ĐS6.CHUYÊN ĐỀ 6 - SỐ CHÍNH PHƯƠNG

CHỦ ĐỀ 3: PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG GIẢI BÀI TOÁN SỐ CHÍNH PHƯƠNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Số chính phương là số tự nhiên viết được dưới dạng bình phương đúng của một số nguyên.

Ví dụ: $4=2^2$; $16=4^2$.

2. SỐ CHÍNH PHƯƠNG CHẴN, SỐ CHÍNH PHƯƠNG LẺ

Một số chính phương được gọi là số chính phương chẵn nếu nó là bình phương của một số chẵn, là số chính phương lẻ nếu nó là bình phương của một số lẻ. (Nói một cách khác, bình phương của một số chẵn là một số chẵn, bình phương của một số lẻ là một số lẻ).

3. CÁC TÍNH CHẤT CHUNG CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

a) Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9 không thể có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8.

Như vậy để chứng minh một số không phải số chính phương ta chỉ ra số đó có hàng đơn vị là 2; 3; 7 hoặc 8.

b) Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các TSNT với số mũ chẵn, không chứa TSNT với số mũ lẻ.

Ví dụ: $3600=60^2=2^4.3^2.5^2$

$\Rightarrow$ Để chứng minh một số không phải SCP ta chỉ ra số đó khi phân tích ra TSNT thì tồn tại thừa số nguyên tố chứa số mũ lẻ.

c) Số chính phương chỉ có thể có 1 trong 2 dạng $3n$ hoặc $3n+1\left(a^2\equiv 0,1\pmod 3\right)$, không có SCP nào có dạng $3n+2$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

d) Số chính phương chỉ có thể có 1 trong 2 dạng $4n$ hoặc $4n+1\left(a^2\equiv 0,1\pmod 4\right)$, không có SCP nào có dạng $4n+2$ hoặc $4n+3(n\in\mathbb{N})$.

e) Số các ước số của một số chính phương là số lẻ, ngược lại một số có số lượng các ước là lẻ thì đó là số chính phương.

f) Nếu số chính phương chia hết cho p thì chia hết cho p^2.

g)

- ✓ Số chính phương tận cùng bằng 1 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn (121, 49, …).
- ✓ Số chính phương tận cùng là 5 thì chữ số hàng chục là 2.
- ✓ Số chính phương tận cùng là 4 thì chữ số hàng chục là chẵn.
- ✓ Số chính phương tận cùng là 6 thì chữ số hàng chục là lẻ.
- ✓ Nếu SCP có chữ số tận cùng là 0 thì SCP đó có một số chẵn chữ số 0 ở tận cùng như : 100, 10000, …

h) Công thức để tính hiệu của hai số chính phương: $a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$.

i) Tất cả các số chính phương có thể viết thành dãy tổng của các số lẻ tăng dần từ 1, ví dụ: 1, 1 + 3, 1 + 3 + 5, 1 + 3 + 5 +7, 1 + 3 + 5 +7 + 9, ….

3. HỆ QUẢ

- Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.
- Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25.
- Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9.
- Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.
- Số chính phương chia hết cho p^{2n+1} thì chia hết cho p^{2n+2} (p là số nguyên tố, $n\in\mathbb{N}$).

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Chứng minh một biểu thức không là số chính phương.

I. Phương pháp giải:

- Đề bài chứng minh một biểu thức A không là số chính phương.
- Giả sử biểu thức A là số chính phương.
- Sử dụng các tính chất để tìm ra điều vô lí hay mâu thuẫn.
- Vậy biểu thức A không là số chính phương.

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng với $\forall n\in\mathbb{N}$ thì 3^n+4 không là số chính phương.

Lời giải:

- Với $n=0\Rightarrow 3^n+4=5$ không là số chính phương.

- Với $n=1\Rightarrow 3^n+4=7$ không là số chính phương.

- Với $n\geq 2$.

Giả sử là số chính phương.

$\Rightarrow 3^n+4=m^2\ (m\in\mathbb{N}, m>3)$.

$\Leftrightarrow m^2-4=3^n$.

$\Leftrightarrow (m-2)(m+2)=3^n$.

$\Rightarrow \begin{cases} m-2=3^k \\ m+2=3^q \end{cases} \ (k,q\in\mathbb{N}; k+q=n)$.

$\Rightarrow (m+2)-(m+2)=3^q-3^k$.

$\Leftrightarrow 4=3^q-3^k \ (*)$.

Ta thấy $\begin{cases} 4 \not\vdots\, 3 \\ (3^q-3^k)\,\vdots\, 3 \end{cases}$ là điều mâu thuẫn với nhau so với đẳng thức $(*)$.

Vậy 3^n+4 không là số chính phương với mọi số tự nhiên n.

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì n^2+2 không là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử n^2+2 là số chính phương.

Khi đó đặt $n^2+2=m^2 \ (m\in\mathbb{N}^*)$.

$\Leftrightarrow m^2-n^2=2 \ (1)$.

$\Leftrightarrow (m+n).(m-n)=2 \ (1)$.

Như vậy, trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (2).

Mặt khác $m+n+m-n=2m$ chẵn.

Suy ra hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $m+n$ và $m-n$ là hai số chẵn.

$\Rightarrow \begin{cases} (m+n)\,\vdots\, 2 \\ (m+n)\,\vdots\, 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \left[(m+n).(m-n)\right] \vdots\, 4$

$\Rightarrow (m^2-n^2)\,\vdots\, 4$ mà $2 \not\vdots\, 4$, so sánh điều này với (1), ta thấy đây là điều vô lý.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì n^2+2 không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp lần lượt là n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ và $n+4$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

Đặt $S=n(n+1)(n+2)(n+3) \ (n\in\mathbb{N}^*)$

Ta đi chứng minh S không là số chính phương.

Giả sử $S=m^2>0 \ (m\in\mathbb{N}^*) \ (1)$.

$\Rightarrow n(n+1)(n+2)(n+3)=m^2$.

$\Leftrightarrow (n^2+3n)(n^2+3n+2)=m^2$.

Đặt $n^2+3n=a$ $(a\in N^*)$.

$\Rightarrow a(a+2)=m^2$.

$\Leftrightarrow a^2+2a=m^2$.

$\Leftrightarrow a^2+2a+1=m^2+1$.

$\Leftrightarrow (a+1)^2=m^2+1$.

$\Leftrightarrow (a+1+m)(a+1-m)=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1-m=1 \\ a+1+m=1 \end{cases}$

$\Rightarrow m=0$ (2).

Ta thấy (2) mâu thuẫn với (1)

Vậy S không là số chính phương hay tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng với tổng của $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ không là số chính phương.

Lời giải:

Đặt $S=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=111(a+b+c)=3.37(a+b+c)$ $(a,b,c\in \mathbb{N}^*;a,b,c\le 9)$.

Giả sử S là số chính phương .

$\Rightarrow S \vdots 37$.

$\Rightarrow S \vdots 37^2$.

$\Rightarrow (a+b+c) \vdots 37$.

Mà $(a+b+c)\le 37$.

Đây là điều vô lý.

Vậy S không là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh rằng với n lẻ và $\forall n\in \mathbb{Z}^+$ thì 7^n+24 không là số chính phương.

Lời giải:

Đặt $7^n+24=a^2$ $(a\in \mathbb{N}^*)$.

Khi n lẻ: Đặt $n=2k+1$.

$\Rightarrow 7^n + 24 = 7^{2k+1} + 24 = 7^{2k}.7^1 + 24 = \left(7^2\right)^k.7 + 24 = 49^k.7 + 24 = a^2$.

Có 49 chia 4 dư 1 $\Rightarrow 49^k$ chia 4 dư 1; 7.49^k chia 4 dư 3 $\Rightarrow a^2$ chia 4 dư 3 (vô lý).

Vậy với n lẻ và $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ thì $7^n + 24$ không là số chính phương.

Bài 6: Chứng minh rằng nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $b^2 - 4ac$ là số chính phương m^2 $(m \in \mathbb{N})$.

Xét

$4a.\overline{abc} = 4a(100a + 10b + c) = (20a + b)^2 - (b^2 - 4ac) = (20a + b)^2 - m^2 = (20a + b + m)(20a + b - m)$.

Tồn tại một trong hai thừa số $20a + b + m$, $20a + b - m$ chia hết cho số nguyên tố.

Điều này không xảy ra vì cả hai thừa số trên đều nhỏ hơn $\overline{abc}$.

Thật vậy, do $m < b$ (vì $m^2 - b^2 = -4ac < 0$).

Nên $20a + b - m \le 20a + b + m < 100a + 10b + c = \overline{abc}$.

Vậy nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Bài 7: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$ thì $2^n - 1$ không là số chính phương.

Lời giải:

Với $n = 2 \Rightarrow 2^n - 1 = 3$ không là số chính phương.

Với $n > 2$:

Giả sử $2^n - 1$ là số chính phương.

Mà $2^n - 1$ là số lẻ nên $2^n - 1 = (2k + 1)^2 \Rightarrow 2^n - 1 = 4k^2 + 4k + 1$.

$\Rightarrow 2^n = 4k^2 + 4k + 2$ $(*)$.

Vì $n \ge 2$ nên $2^n \vdots 4$ (1).

Mà $4k^2 + 4k = 4k(k + 1) \vdots 4$.

Nên $4k^2 + 4k + 2 \not\vdots 4$ (2).

So sánh (1) và (2) với $(*)$, ta thấy mâu thuẫn với nhau.

Vậy với mọi số tự nhiên $n \ge 2$ thì $2^n - 1$ không là số chính phương.

Bài 8: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ thì $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ không là số chính phương.

Lời giải:

Với $n \geq 1$:

Giả sử A là số chính phương.

$\Rightarrow A = k^2 \Rightarrow n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = k^2$.

$\Rightarrow n^2(n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 2n + 1) = k^2$.

$\Rightarrow n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = k^2 \Rightarrow (n^2+1)(n+1)^2 = k^2$.

$\Rightarrow (n^2 + 1)$ là số chính phương với mọi $n \geq 1$ (vô lí).

Vậy với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ không là số chính phương.

Bài 9: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên thì $B = n^3 - n + 2$ không là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Với n = 0 thì $B = n^3 - n + 2 = 2$ không là số chính phương.

Giả sử với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, B là số chính phương.

$\Rightarrow B = k^2 \Rightarrow n^3 - n + 2 = k^2$ $\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$.

$\Rightarrow n(n^2 - 1) + 2 = k^2$.

$\Rightarrow n(n-1)(n+1) + 2 = k^2$ $(*)$

Mà $n(n-1)(n+1) \vdots 3$ $\Rightarrow n(n-1)(n+1) + 2 = k^2$ chia 3 dư 2

Nên $(*)$ mâu thuẫn hay vô lý hay không xảy ra.

Vậy với mọi số tự nhiên thì $B = n^3 - n + 2$ không là số chính phương.

Bài 10: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $C = 2n^2 + 2n + 3$ không là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Nếu $n = 0$ thì $C = 2n^2 + 2n + 3 = 3$ không là số chính phương.

Giả sử với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, C là số chính phương.

$\Rightarrow C = k^2 \Rightarrow 2n^2 + 2n + 3 = k^2$.

$\Rightarrow 2n(n+1) + 3 = k^2$ $(*)$.

Mà $n(n+1) \vdots 2$ nên $2n(n+1) \vdots 4$.

Nên $(*)$ mâu thuẫn hay vô lý hay không xảy ra.

Vậy với mọi số tự nhiên n thì $C = 2n^2 + 2n + 3$ không là số chính phương.

Bài 11: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ thì $D = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không là số chính phương.

Lời giải:

Nếu $n = 0$ thì $D = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = 0$ là số chính phương.

Giả sử D là số chính phương.

$\Rightarrow D = k^2 \Rightarrow n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = k^2$.

$\Rightarrow n^2(n^4 - n^2 + 2n + 2) = k^2$.

$\Rightarrow n^2\left[n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)\right] = k^2$.

$\Rightarrow n^2\left[(n+1)(n^3 - n^2 + 2)\right] = k^2$.

$\Rightarrow n^2(n+1)\left[(n^3+1) - (n^2-1)\right] = k^2$.

$\Rightarrow n^2(n+1)^2(n^2 - 2n + 2) = k^2$.

$\Rightarrow (n^2 - 2n + 2)$ là số chính phương.

Đây là điều không xảy ra hay vô lí.

Vì với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$ và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$

$\Rightarrow (n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ không là số chính phương.

Vậy với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ thì $D = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không là số chính phương.

Bài 12: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ thì $E = n^2 + n + 1$ không là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử E là số chính phương.

Khi đó: $E = k^2 \Rightarrow n^2 + n + 1 = k^2$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

Mà $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2 \Rightarrow n^2 < k^2 < (n+1)^2$.

$\Rightarrow n < k < n+1$ (vô lí).

Vậy với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ thì $E = n^2 + n + 1$ không là số chính phương.

Bài 13: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lẻ $(n \ge 1)$ thì $F = n^3 + 1$ không là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử F là số chính phương.

Khi đó: $F = k^2\ (k \in \mathbb{N}, k > 1) \Rightarrow n^3 + 1 = k^2$.

$\Rightarrow n^3 = k^2 - 1 \Rightarrow n^3 = (k-1)(k+1)$.

Vì n là số tự nhiên lẻ nên n^3 cũng là số lẻ $\Rightarrow k-1,\ k+1$ là hai số tự nhiên lẻ liên tiếp và chúng nguyên tố cùng nhau nên

$\begin{cases} k+1 = a^3 \\ k-1 = b^3 \end{cases}$ với a, b lẻ và a>b.

$\Rightarrow 2 = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \geq 6$ (*).

Vì $a - b \geq 2$ và $a^2 + ab + b^2 \geq 3$ nên (*) vô lí.

Vậy với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $E = n^2 + n + 1$ không là số chính phương.

Bài 14: Chứng minh rằng tổng $S + 2$ với $S = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{20}$ không là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $S + 2$ là số chính phương.

$\Rightarrow S + 2 = k^2$.

Ta có: $S = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{20}$.

$\Rightarrow 2S = 2^2 + 2^3 + ... + 2^{20} + 2^{21}$.

$\Rightarrow 2S - S = (2^2 + 2^3 + ... + 2^{20} + 2^{21}) - (2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{20})$.

$\Rightarrow S = 2^{21} - 2$.

$\Rightarrow S + 2 = 2^{21}$ hay $\Rightarrow k^2 = 2^{21}$ (vô lí).

Vậy tổng $S + 2$ với $S = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{20}$ không là số chính phương.

Bài 15: Chứng minh rằng tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là $n-1, n, n+1, n+2$.

Giả sử tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp trên là số chính phương, tức là $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$ là số chính phương.

Đặt $N = (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$.

Ta có: $N = (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 4n^2 + 4n + 6 = 4(n^2 + n) + 6$ (*).

Do đó, vì $4(n^2+n)+6$ là số chẵn và N là số chính phương nên $N \vdots 4$.

Mà $[4(n^2+n)+6] \not\vdots 4$.

Nên $(*)$ không xảy ra hay vô lý.

Vậy tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Bài 16: Chứng minh rằng tổng các bình phương của năm số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải:

Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là $n-2, n-1, n, n+1, n+2$.

Giả sử tổng các bình phương của năm số nguyên dương liên tiếp trên là số chính phương, tức là $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$ là số chính phương.

Đặt $M=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$.

Ta có: $M=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10=5(n^2+2)$.

Do đó, vì M là số chính phương nên $(n^2+2) \vdots 5$ $\Rightarrow n^2+2$ có số tận cùng là 0 hoặc 5 $\Rightarrow n^2$ có số tận cùng là 3 hoặc 8 (vô lí).

Vậy tổng các bình phương của năm số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Bài 17: Cho n là số nguyên dương và d là một ước nguyên dương của $2n^2$. Chứng minh rằng n^2+d không phải là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử n^2+d là một số chính phương.

Đặt $2n^2=kd$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $k^2(n^2+d)=n^2k^2+k^2d=n^2k^2+2n^2k=n^2(k^2+2k)$ là số chính phương.

$\Rightarrow k^2+2k$ là số chính phương (*).

Mà $k^2<k^2+2k<(k+1)^2$ nên (*) vô lí.

Vậy với n là số nguyên dương và d là một ước nguyên dương của $2n^2$ thì n^2+d không phải là số chính phương.

Bài 18: Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số tự nhiên lẻ bất kì không phải là số chính phương.

Lời giải:

Gọi a, b là các số tự nhiên lẻ.

Giả sử tổng bình phương của hai số a và b là số chính phương, tức a^2+b^2 là số chính phương (1).

Vì a và b đều lẻ nên đặt $a=2m+1$, $b=2n+1$.

$\Rightarrow a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=[4(m^2+n^2+m+n)+2]\vdots 2$ (2)

Từ (1) và $(2)\Rightarrow \left(a^2+b^2\right)\vdots 4$ (3)

Mà $a^2+b^2=4(m^2+n^2+m+n)+2\not\vdots 4$ (4)

(3) và (4) mâu thuẫn với nhau.

Vậy tổng bình phương của hai số tự nhiên lẻ bất kì không phải là số chính phương.

Bài 19: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì n^2+2002 không phải là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử n^2+2002 là số chính phương.

$\Rightarrow n^2+2002=k^2$.

$\Rightarrow n^2-k^2=2002\Rightarrow (n-k)(n+k)=2002$ $(*)$.

Mà $\begin{cases} 2002=(2.7.11.13)\vdots 2 \\ 2002=(2.7.11.13)\not\vdots 4 \end{cases}$ nên $(n-k)(n+k)\vdots 2\Rightarrow n-k,\ n+k$ chia hết cho 2.

Hơn nữa, $(n+k)-(n-k)=2k$ nên cả hai số $n-k,\ n+k$ đều chia hết cho 2.

$\Rightarrow (n-k)(n+k)\vdots 4$.

Nên $(*)$ là điều mâu thuẫn hay không bao giờ xảy ra hay vô lý.

Vậy với mọi số tự nhiên n thì n^2+2002 không phải là một số chính phương.

Bài 20: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $(n+1)^4+n^4+1$ không phải là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $(n+1)^4+n^4+1$ là số chính phương.

Ta có $(n+1)^4+n^4+1=2n^4+4n^3+6n^2+4n+2$

$=2\left(n^4+2n^3+3n^2+2n+1\right)=2\left(n^2+n+1\right)^2$.

Do $n^2+n+1=n(n+1)+1$ là số lẻ nên $\left(n^2+n+1\right)^2$ là số lẻ.

$\Rightarrow (n+1)^4+n^4+1$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 (vô lí).

Vậy $(n+1)^4+n^4+1$ không là số chính phương.

Bài 21: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì n^5-n+2 không phải là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử n^5-n+2 là số chính phương.

Ta có: $n^5-n+2=(n^5-n)+2=n(n^4-1)+2=n(n-1)(n+1)(n^2+1)+2$ (*)

Vì $n(n-1)(n+1)(n^2+1)+2$ là số chẵn nên n^5-n+2 là số chẵn. Mà n^5-n+2 là số chính phương nên $(n^5-n+2)\vdots 4$.

Mặt khác : $n(n-1)(n+1)(n^2+1)+2\not\vdots 4$.

Nên $(*)$ là điều mâu thuẫn hay không bao giờ xảy ra hay vô lý.

Vậy n^5-n+2 không là số chính phương.

Bài 22: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $A=2012^{4n}+2013^{4n}+2014^{4n}+2015^{4n}$ không phải là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử A là số chính phương.

Ta có:

$2012^{4n}=(4.503)^{4n}\vdots 4, \forall n\in\mathbb{N}^*.$

$2014^{4n}=(2.19.53)^{4n}=4^{2n}.(19.53)^{4n}\vdots 4, \forall n\in\mathbb{N}^*.$

$2013^{4n}=2013^{4n}-1+1=\left(2013^{4n}-1\right)+1$ chia 4 dư 1.

$2015^{4n}=2015^{4n}-(-1)^{4n}+1$ chia cho 4 dư 1.

Do đó, $A=2012^{4n}+2013^{4n}+2014^{4n}+2015^{4n}$ chia cho 4 dư 2.

Ta có A là số chẵn và A chính phương nên A chia hết cho 2^2 (vô lí).

Vậy A không là số chính phương.

Bài 23: Chứng minh rằng $A=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{33}$ không phải là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử A là số chính phương.

Ta có $A=1+2+\left(2^2+2^3+2^4+2^5\right)+\ldots+\left(2^{30}+2^{31}+2^{32}+2^{33}\right)$

$=3+2^2.\left(1+2+2^2+2^3\right)+\ldots+2^{30}.\left(1+2+2^2+2^3\right)$

$=3+2.30+\ldots+2^{29}.30=3+\left(2+\ldots+2^{29}\right).3.10.$

Ta thấy A có chữ số tận cùng bằng 3 (vô lí).

Vậy A không là số chính phương.

Bài 24: Chứng minh rằng $A = n^{2004} + 1$ không phải là số chính phương khi n lẻ.

Lời giải:

Giả sử $n^{2004} + 1$ là số chính phương với n là số lẻ.

Ta có:

$$n^{2004} + 1 = a^2 \; (a \in \mathbb{N}^*).$$

$$\Leftrightarrow a^2 - (n^{1002})^2 = 1.$$

$$\Leftrightarrow (a - n^{1002})(a + n^{1002}) = 1$$

$\Rightarrow 1 \vdots (a + n^{1002}) \Rightarrow (a + n^{1002}) = 1$ điều này vô lí vì $(a + n^{1002}) > 2$ với n là số lẻ.

Vậy $n^{2004} + 1$ không là số chính phương với n là số lẻ.

Bài 25: Chứng minh rằng nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì $p - 1$ và $p + 1$ không thể là các số chính phương.

Lời giải:

Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên nên $p \vdots 2$ và $p \not\vdots 4$ (1).

*Giả sử $p + 1$ là số chính phương.

Đặt $p + 1 = m^2 \; (m \in \mathbb{N})$.

Vì p chẵn nên $p + 1$ lẻ, suy ra m^2 lẻ, suy ra m lẻ.

Đặt $m = 2k + 1 \; (k \in \mathbb{N})$.

Ta có $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$.

$\Rightarrow p + 1 = 4k^2 + 4k + 1$.

$\Rightarrow p = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1) \vdots 4$, điều này mâu thuẫn với (1).

Suy ra $p + 1$ không là số chính phương.

* Giả sử $p + 1$ là số chính phương.

$p = 2.3.5....$ là số chia hết cho 3.

Suy ra, $p - 1$ có dạng $3k + 2$.

Không có số chính phương nào có dạng $3k+2$, điều này mâu thuẫn với $p+1$ là số chính phương.

Suy ra $p-1$ không là số chính phương.

Vậy nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không thể là các số chính phương.

Dạng 2: Chứng minh không tồn tại một điều kiện nào đó của biến để một biểu thức A là số chính phương.

I. Phương pháp giải:

- Đề bài yêu cầu chứng minh không tồn tại một điều kiện nào đó của biến để một biểu thức A là số chính phương.
- Giả sử biểu thức A là số chính phương.
- Sử dụng các tính chất để tìm ra điều vô lí hay mâu thuẫn.
- Vậy không tồn tại một điều kiện nào đó của biến để một biểu thức A là số chính phương.

II. Bài toán

Bài 26: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào để $2006+n^2$ là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $2006+n^2$ là số chính phương thì $2006+n^2=m^2\ (m\in N)$.

$\Rightarrow m^2-n^2=2006$.

$\Leftrightarrow (m+n).(m-n)=2006\ \ (1)$

Như vậy, trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (2)

Mặt khác m + n + m – n = 2m chẵn.

Suy ra hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $m+n$ và $m-n$ là hai số chẵn.

Suy ra $(m+n).(m-n)\vdots 4$ nhưng 2006 không chia hết cho 4, so sánh với (1), ta thấy đây điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên nào để $2006+n^2$ là số chính phương.

Bài 27: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào để $2010+n^2$ là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $2010+n^2$ là số chính phương thì $2010+n^2=m^2\ (m\in N)$.

$\Rightarrow m^2-n^2=2010$.

$\Leftrightarrow (m+n).(m-n)=2010\ \ (1)$

Như vậy, trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (2)

Mặt khác m + n + m – n = 2m.

Suy ra hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $m+n$ và $m-n$ là hai số chẵn

Suy ra $(m+n).(m-n)\vdots 4$ nhưng 2010 không chia hết cho 4, so sánh với (1), ta thấy đây là điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên nào để $2010+n^2$ là số chính phương.

Bài 28: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào để $2014+n^2$ là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $2014+n^2$ là số chính phương thì $2014+n^2=m^2\,(m\in N)$.

$\Rightarrow m^2-n^2=2014$.

$\Leftrightarrow (m+n).(m-n)=2014\ (1)$

Như vậy, trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (2)

Mặt khác $m+n+m-n=2m$.

Suy ra hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $m+n$ và $m-n$ là hai số chẵn.

Suy ra $(m+n).(m-n)\vdots 4$ nhưng 2014 không chia hết cho 4, so sánh với (1), ta thấy đây là điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên nào để $2014+n^2$ là số chính phương.

Bài 29: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào để $2018+n^2$ là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $2018+n^2$ là số chính phương thì $2018+n^2=m^2\,(m\in N)$.

$\Rightarrow m^2-n^2=2018$.

$\Leftrightarrow (m+n).(m-n)=2018\ (1)$

Như vậy, trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (2)

Mặt khác $m+n+m-n=2m$.

Suy ra hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $m+n$ và $m-n$ là hai số chẵn.

Suy ra $(m+n).(m-n)\vdots 4$ nhưng 2018 không chia hết cho 4, so sánh với (1), ta thấy đây là điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên nào để $2018+n^2$ là số chính phương.

Bài 30: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào với k chẵn và $k \not\vdots 4$ $(k \in \mathbb{N})$ để $k+n^2$ là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $k+n^2$ là số chính phương thì $k+n^2=m^2\,(m\in N)$.

$\Rightarrow m^2-n^2=k$.

$\Leftrightarrow (m+n).(m-n)=k\ \ (1)$.

Như vậy, vì k chẵn nên trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (2)

Mặt khác, $m+n+m-n=2.m$.

Suy ra, hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $m+n$ và $m-n$ là hai số chẵn.

Suy ra $(m+n).(m-n)\vdots 4$ nhưng k không chia hết cho 4 , so sánh với (1), ta thấy đây là điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n nào với k chẵn và $k\not\vdots 4(k\in N)$ để $2018+n^2$ là số chính phương.

Bài 31: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào để $13n^2+2$ là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Đặt $13n^2=m^2\ (*)$.

Nếu n chẵn (lẻ) thì m cũng chẵn (lẻ) nên cùng m,n tính chất chẵn (lẻ).

+) Nếu m,n là các số lẻ thì $13n^2+2$ chia 4 dư 3 (vì $13n^2$ chia 4 dư 1) nên không tồn tại m^2 do m^2 chia 4 dư 1.

+) Nếu m,n chẵn thì $13n^2$ chia 4 dư 2 và $m^2\vdots 4$ là vô lý.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n sao cho $13n^2+2$ là số chính phương.

Bài 32: Chứng minh rằng một số chẵn bất kỳ không chia hết cho 4 thì không phân tích thành hiệu của hai số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $n=4k+2$ $(k\in N)$(chẵn chia 4 dư 2 do không chia hết cho 4); $n=a^2-b^2 \Rightarrow 4k+2=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ cùng tính chẵn lẻ.

$$\Rightarrow \begin{cases}(a-b)\vdots 2\\(a+b)\vdots 2\end{cases} \Rightarrow (a-b)(a+b)\vdots 4 \Rightarrow (4k+2)\vdots 4$$.

Điều này trái với gia thiết ban đầu.

Vậy một số chẵn bất kì không chia hết cho 4 thì không phân tích thành hiệu của hai số chính phương.

**❢ HẾT **