(t\right)$ và $y = -6t$ trên cùng 1 mặt phẳng tọa độ ta có:



Gọi d_1 là đường thẳng đi qua $\left(0;-4\right)$ và song song với đường thẳng $y = -6t \Rightarrow \left(d_1\right): y = -6t-4$

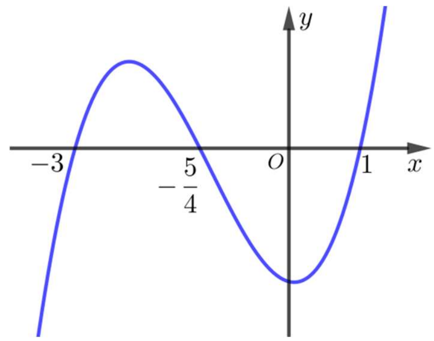
Gọi d_1 là đường thẳng đi qua $\left(2;5\right)$ và song song với đường thẳng $y = -6t \Rightarrow \left(d_2\right): y = -6t+17$

Để phương trình có nghiệm $t \in [0;2] \Rightarrow$ Đường thẳng $(d): y = -6t + 3m + 6$ nằm giữa hai đường thẳng (d_1) và $(d_2) \Rightarrow -4 \le 3m + 6 \le 14 \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \le m \le \frac{11}{3}$.

Kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$

Vậy có 7 giá trị của *m* thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m$, . Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = 48ax + m$ có số phần tử là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ (1).

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) = a(x-1)(4x+5)(x+3) = 4ax^3 + 13ax^2 - 2ax - 15a$ (2) và $a \ne 0$.

Từ (1) và (2) suy ra $b = \frac{13}{3}a$, $c = -a$ và $d = -15a$.

Khi đó:

$f(x) = 48ax + m \Leftrightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = 48ax$

$\Leftrightarrow a\left(x^4 + \frac{13}{3}x^3 - x^2 - 63x\right) = 0$

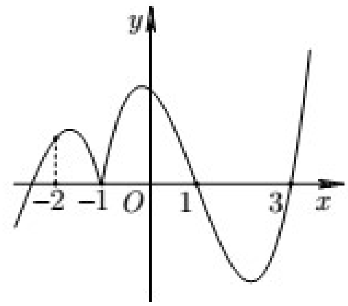
$\Leftrightarrow 3x^4 + 13x^3 - 3x^2 - 189x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = 48ax + m$ là $S = \{0;3\}$.

6.5. Dạng 5. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định số nghiệm phương trình $f(f(x)) = 0$; $f(f(f(x))) = 0;\ldots$

6.6. Dạng 6. Dạng toán khác.

Câu 46: Cho hàm số $y = f(\mathrm{x})$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $\left(mx + m^2\sqrt{5-x^2} + 2m + 1\right)f(x) \ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;2]$?



A. 1. **B.** 3 . **C.** 0 . **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = mx + m^2\sqrt{5 - x^2} + 2m + 1$.

Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = 1$ là nghiệm bội lẻ.

Vì $g(x).f(x) \geq 0, \forall x \in [-2;2]$

Suy ra $g(1) = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -\dfrac{1}{2}(L) \end{array}\right.$.

Với $m = -1$, $g(x) = -x + \sqrt{5 - x^2} - 1$.

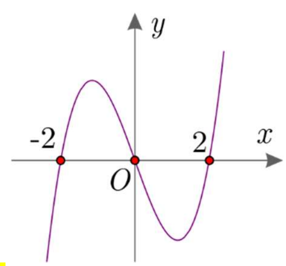
Ta có: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [-2;1]$; $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) = \dfrac{4 - 2x^2 - 2x}{\sqrt{5 - x^2} + x + 1} < 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2]$.

Vậy với $m = -1$, ta có $g(x).f(x) \geq 0, \forall x \in [-2;2]$.

7. Các bài toán mũ, logarit

7.1. Dạng 1. Bài toán liên quan tính đơn điệu.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(\ln x + 1)$ nghịch biến trên khoảng



A. $(e;+\infty)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{e};e\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{e^3};\dfrac{1}{e}\right)$. **D.** $(0;e)$.

Lời giải

Chọn B

$y = f(\ln x + 1) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}f'(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow f'(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = e^{-3} \\ \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} \\ \ln x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = e \end{array}\right.$

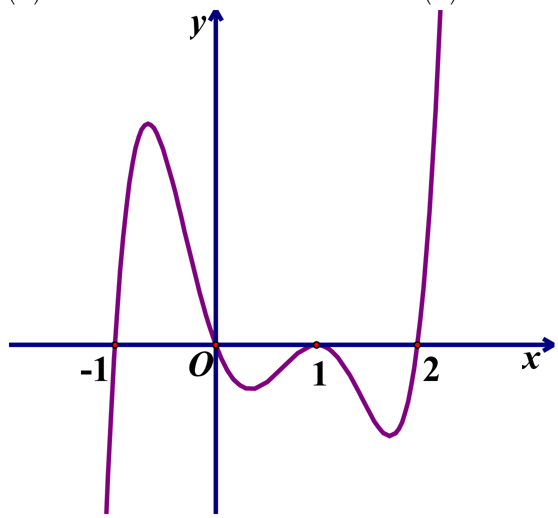
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		e^{-3}		e^{-1}		e		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Do đó, hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{e};e\right)$.

Câu 48: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g\left(x\right)=2018^{2019-2f\left(x\right)+2f^2\left(x\right)-f^3\left(x\right)}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;0\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(1;2\right)$. **D.** $\left(2;3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Xét $g'\left(x\right)=-f'\left(x\right).\left[3f^2\left(x\right)-4f\left(x\right)+2\right].2018^{2019-2f\left(x\right)+2f^2\left(x\right)-f^3\left(x\right)}.\ln 2018$

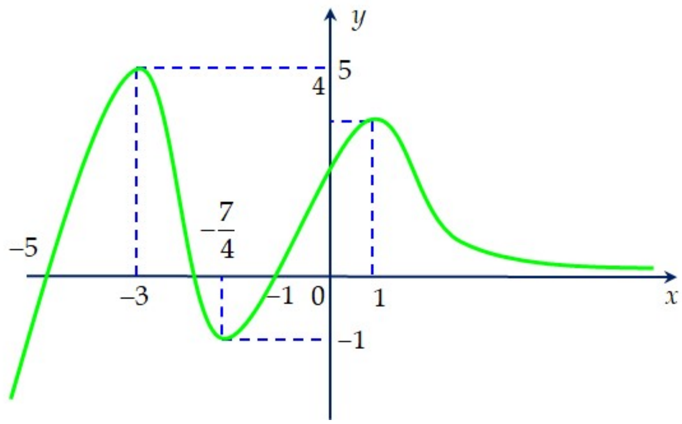
Có $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$, trong đó $x=1$ là nghiệm kép.

Bảng xét dấu của $g'\left(x\right)$:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng, suy ra hàm số nghịch biến trên $\left(2;3\right)$, do $\left(2;3\right)\subset\left(2;+\infty\right)$.

Câu 49: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau



Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f\left(e^{3f\left(x\right)+1}+2^{f\left(x\right)}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty;-5\right)$. **B.** $\left(-3;\frac{-7}{4}\right)$. **C.** $\left(-1;+\infty\right)$. **D.** $\left(-3;-1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$g'\left(x\right)=\left(3f'\left(x\right).e^{3f\left(x\right)+1}+2^{f\left(x\right)}.f'\left(x\right).\ln 2\right).f'\left(e^{3f\left(x\right)+1}+2^{f\left(x\right)}\right)$$
$$=f'\left(x\right).\left(3.e^{3f\left(x\right)+1}+2^{f\left(x\right)}.\ln 2\right).f'\left(e^{3f\left(x\right)+1}+2^{f\left(x\right)}\right)$$

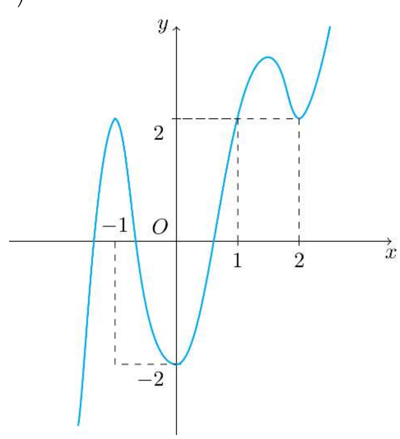
$ycbt\Leftrightarrow g'\left(x\right)<0$. Mà ta thấy rằng:

$$\begin{cases}3.e^{3f\left(x\right)+1}+2^{f\left(x\right)}.\ln 2>0\\ e^{3f\left(x\right)+1}+2^{f\left(x\right)}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3.e^{3f\left(x\right)+1}+2^{f\left(x\right)}.\ln 2>0\\ f'\left(e^{3f\left(x\right)+1}+2^{f\left(x\right)}\right)>0\end{cases}$$

Suy ra $g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow f'\left(x\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-5\\ x_0<x<-1\left(x_0\in\left(-3;\frac{-7}{4}\right)\right)\end{array}\right.$

Vậy hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;-5\right)$.

Câu 50: Cho hàm số $y=f'\left(x-1\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



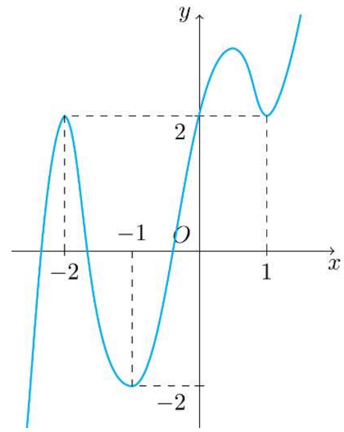
Hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-\infty;0\right)$. **B.** $\left(-2;0\right)$. **C.** $\left(0;+\infty\right)$. **D.** $\left(-2;1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'\left(x-1\right)$ sang trái 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ như sau



Xét hàm số $y = \pi^{2f(x)-4x}$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = \pi^{2f(x)-4x} \cdot (2f'(x) - 4) \cdot \ln \pi$

$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. .$$

Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$			0	$+$			
y		$\searrow$				$\nearrow$			

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

7.2. Dạng 2. Bài toán liên quan cực trị.

7.3. Dạng 3. Bài toán liên quan min, max.

7.4. Dạng 4. Bài toán liên quan tiệm cận.

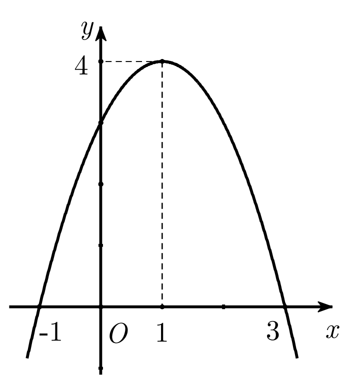
7.5. Dạng 5. Bài toán tương giao.

7.6. Dạng 6. Bài toán liên quan tiếp tuyến.

8. Các bài toán tích phân và ứng dụng tích phân

8.1. Dạng 1. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ xác định giá trị của $f\left(a\right) - f\left(b\right)$.

Câu 51: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\left(a,b,c,d \in \mathbb{R}, a \neq 0\right)$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Biết rằng đồ thị $\left(C\right)$ đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Giá trị $f(4) - f(2)$ là



A. -2. **B.** 2. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

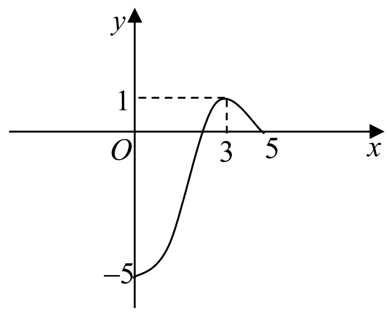
Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra $f'(x) = -(x-1)^2 + 4$.

Vậy $f(4) - f(2) = \int\limits_2^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^4 \left(-(x-1)^2 + 4\right)\mathrm{d}x = \left(-\dfrac{(x-1)^3}{3}\right)\Bigg|_2^4 + 8 = -\dfrac{2}{3}$.

8.2. Dạng 2. Sử dụng diện tích hình phẳng so sánh $f(a), f(b)$; tìm min, max.

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên.



Tìm mệnh đề đúng

A. $f(0) = f(5) < f(3)$. **B.** $f(3) < f(0) = f(5)$. **C.** $f(3) < f(0) < f(5)$. **D.** $f(3) < f(5) < f(0)$.

Lời giải

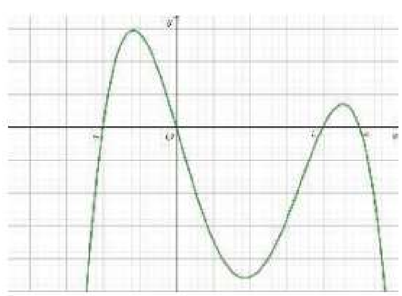
Chọn C

Ta có $\int\limits_3^5 f'(x)\mathrm{d}x = f(5) - f(3) > 0$, do đó $f(5) > f(3)$.

$\int\limits_0^3 f'(x)\mathrm{d}x = f(3) - f(0) < 0$, do đó $f(3) < f(0)$

$\int\limits_0^5 f'(x)\mathrm{d}x = f(5) - f(0) < 0$, do đó $f(5) < f(0)$

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết phương trình $f'(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt a, 0, b, c với $a < 0 < b < c$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $f(a) > f(c) > f(b)$. **B.** $f(a) > f(b) > f(c)$. **C.** $f(c) > f(a) > f(b)$. **D.** $f(b) > f(a) > f(c)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		a		0		b		c		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$	$f\left(-2\right)$	$\nearrow$	$f\left(0\right)$	$\searrow$	$f\left(b\right)$	$\nearrow$	$f\left(c\right)$	$\searrow$	

Suy ra $f\left(c\right) > f\left(b\right)$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f'\left(x\right)$, đường thẳng $x = a$, $x = 0$.

S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f'\left(x\right)$, đường thẳng $x = 0$, $x = b$.

S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f'\left(x\right)$, đường thẳng $x = b$, $x = c$.

Vì $S_1 + S_3 < S_2 \Leftrightarrow \int\limits_a^0 \left|f'\left(x\right)\right| \mathrm{d}x + \int\limits_b^c \left|f'\left(x\right)\right| \mathrm{d}x < \int\limits_0^b \left|f'\left(x\right)\right| \mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_a^0 f'\left(x\right) \mathrm{d}x + \int\limits_b^c f'\left(x\right) \mathrm{d}x < -\int\limits_0^b f'\left(x\right) \mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow f\left(0\right) - f\left(a\right) + f\left(c\right) - f\left(b\right) < -f\left(b\right) + f\left(0\right)$

$\Leftrightarrow f\left(a\right) > f\left(c\right)$

$\Rightarrow f\left(a\right) > f\left(c\right) > f\left(b\right)$.

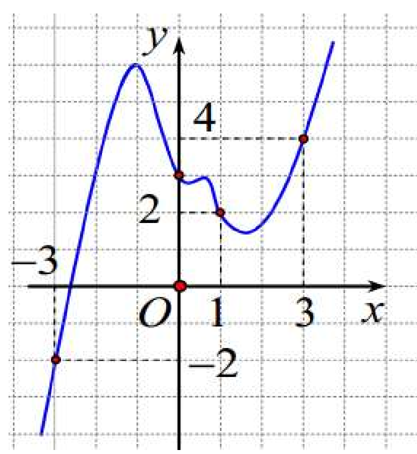
Câu 54: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'\left(x\right)$ cho như hình dưới đây. Đặt $g\left(x\right) = 2f\left(x\right) - \left(x+1\right)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

A. $\min\limits_{\left[-3;3\right]} g\left(x\right) = g\left(1\right)$.

B. $\max\limits_{\left[-3;3\right]} g\left(x\right) = g\left(1\right)$.

C. $\max\limits_{\left[-3;3\right]} g\left(x\right) = g\left(3\right)$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-3;3\right]$.



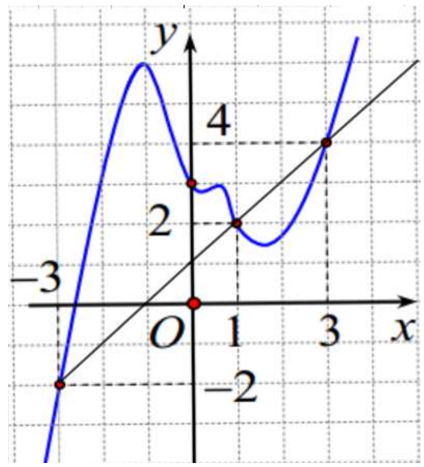
Lời giải

Chọn B

Ta có $g\left(x\right) = 2f\left(x\right) - \left(x+1\right)^2$

$\Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - (2x+2) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1$. Quan sát trên đồ thị ta có hoành độ giao điểm của $f'(x)$ và $y = x+1$ trên khoảng $(-3;3)$ là $x = 1$.

Vậy ta so sánh các giá trị $g(-3)$, $g(1)$, $g(3)$



Xét $\int_{-3}^{1} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x > 0 \Leftrightarrow g(1) - g(-3) > 0 \Leftrightarrow g(1) > g(-3)$.

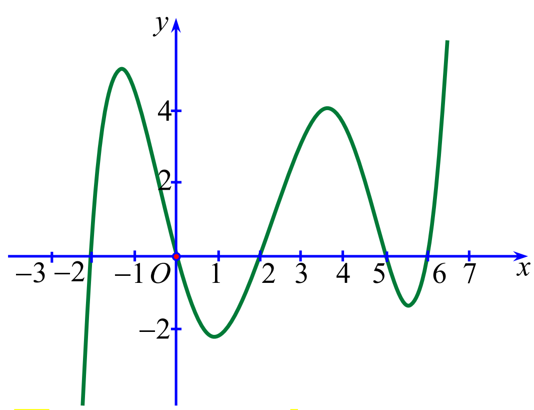
Tương tự xét $\int_{1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x < 0 \Leftrightarrow g(3) - g(1) < 0 \Leftrightarrow g(3) < g(1)$.

Xét $\int_{-3}^{3} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x + 2\int_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x > 0$

$\Leftrightarrow g(3) - g(-3) > 0 \Leftrightarrow g(3) > g(-3)$. Vậy ta có $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

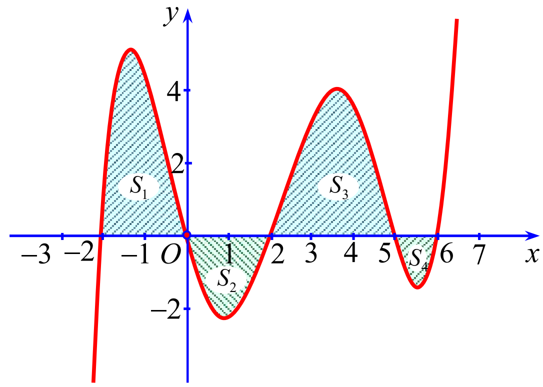
Câu 55: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $M = \max\limits_{[-2;6]} f(x)$, $m = \min\limits_{[-2;6]} f(x)$, $T = M + m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $T = f(0) + f(-2)$. **B.** $T = f(5) + f(-2)$. **C.** $T = f(5) + f(6)$. **D.** $T = f(0) + f(2)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với và trục hoành.

Quan sát hình vẽ, ta có

◈ $\int\limits_{-2}^{0} f'(x)\mathrm{d}x > \int\limits_{0}^{2} -f'(x)\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow f(x)\Big|_{-2}^{0} > f(x)\Big|_{2}^{0} \Leftrightarrow f(0) - f(-2) > f(0) - f(2)$

$\Leftrightarrow f(-2) < f(2)$

◈ $\int\limits_{0}^{2} -f'(x)\mathrm{d}x < \int\limits_{2}^{5} f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{0} < f(x)\Big|_{2}^{5} \Leftrightarrow f(0) - f(2) < f(5) - f(2)\ 0$

◈ $\int\limits_{2}^{5} f'(x)\mathrm{d}x > \int\limits_{5}^{6} -f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{5} > f(x)\Big|_{6}^{5} \Leftrightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(6) \Leftrightarrow f(2) < f(6)$

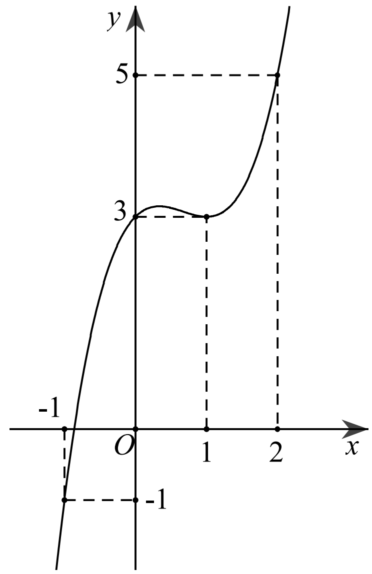
Ta có bảng biến thiên

x	-2		0		2		5		6
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			$f(0)$				$f(5)$		
		↗		↘	$f(2)$	↗		↘	
	$f(-2)$								$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = \max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(5)$ và $x = 0$

Khi đó $T = f(5) + f(-2)$.

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình 2 dưới đây.



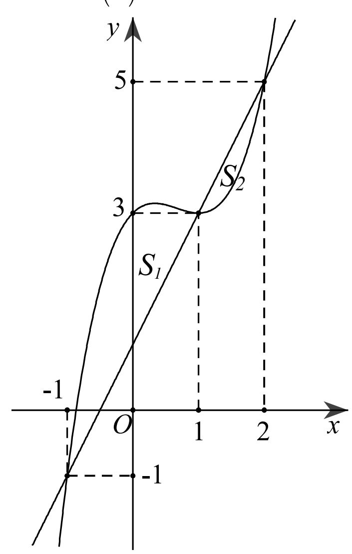
Lập hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(-1) > g(1)$. **B.** $g(-1) = g(1)$. **C.** $g(1) = g(2)$. **D.** $g(1) > g(2)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f'(x) - (2x+1)$. Khi đó hàm số $h(x)$ liên tục trên các đoạn $[-1;1]$, $[1;2]$ và có $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = h(x)$.



Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ y = f'(x) \\ y = 2x+1 \end{cases}$ là

$$S_1 = \int_{-1}^{1} \left| f'(x) - (2x+1) \right| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left[f'(x) - (2x+1) \right] \mathrm{d}x = g(x)\Big|_{-1}^{1} = g(1) - g(-1).$$

Vì $S_1 > 0$ nên $g(1) > g(-1)$.

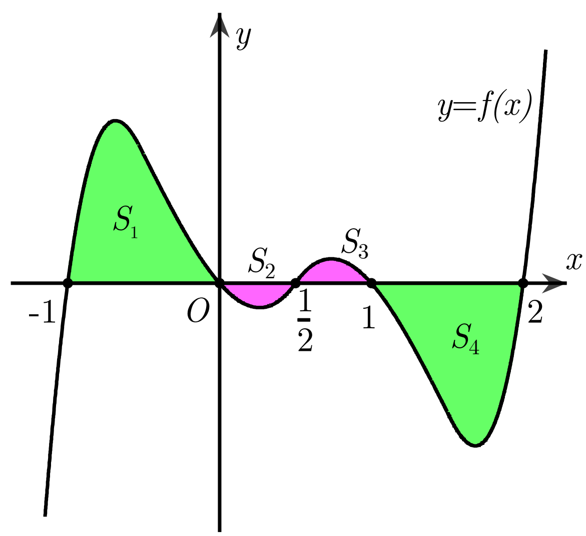
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ y = f'(x) \\ y = 2x+1 \end{cases}$ là

$$S_2 = \int_1^2 \left| f'(x) - (2x+1) \right| \mathrm{d}x = \int_1^2 \left[(2x+1) - f'(x) \right] \mathrm{d}x = -g(x)\Big|_1^2 = g(1) - g(2).$$

Vì $S_2 > 0$ nên $g(1) > g(2)$.

8.3. Dạng 3. Sử dụng định nghĩa xác định công thức diện tích.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị tạo với trục hoành các miền có diện tích S_1, S_2, S_3, S_4 như hình vẽ. Biết $S_1 = S_4 = \dfrac{2}{3}; S_2 = S_3 = \dfrac{13}{384}$, tích phân $I = \int_{-1}^{1} 2^x f(2^x) dx$ bằng



A. $I = -\dfrac{2}{3\ln 2}$.　　**B.** $I = \dfrac{47}{64}$.　　**C.** $I = \dfrac{2}{3}$.　　**D.** $I = -\dfrac{81}{128\ln 2}$.

Lời giải

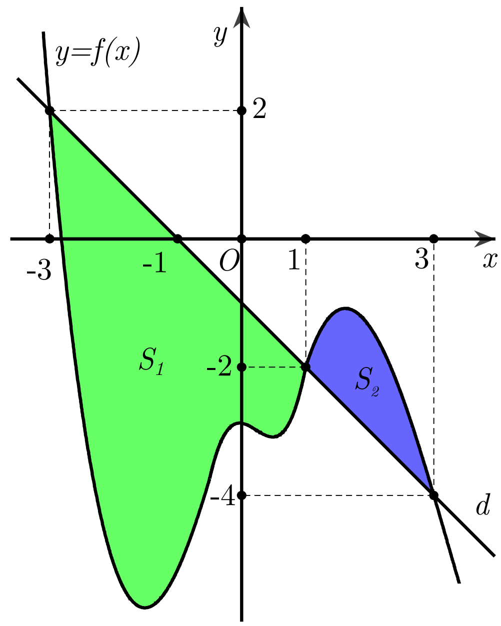
Chọn D

Đặt $t = 2^x \Rightarrow dt = 2^x \ln 2 dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{t\ln 2}$

Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$

$$I = \int_{-1}^{1} 2^x f(2^x) dx = \frac{1}{\ln 2} \int_{1/2}^{2} f(t) dt = \frac{1}{\ln 2} \left(\int_{1/2}^{1} f(t) dt + \int_{1}^{2} f(t) dt \right) = \frac{1}{\ln 2}(S_3 - S_4) = -\frac{81}{128\ln 2}.$$

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-3;3\right]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích hình phẳng $S_1;S_2$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng d lần lượt là $a;b$. Tính tích phân $\int\limits_{-1}^{1} f\left(3x\right)dx$.



A. $-\frac{a}{3}+\frac{b}{3}-2.$ **B.** $\frac{a}{3}-\frac{b}{3}-2.$ **C.** $-\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+2.$ **D.** $\frac{a}{3}-\frac{b}{3}+2.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=3x\Rightarrow dt=3dx\Rightarrow dx=\frac{1}{3}dt$

$$\int\limits_{-1}^{1} f\left(3x\right)dx=\frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3} f\left(t\right)dt=\frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3} f\left(x\right)dx$$

Gọi phương trình của đường thẳng d là $y=g\left(x\right)$. Ta có

$$\int\limits_{-3}^{1}\left[g\left(x\right)-f\left(x\right)\right]dx=a\Leftrightarrow\int\limits_{-3}^{1} g\left(x\right)dx-\int\limits_{-3}^{1} f\left(x\right)dx=a$$

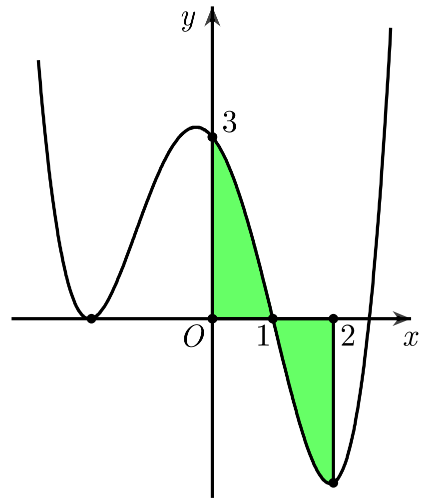
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}2.2-\frac{1}{2}2.2-\int\limits_{-3}^{1} f\left(x\right)dx=a\Leftrightarrow\int\limits_{-3}^{1} f\left(x\right)dx=-a$$

$$\int\limits_{1}^{3}\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]dx=b\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{3} f\left(x\right)dx+\left(\frac{1}{2}.4.4-\frac{1}{2}.2.2\right)=b\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{3} f\left(x\right)dx=b-6$$

Do đó

$$\int\limits_{-1}^{1} f\left(3x\right)dx=\frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3} f\left(x\right)dx=\frac{1}{3}\left[\int\limits_{-3}^{1} f\left(x\right)dx+\int\limits_{1}^{3} f\left(x\right)dx\right]=\frac{1}{3}\left(-a+b-6\right)=-\frac{a}{3}+\frac{b}{3}-2.$$

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $\left(C\right)$ là đường cong như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,x=2$ (phần tô màu) là



A. $S=-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích S của hình phẳng cần tìm là: $S=\int\limits_0^2 \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

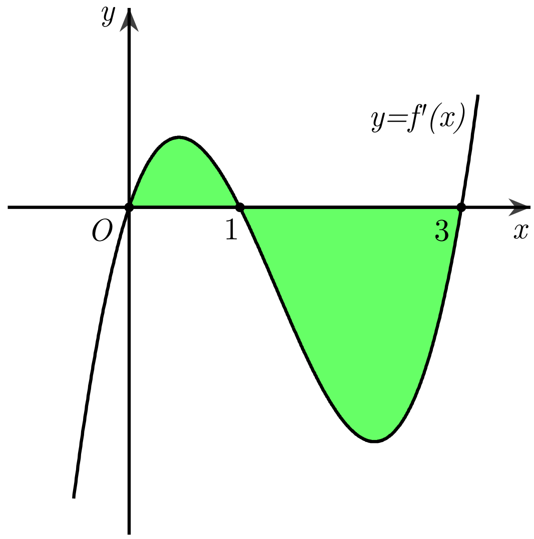
Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f\left(x\right)=0,\ x\in\left[0;2\right]$ có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Do đó $S=\int\limits_0^1 \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f\left(x\right)\geq 0,\ \forall x\in\left[0;1\right]$ và $f\left(x\right)\leq 0,\ \forall x\in\left[1;2\right]$.

Vậy $S=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên tập số thực. Miền hình phẳng trong hình vẽ được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ và trục hoành đồng thời có diện tích $S=a$. Biết rằng $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(2x+1\right)f'\left(2x\right)dx=\frac{b}{2}$ và $f\left(3\right)=c$. Tính $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$.



A. $a-b+c$. **B.** $a+b-c$. **C.** $-a+b-c$. **D.** $-a-b+c$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2x \Rightarrow dt=2dx$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x+1)f'(2x)\,dx=\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\int_0^1(t+1)f'(t)\,dt \Leftrightarrow \int_0^1(t+1)f'(t)\,dt=b \Leftrightarrow \int_0^1(x+1)f'(x)\,dx=b$$

Đặt $\begin{cases} u=x+1 \\ dv=f'(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases}$

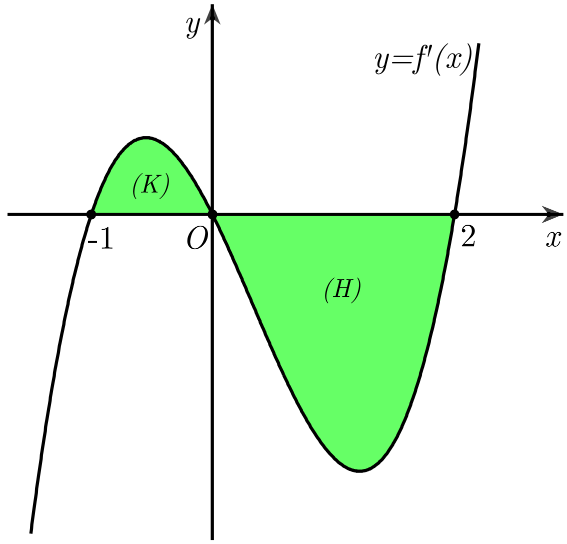
$$\int_0^1(x+1)f'(x)\,dx=b=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx=2f(1)-f(0)-b$$

Ta lại có $a=\int_0^1 f'(x)dx-\int_1^3 f'(x)dx \Leftrightarrow a=f(1)-f(0)+f(1)-f(3) \Leftrightarrow 2f(1)-f(0)=a+c$

Do đó $\int_0^1 f(x)\,dx=2f(1)-f(0)-b=a-b+c.$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới. Biết diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{8}{3}$ và $f(-1)=\frac{19}{12}; f(2)=-\frac{2}{3}$. Tính $I=\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f'(2x)dx$.

A. $I=\frac{5}{24}$. **B.** $I=\frac{8}{13}$. **C.** $I=\frac{4}{13}$. **D.** $I=\frac{4}{26}$.



Lời giải

Chọn A

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f'(2x)dx \xrightarrow[dt=2dx]{t=2x} I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f'(t)dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f'(x)dx$$

Ta có $\int_{-1}^{2} f'(x)dx=\int_{-1}^{0} f'(x)dx+\int_{0}^{2} f'(x)dx \Leftrightarrow f(2)-f(-1)=\int_{-1}^{0} f'(x)dx-\frac{8}{3}$

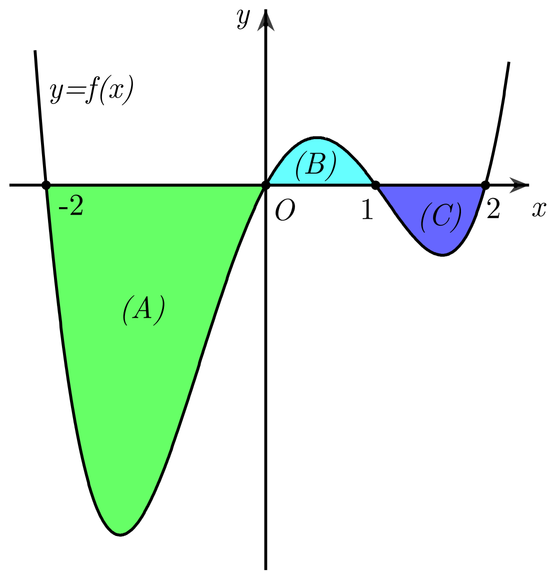
$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}-\frac{19}{12}=\int_{-1}^{0} f'(x)dx-\frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow \int_{-1}^{0} f'(x)dx=\frac{5}{12}$.

Do đó $I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f'(x)dx=\frac{5}{24}$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích các hình phẳng $(A),(B),(C)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành lần lượt bằng $\frac{124}{15};\frac{37}{60};\frac{53}{60}$.

Tích phân $\int_{1}^{3}\left(15f(2x-4)+3x^2+5\right)dx$ bằng



A. -28.   **B.** $\dfrac{437}{4}$.   **C.** 293.   **D.** $\dfrac{158}{15}$

Lời giải

Chọn A

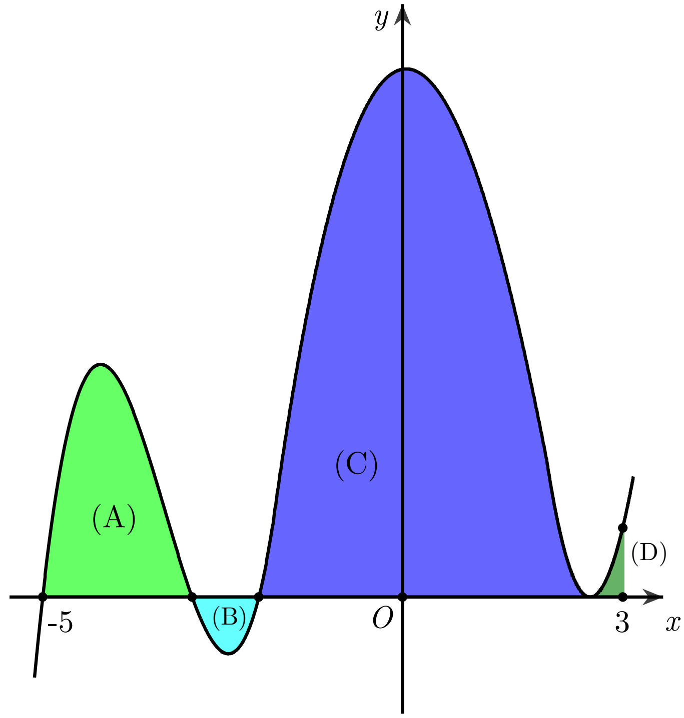
Tính $\int_1^3 \left(15f\left(2x-4\right)+3x^2+5\right)dx=\dfrac{15}{2}\int_1^3 f(2x-4)d(2x-4)+\int_1^3 (3x^2+5)dx$

$=\dfrac{15}{2}\int_{-2}^{2} f\left(x\right)dx+36$

Mà $\dfrac{15}{2}\int_{-2}^{2} f\left(x\right)dx=\dfrac{15}{2}\left[\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx\right]=\dfrac{15}{2}\left(-\dfrac{124}{15}+\dfrac{37}{60}-\dfrac{53}{60}\right)=-64$

Vậy $\int_1^3 \left(15f\left(2x-4\right)+3x^2+5\right)dx=-64+36=-28$

Câu 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-5;3\right]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích các hình phẳng $\left(A\right),\left(B\right),\left(C\right),\left(D\right)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ và trục hoành lần lượt bằng $6;3;12;2$. Tích phân $\int_{-3}^{1}\left(2f\left(2x+1\right)+1\right)dx$ bằng



A. 27. **B.** 25. **C.** 17. **D.** 21

Lời giải

Chọn A

Tính $\int_{-3}^{1}\left(2f\left(2x+1\right)+1\right)dx = 2\int_{-3}^{1} f\left(2x+1\right)dx + \int_{-3}^{1} dx = 2\int_{-3}^{1} f\left(2x+1\right)\frac{d\left(2x+1\right)}{2} + 4$

$= \int_{-5}^{3} f\left(x\right)dx + 4$

Mà $\int_{-5}^{3} f\left(x\right)dx$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ và trục hoành

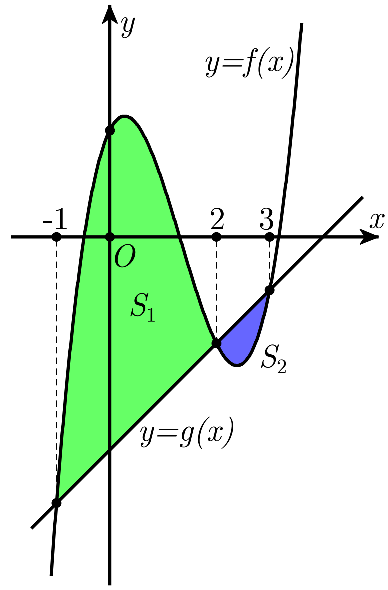
Suy ra $\int_{-5}^{3} f\left(x\right)dx = 6+3+12+2 = 23$

Vậy $\int_{-3}^{1}\left(2f\left(2x+1\right)+1\right)dx = 23+4 = 27$

8.4. Dạng 4. Dựa vào các điểm đồ thị đi qua xác định hàm số đi đến công thức tính.

Câu 1: Cho hai hàm số $f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g\left(x\right) = mx + n$ $\left(a,b,c,d,m,n \in \mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ $-1;2;3$ (tham khảo hình vẽ phía bên dưới); đồng thời diện tích $S_1 = 45$ (phần hình phẳng tô màu xanh). Tính diện tích S_2 (phần hình phẳng tô màu đỏ).

A. $S_2 = \frac{7}{3}$. **B.** $S_2 = \frac{7}{12}$. **C.** $S_2 = \frac{128}{3}$. **D.** $S_2 = \frac{7}{6}$.



Lời giải

Chọn A

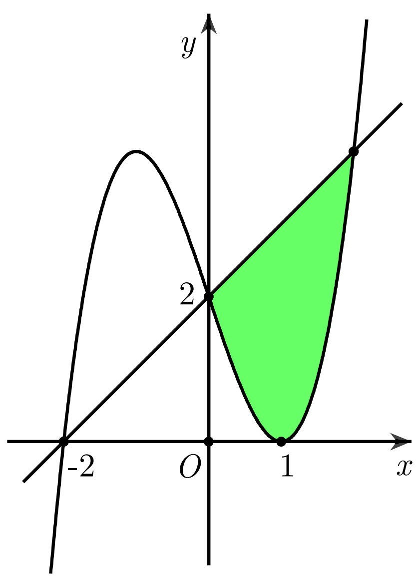
Ta có phương trình hoành độ giao điểm $f\left(x\right)=g\left(x\right)\Leftrightarrow a\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)=0$

Có $S_1=\int\limits_{-1}^{2}a\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)dx=45\Leftrightarrow\frac{45}{4}a=45\Leftrightarrow a=4.$

Vậy $S_2=-\int\limits_{2}^{3}4\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)dx=\frac{7}{3}.$

Câu 2: Hình phẳng được tô màu ở trong hình vẽ bên được giới hạn bởi một đồ thị hàm số bậc 3 với một đường thẳng Δ cùng với trục hoành và trục tung. Diện tích hình phẳng đó bằng

A. 4. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 2



Lời giải

Chọn A

Ta có đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có:

+ Giao với Oy tại điểm có tung độ bằng $2 \Rightarrow d = 2$

+ Đi qua điểm $(1;0) \Rightarrow a + b + c = -2$

+ Đi qua điểm $(-2;0) \Rightarrow -8a + 4b - 2c = -2 \Rightarrow -4a + 2b - c = -1$

+ Có $x = 1$ là điểm cực trị của hàm số nên là nghiệm của phương trình $y' = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Từ đó $a = 1; \mathrm{b} = 0; \mathrm{c} = -3$

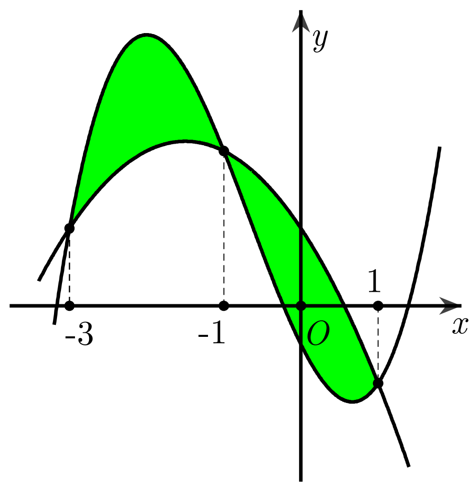
Vậy hàm số bậc ba là: $y = x^3 - 3x + 2$

Ta có đường thẳng đi qua hai điểm $(-2;0);(0;2)$ là $y = x + 2$

Giao điểm của hai đồ thị là $x = -2; x = 0; x = 2$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn với hai đồ thị trên như hình vẽ là: $S = \int_0^2 \left(4x - x^3\right) dx = 4$

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5 **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** 8 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

Từ giao điểm hai đồ thị ta có $f(x) - g(x) = a(x+3)(x+1)(x-1)$.

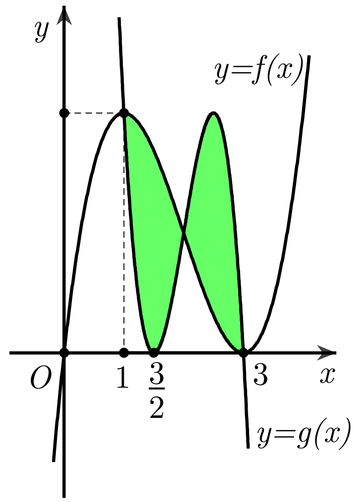
Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-d)x - \frac{3}{2}$

Xét hệ số tự do suy ra $-3a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Do đó $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích bằng $S = \frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x = 4$.

Câu 4: Cho hai hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ và $g\left(x\right)=f\left(dx+e\right)$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?



A. $4,5$. **B.** $4,25$. **C.** $3,63$. **D.** $3,67$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị suy ra $f(x)=a(x-3)^2.x$ và $f(1)=4\Rightarrow a=1$

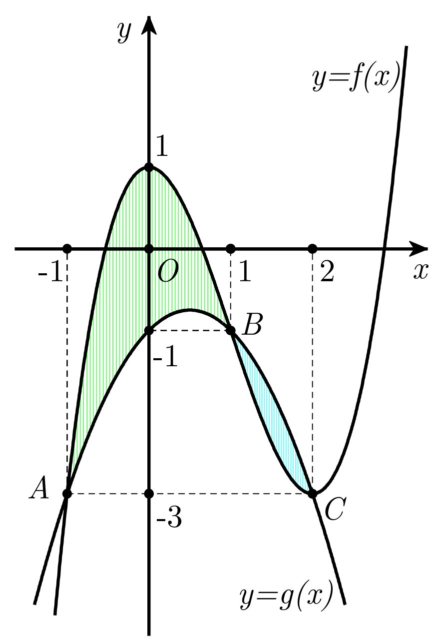
$\Rightarrow f(x)=(x-3)^2x$

$g(x)$ là hàm số bậc ba nên $g(x)=m(x-\frac{3}{2})^2(x-3)$ và $g(1)=4\Rightarrow m=-8$

$\Rightarrow g(x)=-8(x-\frac{3}{2})^2(x-3)$

Vậy $S=\int_1^3\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|.dx=\frac{9}{2}=4,5$

Câu 5: Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+1$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex-1$ với $a;b;c;d;e$ là các số thực. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại ba điểm A,B,C có hoành độ lần lượt là $-1;1;2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{27}{12}$.

C. $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$f\left(x\right)-g\left(x\right)=\left(ax^3+bx^2+cx+1\right)-\left(dx^2+ex-1\right)=ax^3+\left(b-d\right)x^2+\left(c-e\right)x+2$

Vì đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ cắt nhau tại ba điểm A, B, C có hoành độ lần lượt là $-1; 1; 2$ nên phương trình $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ có ba nghiệm là $-1; 1; 2$.

Kết hợp với điều kiện giả thiết suy ra $f\left(x\right) - g\left(x\right) = a\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)$.

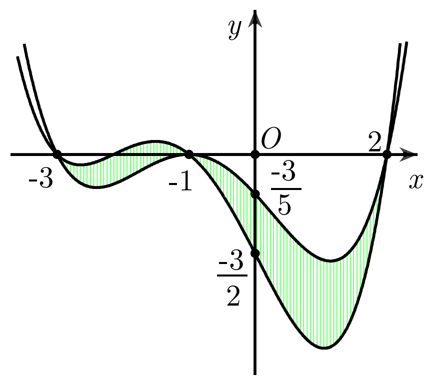
Đồng nhất hệ số tự do hai dạng biểu thức $f\left(x\right) - g\left(x\right)$ ta được $2a = 2 \Rightarrow a = 1$.

Vậy $f\left(x\right) - g\left(x\right) = \left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho là:

$$S = \int_{-1}^{2} \left|x^3 - 2x^2 - x + 2\right| \mathrm{d}x = \frac{37}{12}.$$

Câu 6: Hình phẳng $\left(H\right)$ được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là −3;−1;2. Diện tích của hình phẳng $\left(H\right)$ (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. $3,11$. **B.** $2,45$. **C.** $3,21$. **D.** $2,95$

Lời giải

Chọn A

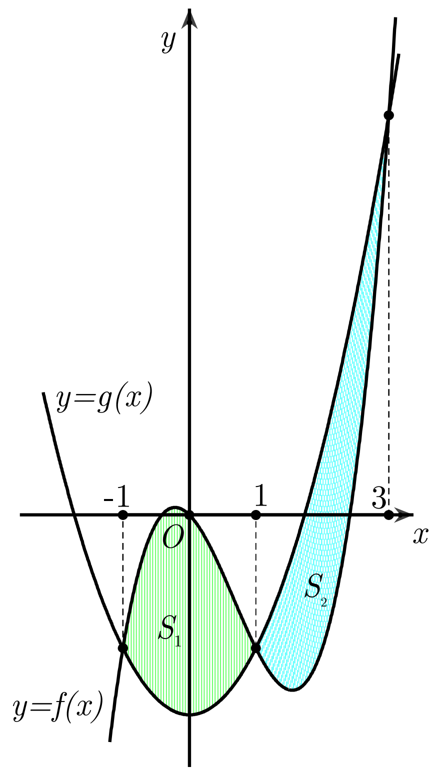
Tại điểm có hoành độ $x = -3$ hai đồ thị hàm số này tiếp xúc với nhau.

Có $f(x) - g(x) = a\left(x+3\right)^2 (x+1)(x-2)$.

Mà $f(0) - g(0) = \frac{-3}{5} - \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{9}{10} \Rightarrow a.9.1.(-2) = \frac{9}{10} \Rightarrow a = \frac{-1}{20}$.

Vì vậy $S_{(H)} = \int_{-3}^{2} \left|f(x) - g(x)\right| = \int_{-3}^{2} \left|-\frac{1}{20}\left(x+3\right)^2 (x+1)(x-2)\right| dx = \frac{3733}{1200} \approx 3,11$.

Câu 7: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ và hàm số bậc hai $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng phần diện tích S_1 giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số bằng 4. Tính phần diện tích S_2 giới hạn bởi hai đồ thị hàm số.



A. $S_2 = 4$. **B.** $S_2 = 2$. **C.** $S_2 = 1$. **D.** $S_2 = \dfrac{3}{2}$

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hai hàm số ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là -1, 1, 3 nên $f\left(x\right)-g\left(x\right)=a\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-3\right)$ và $a>0$.

Mặt khác diện tích $S_1 = 4 \Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{1} a(x+1)(x-1)(x-3)dx = 4 \Leftrightarrow a = 4$

Từ đó suy ra $S_2 = \int\limits_{1}^{3}\left(g(x)-f(x)\right)dx = -\int\limits_{1}^{3} 4(x+1)(x-1)(x-3)dx = 4$

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-5;3\right]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=g\left(x\right)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m, n, p. Tích phân $\int\limits_{-5}^{3} f(x)dx$ bằng

A. $m-n+p+\dfrac{211}{45}$. **B.** $m-n+p+\dfrac{208}{45}$. **C.** $m-n+p+\dfrac{24}{5}$. **D.** $m-n+p+\dfrac{26}{5}$.

Lời giải

Chọn B

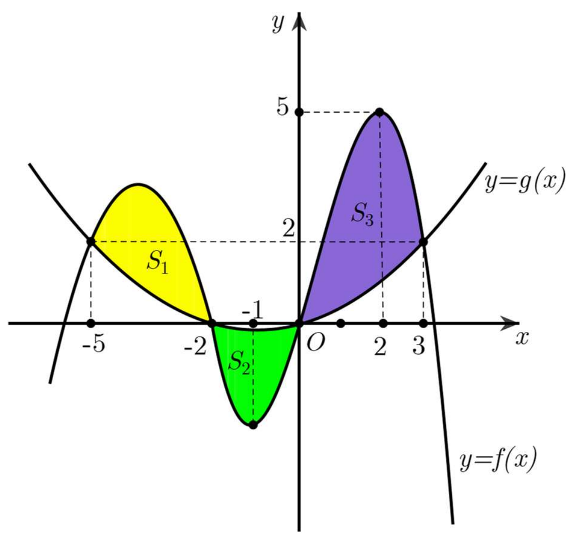
Đồ thị hàm $y=g\left(x\right)$ đi qua các điểm $O\left(0;0\right), A\left(-2;0\right), B\left(3;2\right)$ nên

$$\begin{cases} c = 0 \\ 4a - 2b = 0 \\ 9a + 3b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{15} \\ b = \dfrac{4}{15} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \frac{2}{15}x^2 + \frac{4}{15}x.$$

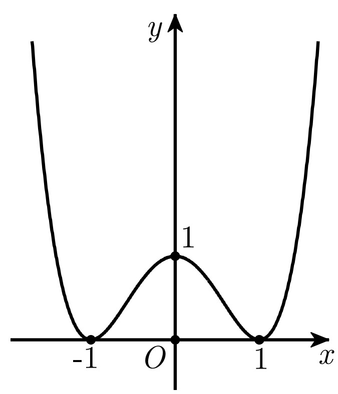
$$m - n + p = \int_{-5}^{-2}\left[f(x) - g(x)\right]dx - \int_{-2}^{0}\left[g(x) - f(x)\right]dx + \int_{0}^{3}\left[f(x) - g(x)\right]dx$$

$$= \int_{-5}^{3} f(x)\,dx - \int_{-5}^{3} g(x)\,dx.$$

$$\Rightarrow \int_{-5}^{3} f(x)\,dx = m - n + p + \int_{-5}^{3} g(x)\,dx = m - n + p + \frac{208}{45}$$



Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích gần bằng số nào sau đây?

A. $34,8$. **B.** 60. **C.** $63,5$ **D.** $72,3$

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho có đồ thị đối xứng nhau qua trục tung nên nó là hàm số chẵn. Lại có hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn nên hàm số đã cho là hàm trùng phương. Do đó
$f(x) = ax^4 + bx^2 + c,\ a \neq 0$.

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1;0), (0;1)$ và có điểm cực tiểu $(1;0)$, điểm cực đại $(0;1)$ nên ta có hệ $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(1) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ c = 1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$

Với $a = 1, b = -2, c = 1$ ta có $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; $f'(x) = 4x^3 - 4x$; $f''(x) = 12x^2 - 4$ thỏa $f''(0) < 0, f''(1) > 0$ nên các giá trị $a = 1, b = -2, c = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 4x^3 - 4x \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)^2 = 4x\left(x^2 - 1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 4x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{5} \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ là

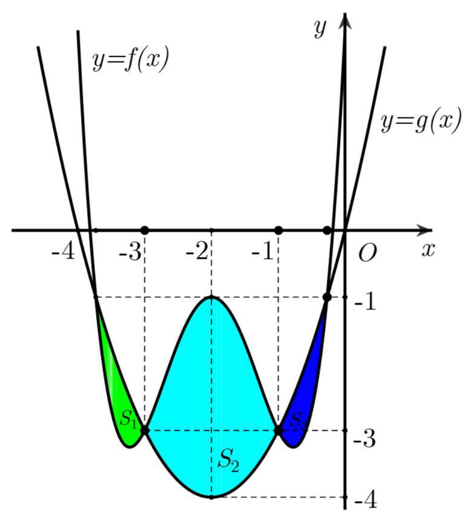
$$S = \int_{-1}^{2+\sqrt{5}} \left|f(x) - f'(x)\right| dx = \int_{-1}^{2+\sqrt{5}} \left|x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1\right| dx$$

$$= \left|\int_{-1}^{2-\sqrt{5}} \left(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1\right) dx\right| + \left|\int_{2-\sqrt{5}}^{1} \left(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1\right) dx\right| +$$

$$+ \left|\int_{1}^{2+\sqrt{5}} \left(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1\right) dx\right| \approx 63,52$$

8.5. Dạng 5. Dựa vào tâm đối xứng, trục đối xứng của đồ thị xác định hàm số đi đến công thức tính.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + 16x^3 + 21x^2 - 20x + 3$ và hàm số $y = g\left(x\right) = a\left(x + 2\right)^2 + b$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường cong $y = g\left(x\right)$ lần lượt là m, n, p. Tính $M = a - b + m - p + n$.



A. $M = \dfrac{2456}{15}$.　　**B.** $M = \dfrac{2531}{15}$.

C. $M = \dfrac{2411}{15}$.　　**D.** $M = \dfrac{2501}{15}$.

Lời giải

Chọn B

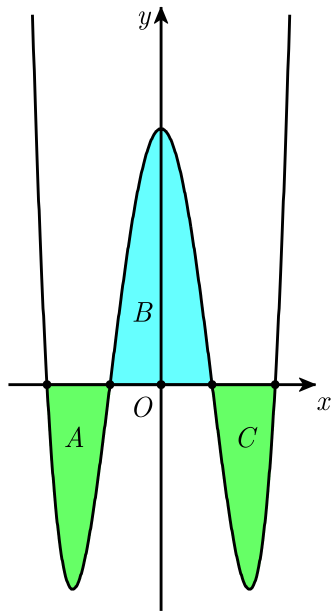
Đồ thị hàm $y = g\left(x\right)$ đi qua các điểm $O\left(0;0\right), A\left(-2;-4\right)$ nên

$$\begin{cases} 4a + b = 0 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow g\left(x\right) = \left(x + 2\right)^2 - 4 = x^2 + 4x.$$

Nhận xét đồ thị hai hàm số nhận đường thẳng $x=-2$ là trục đối xứng nên $m=p \Rightarrow m-p=0$.

Do đó, $a-b+n=5+\int\limits_{-3}^{-1}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx=5+\int\limits_{-3}^{-1}\left(x^4+8x^3+20x^2-24x+3\right)dx=\frac{2531}{15}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=x^4+bx^2+5$ (*) có đồ thị như hình vẽ. Gọi S_1,S_2,S_3 lần lượt là diện tích của hình phẳng $\left(A\right)$, $\left(B\right)$, $\left(C\right)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số (*) và trục hoành. Biết $S_1+S_3=S_2$. Giá trị của S_2 là



A. $\frac{32}{5}$. **B.** 16. **C.** 5. **D.** $\frac{19}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số (*) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt $\Rightarrow b<0$

Gọi $t_1,t_2(t_1<t_2)$ là nghiệm dương của phương trình $x^4+bx^2+5=0$. Ta có $t_2^4+bt_2^2+5=0$ (1)

Vì đồ thị hàm số (*) nhận trục tung làm trục đối xứng nên $S_1+S_3=S_2 \Leftrightarrow \frac{S_2}{2}=S_3$

Do đó $\int\limits_0^{t_1}(x^4+bx^2+5)dx = -\int\limits_{t_1}^{t_2}(x^4+bx^2+5)dx \Leftrightarrow \int\limits_0^{t_2}(x^4+bx^2+5)dx=0$

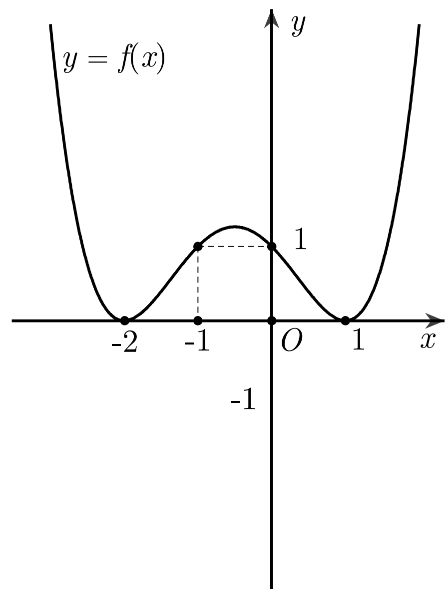
$\Leftrightarrow \frac{1}{5}t_2^5+\frac{1}{3}bt_2^3+5t_2=0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}t_2^4+\frac{1}{3}bt_2^2+5=0\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $b^2=36 \Rightarrow b=-6$ (vì b <0) và $t_1=1$

Vậy $S_2=2\int\limits_0^1(x^4-6x^2+5)dx=\frac{32}{5}$.

8.6. Dạng 6. Dựa vào tiếp tuyến của đồ thị xác định hàm số đi đến công thức tính.

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f\left(x\right);y=f'\left(x\right)$ có diện tích bằng



A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{107}{5}$. **C.** $\frac{13}{5}$. **D.** $\frac{127}{10}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết đi đến $f\left(x\right)=a\left(x+2\right)^2\left(x-1\right)^2$.

Vì đồ thị đi qua điểm $A\left(0;1\right)$ nên $a=\frac{1}{4}\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{1}{4}\left(x+2\right)^2\left(x-1\right)^2$

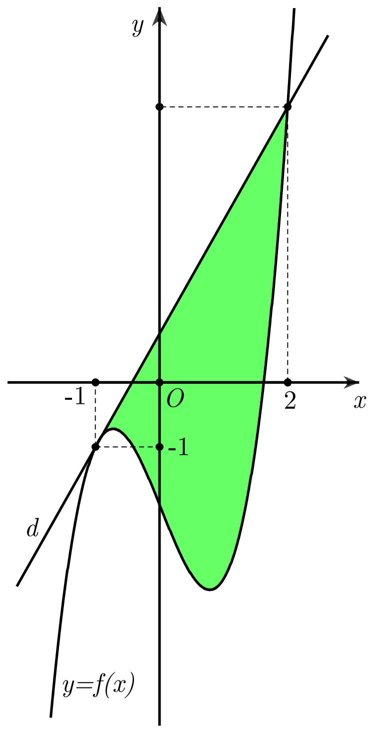
$\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(x+2\right)\left(x-1\right)^2+\frac{1}{2}\left(x-1\right)\left(x+2\right)^2=\frac{1}{2}\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(2x+1\right)$.

Phương trình $f\left(x\right)=f'\left(x\right)\Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(x^2+x-2-4x-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=-2\\x=4\end{array}\right.$

Vậy hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của $f\left(x\right)$ và $f'\left(x\right)$ là:

$S=-\int_{-2}^{4}\left|\frac{1}{4}\left(x+2\right)^2\left(x-1\right)^2-\frac{1}{2}\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(2x+1\right)\right|dx=\frac{107}{5}$.

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị $\left(C\right)$. Đường thẳng d qua hai điểm A,B trên hình vẽ là tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại A. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và $\left(C\right)$ bằng:



A. 6,75 **B.** 4,5 **C.** 8,45 **D.** 4,75

Lời giải

Chọn A

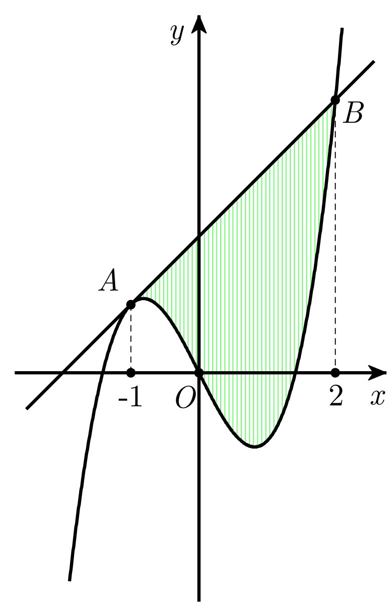
Đường thẳng $d: y = mx + n$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tại điểm có hoành độ $x = -1; x = 2$ trong đó tại điểm có hoành độ $x = -1$ là điểm tiếp xúc của hai đường.

Vì vậy $\left(x^3 + ax^2 + bx + c\right) - (mx + n) = (x+1)^2(x-2)$.

Diện tích hình phẳng cần tính bằng:

$$S = \int_{-1}^{2} \left|(x^3 + ax^2 + bx + c) - (mx + n)\right| dx = \int_{-1}^{2} \left|(x+1)^2(x-2)\right| dx = 6,75.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị $\left(C\right)$. Biết rằng tiếp tuyến $\left(d\right)$ của $\left(C\right)$ tại điểm A có hoành độ bằng -1 cắt $\left(C\right)$ tại B có hoành độ bằng 2 (xem hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(d\right)$ và $\left(C\right)$ (phần gạch chéo trong hình vẽ) bằng



A. $\dfrac{13}{2}$. **B.** $\dfrac{25}{4}$.

C. $\dfrac{27}{4}$. **D.** $\dfrac{11}{2}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $A\left(-1; a - b + c - 1\right)$

và $y' = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow y'\left(-1\right) = 3 - 2a + b$.

Phương trình tiếp tuyến $\left(d\right)$ của $\left(C\right)$ tại A : $y = \left(3 - 2a + b\right)\left(x + 1\right) + a - b + c - 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là :

$x^3 + ax^2 + bx + c = (3 - 2a + b)(x + 1) + a - b + c - 1 \ (1)$.

Phương trình (1) có nghiệm $x = -1; x = 2$

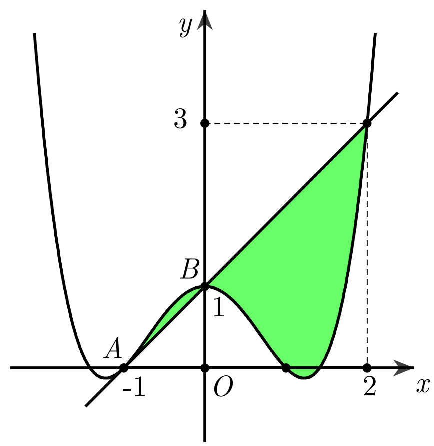
$\Leftrightarrow 4a + 2b + c + 8 = 3(3 - 2a + b) + a - b + c - 1 \Leftrightarrow 9a = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Suy ra (C) : $y = x^3 + bx + c$ và $d : y = (3 + b)(x + 1) - b + c - 1$.

Diện tích hình phẳng là : $S = \int_{-1}^{2} \left[(3 + b)(x + 1) - b + c - 1 - (x^3 + bx + c) \right] dx$

$= \int_{-1}^{2} (3x - x^3 + 2) dx = \dfrac{27}{4}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$. Tiếp tuyến Δ tại A của đồ thị (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$ có diện tích bằng $\dfrac{56}{5}$ (đồ thị như hình vẽ).



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 0$.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{20}$. **C.** $\dfrac{1}{10}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 4ax^3 + 2bx$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại $A(-1;0)$ có dạng $y = (-4a - 2b)(x + 1)$.

Do tiếp tuyến Δ tại A của đồ thị (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 nên phương trình $ax^4 + bx^2 + c = (-4a - 2b)(x + 1)$ nhận ba nghiệm là: $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$.

Suy ra: $\begin{cases} c = -a - b \\ b = -3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a \\ b = -3a \end{cases}$.

Vậy $(C): y = ax^4 - 3ax^2 + 2a = a(x^4 - 3x^2 + 2)$ và $\Delta: y = 2a(x+1)$.

Bài cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$ có diện tích bằng $\frac{56}{5}$ nên:

$$\int_0^2 \left|2a(x+1) - a(x^4 - 3x^2 + 2)\right| \mathrm{d}x = \frac{56}{5}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \left(2a(x+1) - a(x^4 - 3x^2 + 2)\right) \mathrm{d}x = \frac{56}{5}$$

$$\Leftrightarrow a\int_0^2 \left(-x^4 + 3x^2 + 2x\right) \mathrm{d}x = \frac{56}{5} \Leftrightarrow a.\left(\frac{-x^5}{5} + x^3 + x^2\right)\Bigg|_0^2 = \frac{56}{5} \Leftrightarrow a.\frac{28}{5} = \frac{56}{5} \Leftrightarrow a = 2.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 0$ là:

$$S = \int_{-1}^0 \left|a(x^4 - 3x^2 + 2) - 2a(x+1)\right| \mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \left(2x^4 - 6x^2 - 4x\right) \mathrm{d}x = 2.\left(\frac{x^5}{5} - x^3 - x^2\right)\Bigg|_{-1}^0 = \frac{2}{5}.$$

Cách 2:

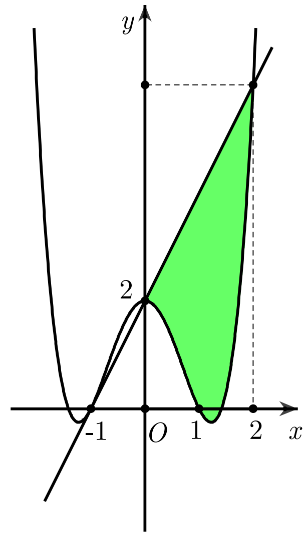
Giả sử đường thẳng $d: y = kx + m$ là tiếp tuyến với (C) tại $A(0;-1)$ nên $c = -1$ và $m = -1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $ax^4 + bx^2 - kx = 0 \Leftrightarrow a(x+1)^2.x.(x-2) = 0$ (do phương trình trên có 3 nghiệm như bài toán đã cho).

Theo bài ta có phương trình $a\int_0^2 \left|(x+1)^2 x.(x-2)\right| \mathrm{d}x = \frac{56}{5} \Rightarrow a = 2$.

Từ đó ta được $S = \int_{-1}^0 \left[2(x^4 - 3x^2 + 2) - 4(x+1)\right] \mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \left(2x^4 - 6x^2 - 4x\right) dx = \frac{2}{5}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(C\right)$ và hai đường thẳng $x=-1$; $x=0$ có diện tích bằng

A. $\dfrac{2}{5}$ **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** $\dfrac{2}{9}$ **D.** $\dfrac{1}{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=4ax^3+2bx \Rightarrow d: y=\left(-4a-2b\right)\left(x+1\right)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và $\left(C\right)$ là: $\left(-4a-2b\right)\left(x+1\right)=ax^4+bx^2+c\left(1\right)$.

Phương trình $\left(1\right)$ phải cho 2 nghiệm là $x=0$, $x=2$.

$$\Rightarrow \begin{cases}-4a-2b=c\\ -12a-6b=16a+4b+c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4a-2b-c=0\left(2\right)\\ 28a+10b+c=0\left(3\right)\end{cases}.$$

Mặt khác, diện tích phần tô màu là $\dfrac{28}{5}=\displaystyle\int_0^2\left[\left(-4a-2b\right)\left(x+1\right)-ax^4-bx^2-c\right]\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \frac{28}{5}=4\left(-4a-2b\right)-\frac{32}{5}a-\frac{8}{3}b-2c \Leftrightarrow \frac{112}{5}a+\frac{32}{3}b+2c=-\frac{28}{5}\left(4\right).$$

Giải hệ 3 phương trình $\left(2\right)$, $\left(3\right)$ và $\left(4\right)$ ta được $a=1$, $b=-3$, $c=2$.

Khi đó, $\left(C\right): y=x^4-3x^2+2$, $d: y=2\left(x+1\right)$.

Diện tích cần tìm là $S=\displaystyle\int_{-1}^{0}\left[x^4-3x^2+2-2\left(x+1\right)\right]\mathrm{d}x=\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(x^4-3x^2-2x\right)dx=\dfrac{1}{5}$.