

Bài 1: (1,5 điểm)

Rút gọn biểu thức

a) $A = 4\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{57+40\sqrt{2}}$

b) $B = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}$

Bài 2: (2,0 điểm)

a) CMR biểu thức $M = \frac{x^5}{30} - \frac{x^3}{6} + \frac{2x}{15}$ luôn nhận giá trị nguyên với mọi $x \in \mathbb{Z}$

b) Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số \overline{abcd} biết rằng nó là một số chính phương ; chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố .

Bài 3: (1,5 điểm)

Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$. Chứng minh: a) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

Bài 4: (2,0 điểm)

a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $N = x + \sqrt{2-x}$

b) Giải phương trình nghiệm nguyên : $5x^2 + 9y^2 - 12xy + 8 = 24(2y - x - 3)$

Bài 5: (1,5 điểm)

Cho hình bình hành ABCD , trên cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M , K sao cho

AM = CK . Lấy điểm P nằm trên cạnh AD (P ≠ A ; P ≠ D). Nối PB , PC cắt MK tại

E , F . Chứng minh $S_{PEF} = S_{BME} + S_{CKF}$

Bài 6: (1,5 điểm)

Cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Tia Ax tạo với tia AB một góc $\widehat{BAx} = 15^\circ$ và cắt

cạnh BC tại M , cắt đường thẳng CD tại N . Chứng minh $\frac{4}{AB^2} = \frac{3}{AM^2} + \frac{3}{AN^2}$

ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM
MÔN TOÁN LỚP 9 – KỲ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN

Bài 1 (1,5điểm) Rút gọn biểu thức

$$A = 4\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{57+40\sqrt{2}} = 4\sqrt{(1+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(5+4\sqrt{2})^2} \quad (0,25đ)$$

$$= 4(1+\sqrt{2}) - (5+4\sqrt{2}) \quad (0,25đ) = 4+4\sqrt{2}-5-4\sqrt{2} = -1 \quad (0,25đ)$$

$$B = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-6\sqrt{20}}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}} \quad (0,25đ)$$

$$= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-(2\sqrt{5}-3)} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{5+1}} = 1$$

Bài 2 (2,0điểm) Câu a : 1,0 điểm

$$M = \frac{x^5}{30} - \frac{x^3}{6} + \frac{2x}{15} = \frac{x^5 - 5x^3 + 4x}{30} = \frac{x(x^4 - 4x^2 + 4)}{30} \quad (0,25đ)$$

$$= \frac{x(x^2-4)(x^2-1)}{30} = \frac{x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{30} \quad (0,25đ)$$

Hiểu và lập luận được $x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 30 với mọi $x \in \mathbb{Z}$, vậy M luôn nhận giá trị nguyên với mọi x (0,5đ)

Câu b : 1.0 điểm */ Lập luận được $d = 5$ (0,25đ), thấy được $100^2 > \overline{abcd}$ suy ra $\overline{abcd} = \overline{x5^2}$ (0,25đ)

Vì \overline{abcd} chia hết cho 9 $\Rightarrow \overline{x5^2}$ chia hết cho 9 $\Rightarrow \overline{x5^2}$ chia hết cho 3 (0,25đ)
Suy ra $x+5 = 6; 9; 12 \Rightarrow x = 1; 4; 7$. Kiểm tra $15^2, 45^2, 75^2 \Rightarrow$ quả (0,25đ)

Bài 3 (1,5điểm). Câu a (0,75đ) : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow (a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ (0,25đ)
 $\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (đúng hiển nhiên – đpcm) (0,5đ)

Câu b : (0,75điểm) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b \geq 0$
 $\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b \geq 0$ (0,25đ) $\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$
(0,5đ)

Bài 4 (2,0điểm) Câu a (1,0đ) Điều kiện $x \leq 2$. Đặt $\sqrt{2-x} = y \geq 0$ ta có $y^2 = 2-x$
(0,25đ)

$$\Rightarrow N = 2 - y^2 + y = -\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4} \quad (0,25đ) \text{ Max } N = 9/4 \Leftrightarrow y = 1/2 \Leftrightarrow x = 7/4$$

(0,5đ)

Câu b (1,0đ) Giải phương trình nghiệm nguyên

$$5x^2 + 9y^2 - 12xy + 8 = 24(2y - x - 3) \Leftrightarrow 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 8 + 24x - 48y + 72 = 0$$

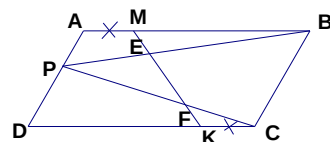
(0,25đ)

$$4x^2 + 9y^2 + 64 - 12xy - 48y + 32x + x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (2x - 3y + 8)^2 + (x - 4)^2 = 0$$

(0,5đ) suy ra $x - 4 = 0$ và $2x - 3y + 8 = 0 \Rightarrow x = 4$ và $y = 16/3$.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên (0,25đ)

Bài 5 (1,5điểm) lập luận diện tích tam giác PBC bằng nửa diện tích hbh ABCD (0,25đ)



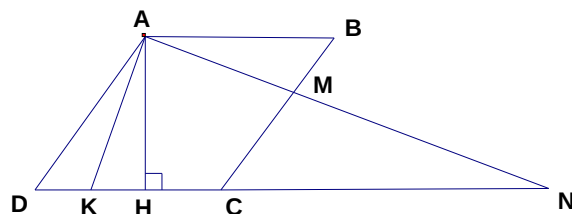
Lập luận diện tích tứ giác AMKD bằng diện tích tứ giác CKMB và bằng nửa diện tích hình ABCD (0,5đ)

Suy ra diện tích tam giác PBC bằng diện tích CKMB (0,25đ)

Loại trừ đi diện tích phần chung, suy ra kết quả (0,5đ)

Bài 6 (1,5điểm) Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với Ax, cắt cạnh DC tại K
 $\Rightarrow \hat{DAK} = 15^\circ$ (0,25đ).

Chứng minh hai tam giác DAK, BAM bằng nhau $\Rightarrow AK = AM$ (0,5đ). Thấy được AH là đường cao



của $\triangle AKN$ vuông tại A, suy ra $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AN^2}$ (0,25đ)

mà $AH = AD \cdot \sin 60^\circ = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, thế vào, suy ra được kết quả

(0,5đ)

Lưu ý: Nếu bài giải theo các cách khác mà đúng thì vẫn được điểm tối đa (dựa vào đáp án t/ phần)