TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

12 2011 Số 414

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 48

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Chào mừng Ngày thành lập Quân đội nhân dân Việt Nam 22/12

VẼ NGÔI SAO thành thơ

ĐOÀN HỮU DŨNG
(Hà Nội)

Kính tặng Trường THPT Hùng Vương, Phú Thọ - Đơn vị Anh hùng

Mây gió ngợp núi đồi
Tiếng sáo diều vi vút
Lớp học thời chiến tranh
Kỉ niệm xanh cỏ hát

Thiếu gạo, dầu, sách vở
Cơm những sắn những khoai
Ánh lửa đèn cứ soi
Những mộng mơ sao sáng.

"Chín điểm trên mặt phẳng
Không có ba thẳng hàng
Vẽ được Sao Năm Cánh"
Tiếng cười vang đồi trăng...

"Đa giác lồi" kì diệu
Phiêu diêu và bao nhau
Ẩn hiện bông mai nhỏ
Năm cánh hoa tươi màu.

Toán học và Tuổi trẻ
Huyền thoại Erdös (*)
Một phút giây ngẫu hứng
Thổi bùng bao ước mơ...

(*) Xem Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 410, tháng 8, năm 2011, trang 12.

(Theo nguồn Báo Nhân dân Cuối tuần, số 47 (1190)

DÙNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU của hàm số dạng $y=ax+b$ để chứng minh BẤT ĐẲNG THỨC

PHAN VĂN ANH
(GV THPT Số 1 Quảng Trạch, Quảng Bình)

❖Nhắc lại

Xét hàm số $y = ax + b$.

Khi $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Khi $a = 0$ thì hàm số không đổi trên $\mathbb{R}$.

✪Bài toán 1. *Cho $x, y, z \in [0;1]$. Chứng minh rằng*

$$x+y+z-(xy+yz+xz)\le 1.$$

Lời giải. $x+y+z-(xy+yz+xz)\le 1.$

$$\Leftrightarrow (1-y-z)x+y+z-yz-1\le 0.$$

Xét hàm số $f(x)=(1-y-z)x+y+z-yz-1$,

có $f(0)=y+z-yz-1=-(1-y)(1-z)\le 0$

$f(1)=-yz\le 0$.

- Nếu $1-y-z>0$ thì $f(x)$ đồng biến trên $[0;1]$. Do $x\le 1 \Rightarrow f(x)\le f(1)\Rightarrow f(x)\le 0$.
- Nếu $1-y-z<0$ thì $f(x)$ nghịch biến trên $[0;1]$. Do $x\ge 0\Rightarrow f(x)\le f(0)\Rightarrow f(x)\le 0$.
- Nếu $1-y-z=0$ thì $f(x)=y+z-yz-1=-yz\le 0$.

Vậy $f(x)\le 0\ \ \forall x,y,z\in[0;1]$.

Dấu bằng xảy ra khi $(x;y;z)=(0;0;1)$ và các hoán vị của nó. ❐

Chú ý. Từ bài toán trên ta nhận thấy. Cho hàm số $f(x)=ax+b$.

- Nếu $f(\alpha)\le 0, f(\beta)\le 0$ thì $f(x)\le 0,\ \forall x\in[\alpha;\beta]$.
- Nếu $f(\alpha)\ge 0, f(\beta)\ge 0$ thì $f(x)\ge 0, \forall x\in[\alpha;\beta]$.
- $\min\{f(\alpha); f(\beta)\}\le f(x)\le \max\{f(\alpha); f(\beta)\}$ với $\forall x\in[\alpha;\beta]$.

***Tổng quát.** Cho $x,y,z\in[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$A=x+y+z-m(xy+yz+xz) \text{ với } m\ge 1.$$

Lời giải. $A=(1-my-mz)x+y+z-myz$.

Xét hàm số $f(x)=(1-my-mz)x+y+z-myz$ trên $[0;1]$, có

$$f(0)=y+z-myz=1-(1-y)(1-z)+yz-myz$$
$$=1-(1-y)(1-z)-yz(m-1)\le 1.$$
$$f(1)=1-my-mz+y+z-myz$$
$$=1-m(y+z)+y+z-myz$$
$$=1-(m-1)(y+z)-myz\le 1.$$

Khi đó $f(x)\le \max\{f(1);f(0)\}=1$ nên $\max A=1$ khi $(x;y;z)=(0;0;1)$ và các hoán vị của nó. ❐

Nhận xét. Từ kết quả Bài toán 1, ta có thể giải cách khác như sau.

$$A=x+y+z-m(xy+yz+xz)$$
$$=x+y+z-(xy+yz+xz)-(m-1)(xy+yz+xz)$$
$$\le 1-(m-1)(xy+yz+xz)\le 1.$$

✪Bài toán 2. *Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng*

$$4(xy+yz+xz)\le 9xyz+1.$$

Lời giải. Không giảm tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z\Rightarrow \frac{1}{3}\le x\le 1$, ta có

$$4(xy+yz+xz)\le 9xyz+1$$
$$\Leftrightarrow (9yz-4y-4z)x+1-4yz\ge 0.$$

Xét hàm số $f(x)=(9yz-4y-4z)x+1-4yz$ trên $\left[\frac{1}{3};1\right]$, để ý rằng khi $x=1$ thì $y=z=0$, khi $x=\frac{1}{3}$ thì $y=z=\frac{1}{3}$. Ta có $f(1)=1$; $f\left(\frac{1}{3}\right)=0$.

Do đó $f(x)\ge \min\left\{f(1); f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}=0$, dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. ❐

***Tổng quát.** *Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của*

$$A=xy+yz+xz+mxyz.$$

Lời giải. Theo Bài toán 2, ta có

$$A=xy+yz+xz-\frac{9}{4}xyz+\left(m+\frac{9}{4}\right)xyz$$
$$\le\frac{1}{4}+\left(m+\frac{9}{4}\right)xyz.$$

• Nếu $m<-\frac{9}{4}$ thì $A\le\frac{1}{4}+\left(m+\frac{9}{4}\right)xyz\le\frac{1}{4}$.

nên $\max A=\frac{1}{4}$, đạt được khi $(x;y;z)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ và các hoán vị của nó.

• Nếu $m\ge-\frac{9}{4}$ thì

$$A\le\frac{1}{4}+\left(m+\frac{9}{4}\right)xyz\le\frac{1}{4}+\left(m+\frac{9}{4}\right)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$
$$=\frac{1}{4}+\left(m+\frac{9}{4}\right)\frac{1}{27}=\frac{m+9}{27}$$

$\Rightarrow \max A=\frac{m+9}{27}$ đạt được khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

✪Bài toán 3. *Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng*

$$x^2+y^2+z^2+\frac{9}{2}xyz\ge\frac{1}{2}.$$

Lời giải. Do $x+y+z=1$ nên

$$x^2+y^2+z^2+\frac{9}{2}xyz\ge\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 1-2(xy+yz+xz)+\frac{9}{2}xyz\ge\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 4(xy+yz+xz)\le 9xyz+1$, theo Bài Toán 2, BĐT này luôn đúng, suy ra đpcm. ❐

★Bài toán 4. *Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng*

$$x^2+y^2+z^2+xyz\ge\frac{10}{27}.$$

Lời giải. Ta có $x^2+y^2+z^2+xyz\ge\frac{10}{27}$

$\Leftrightarrow 1-2(xy+yz+xz)+xyz\ge\frac{10}{27}$

$\Leftrightarrow (2y+2z-yz)x+2yz\le\frac{17}{27}$.

Không giảm tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z\Rightarrow \frac{1}{3}\le x\le 1$. Xét $f(x)=(2y+2z-yz)x+2yz$ trên $\left[\frac{1}{3};1\right]$ có $f(1)=0$; $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{27}$. Khi đó

$f(x)\le\max\left\{f(1);f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{17}{27}$, suy ra đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. ❐

***Tổng quát.** *Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$A=x^2+y^2+z^2+mxyz.$$

Lời giải. Áp dụng Bài toán 3, ta có

$$A=x^2+y^2+z^2+\frac{9}{2}xyz+\left(m-\frac{9}{2}\right)xyz\ge\frac{1}{2}+\left(m-\frac{9}{2}\right)xyz.$$

• Nếu $m\ge\frac{9}{2}$ thì $\min A=\frac{1}{2}$, đạt được khi $(x;y;z)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ và các hoán vị của nó.

• Nếu $m<\frac{9}{2}$ thì

$$A\ge\frac{1}{2}+\left(m-\frac{9}{2}\right)xyz\ge\frac{1}{2}+\left(m-\frac{9}{2}\right)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$
$$=\frac{1}{2}+\left(m-\frac{9}{2}\right)\frac{1}{27}=\frac{m+9}{27}.$$

Vậy $\min A=\frac{m+9}{27}$ đạt được khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. ❐

Cuối cùng mời các bạn tự luyện tập thông qua các bài toán sau và nêu bài toán tổng quát.

1. Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$2(xy+yz+xz)-xyz\le\frac{17}{27}.$$

2. Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng

$$2(x^2+y^2+z^2)+xyz\ge 7.$$

3. Cho $x, y, z\in[0;2]$. Chứng minh rằng

$$2(x+y+z)-(xy+yz+xz)\le 4.$$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH THÁI BÌNH

NĂM HỌC 2010 - 2011

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1. (3 *điểm*) Chứng minh rằng

$$\frac{87}{89}<\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2011\sqrt{2010}}<\frac{88}{45}.$$

Câu 2. (3 *điểm*) Tìm phần dư của phép chia đa thức $p(x)$ cho $(x-1)(x^3+1)$ biết $p(x)$ chia cho $x-1$ thì dư 1, $p(x)$ chia cho x^3+1 thì dư x^2+x+1.

Câu 3. (3 *điểm*) Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+1}=x^3-15x^2+75x-131.$$

Câu 4. (3 *điểm*) Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+2a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a+2b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b+2c}}\leq\frac{3}{2}.$$

Câu 5. (3 *điểm*) Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Các góc $\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}$ thỏa mãn $\widehat{C}=2\widehat{A}+\widehat{B}$. Chứng minh rằng

$$c^2 < 2a^2 + b^2.$$

Câu 6. (3 *điểm*) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là điểm bất kì thuộc cung BC không chứa điểm A (M không trùng với B và C). Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB.

a) Chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{BC}{MA'}=\dfrac{CA}{MB'}+\dfrac{AB}{MC'}$.

Câu 7. (2 *điểm*) Cho hình bình hành $ABCD$ và $n = 4k + 1$ (k nguyên dương) đường thẳng, mỗi đường thẳng đó chia hình bình hành $ABCD$ thành hai hình thang có tỉ số diện tích là m (m là số dương cho trước). Chứng minh rằng có ít nhất $k + 1$ đường thẳng trong số n đường thẳng nói trên đồng quy. (Hình bình hành cũng được xem như là hình thang).

NGUYỄN KHÁNH TOÀN
(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)
sưu tầm và giới thiệu

Giải đáp CÂU LẠC BỘ: KỈ NIỆM MỘT SỐ NHÀ TOÁN HỌC

(Đề đăng trên THTT số 409, tháng 7 năm 2011)

Bạn *Sử* sắp xếp các mục A_i, B_i, C_i, D_i phù hợp với từng nhà toán học như sau, trong đó có thể đổi chỗ C_1 cho C_2 và C_3 cho C_4:

Bolzano B.	A_1, B_4, C_7, D_7
Cardano G.	A_2, B_1, C_6, D_4
Chebyshev P.L.	A_3, B_6, C_5, D_2
Fermat P.	A_4, B_3, C_3, D_3
Galois E.	A_5, B_5, C_4, D_5
Kepler J.	A_6, B_2, C_1, D_6
Zermelo E. F. F.	A_7, B_7, C_2, D_1.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng và gửi bài về Tòa soạn sớm:

1) *Nguyễn Quang Trọng*, 11A1, THPT Tây Tiền Hải, Tiền Hải, **Thái Bình**.

2) *Chu Tự Tài*, 11A12, THPT Diễn Châu II, Diễn Châu, **Nghệ An.**

3) *Trần Võ Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên **Hà Tĩnh**.

4) *Huỳnh Thanh Dư*, 10L, THPT Cao Lãnh, **Đồng Tháp**.

AN MINH

Hướng dẫn giải Đề thi vào lớp 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH

NĂM HỌC 2011-2012

(Đề thi đã đăng trên THTT số 412, tháng 10 năm 2011)

Câu 1. a) Điều kiện $x \geq \frac{-3}{2}$. PT đã cho tương đương với

$$\left(|x| - \sqrt{2x+3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{2x+3}$$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 3.$

Tập nghiệm của PT là $\{-1; 3\}$.

b) Đặt $\begin{cases} x^2 - 2x = u \\ 2x - y = v. \end{cases}$ HPT đã cho trở thành

$$\begin{cases} u.v = 6 \\ u - 2v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 4, v = \dfrac{3}{2} \\ u = -3, v = -2. \end{array}\right.$$

Giải ra ta được nghiệm $(x\,;y)$ của HPT là

$$\left(1-\sqrt{5}; \frac{1}{2} - 2\sqrt{5}\right); \left(1+\sqrt{5}; \frac{1}{2} + 2\sqrt{5}\right).$$

Câu 2. a) Bạn đọc tự chứng minh kết quả sau

Nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ (1)

Do $abc \neq 0$ nên $ab + bc + ca = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$

Áp dụng (1), ta có $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$.

$$T = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} = abc\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = 3.$$

b) Ta có $3x^2 + 6y^2 + z^2 + 3y^2z^2 - 18x = 6$ (1)

$\Leftrightarrow 3(x-3)^2 + 6y^2 + z^2 + 3y^2z^2 = 33$ (2)

Từ (2) suy ra $z^2 \,\vdots\, 3$ và $z^2 \leq 33$. Vì z nguyên nên $z = 0$ hoặc $|z| = 3$.

- Nếu $z = 0$ thì $(2) \Leftrightarrow (x-3)^2 + 2y^2 = 11$ (3)

Từ (3) suy ra $2y^2 \leq 11 \Rightarrow |y| \leq 2$.

– Với $|y| = 1$, từ (3) suy ra $x \in \{0; 6\}$.

– Với $y = 0$ hoặc $|y| = 2$ thì không có số nguyên x nào thỏa mãn (3).

- Nếu $|z| = 3$ thì $(2) \Leftrightarrow (x-3)^2 + 11y^2 = 8$ (4)

Từ (4) suy ra $11y^2 \leq 8 \Rightarrow y = 0$, không có số nguyên x nào thỏa mãn (4).

Vậy PT (1) có bốn nghiệm nguyên $(x; y; z)$ là $(0;1;0), (0;-1;0), (6;1;0), (6;-1;0)$.

Câu 3. a) Điều kiện $x \geq 0$

$$F = \frac{1-4\sqrt{x}}{2x+1} + 1 - \frac{2x}{x^2+1} + 1 - 2$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2x+1} + \frac{(x-1)^2}{x^2+1} - 2 \geq -2.$$

Vậy $F_{\min} = -2$ khi và chỉ khi $x = 1$.

b) Điều kiện $a \neq 1, b \neq 1$. Từ giả thiết suy ra

$2(a^2+1)(b^2+1) = (a-1)(b-1)(ab+1)$ (1)

Ta có $2(a^2+1) \geq (a-1)^2$ (2)

$2(b^2+1) \geq (b-1)^2$ (3)

$(a^2+1)(b^2+1) \geq (ab+1)^2$ (4)

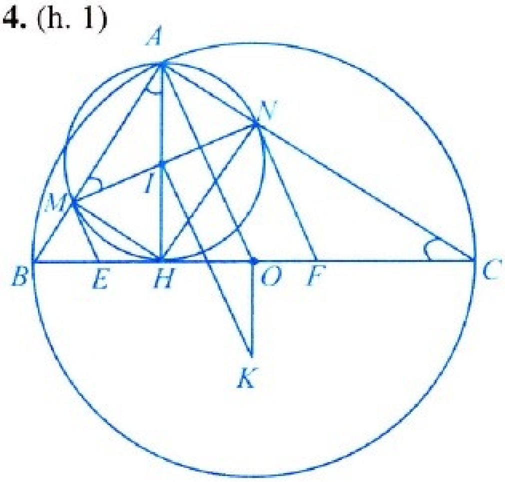
Nhân theo vế (2), (3) và (4) ta có

$4(a^2+1)^2(b^2+1)^2 \geq (a-1)^2(b-1)^2(ab+1)^2$.

Suy ra $2(a^2+1)(b^2+1) \geq (a-1)(b-1)(ab+1)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi đẳng thức ở (2), (3) và (4) xảy ra đồng thời. Khi đó $a = b = -1$.

Câu 4. (h. 1)



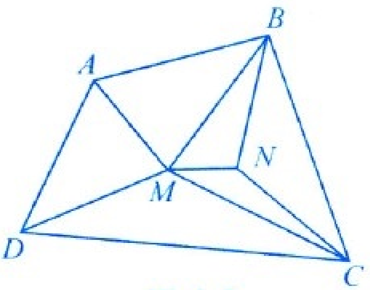
Hình 1

a) Vì $\widehat{BAC}=90^{\circ}$, $AH \perp BC$ nên $\widehat{BAH}=\widehat{ACB}$. Mặt khác $\widehat{BAH}=\widehat{MNH}$. Do đó $\widehat{MNH}=\widehat{ACB}$, suy ra MN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CHN.

Tương tự MN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMH.

b) Dễ thấy $\widehat{OAC}=\widehat{OCA}$; $\widehat{MAI}=\widehat{AMI}$, mà $\widehat{MAI}=\widehat{OCA}$ suy ra $\widehat{AMI}=\widehat{OCA}$. Do đó tứ giác $BMNC$ nội tiếp. Các đường trung trực của MN và BC cắt nhau tại K. Ta có $IK \perp MN$, mặt khác $\widehat{OAC}=\widehat{OCA}=\widehat{AMN}$ suy ra $OA \perp MN$ nên $KI \,//\, OA$.
Lại có $AI \,//\, OK$, suy ra tứ giác $AIKO$ là hình bình hành, do đó $AI = OK = \frac{1}{2}AH$.
Ta có BK là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và $BK^2 = BO^2 + OK^2 = \frac{BC^2}{4} + \frac{AH^2}{4}$.
Do BC không đổi nên BK lớn nhất khi và chỉ khi AH lớn nhất. Khi đó A là điểm chính giữa cung BC.

Câu V. (h. 2). Xét tứ giác $ABCD$ có diện tích bằng 1cm². Với điểm thứ nhất M, ta có 4 tam giác chung đỉnh M đôi một không có điểm trong chung.



Hình 2

Với điểm thứ hai N phải là điểm trong của một trong 4 tam giác trên. Nối N với 3 đỉnh của tam giác đó, tạo nên 3 tam giác chung đỉnh N tuy nhiên số tam giác đôi một không có điểm trong chung chỉ tăng thêm 2, vì mất đi 1 tam giác chứa điểm N. Số tam giác không có điểm trong chung lúc này là 4 + 2.
Tương tự với 2009 điểm còn lại, cuối cùng số tam giác đôi một không có điểm trong chung là 4 + 2 + 2009.2 = 4024.
Tổng diện tích của 4024 các tam giác đó bằng 1cm², nên tồn tại ít nhất một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4024}$ cm² (đpcm).

NGUYỄN LƯU
(*GV THPT chuyên Hà Tĩnh*) giới thiệu

SỰ TƯƠNG GIAO... *(Tiếp trang 8)*

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của PT (2) thì $A\left(x_1; m\left(x_1-2\right)+2\right), B\left(x_2; m\left(x_2-2\right)+2\right)$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\left(1+m^2\right)\left(x_2-x_1\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(1+m^2\right)}\left|x_2-x_1\right| \\ &= \frac{\sqrt{\left(1+m^2\right)}.2\sqrt{\Delta'}}{m} \\ &= 2\sqrt{5}\sqrt{\frac{1+m^2}{m}} \geq 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

(Do $m > 0$ và $\frac{1+m^2}{m} \geq 2$). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = 1$.

Vậy với $m = 1$ thì d_m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai nhánh của đồ thị và độ dài đoạn AB nhỏ nhất bằng $2\sqrt{10}$. ❒

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hàm số $y = (x+1)^2(x-2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua $M(2;0)$ và có hệ số góc k. Tìm k để đường thẳng d cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt.

2. Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$ có đồ thị (C).

a) Chứng minh rằng đường thẳng

$$d: y = nx + n + 1$$

luôn cắt (C) tại một điểm cố định.

b) Tìm n để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

3. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

4. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác AOB có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (O là gốc tọa độ)

(Đề thi Đại học Khối B năm 2010)

Hướng dẫn giải Đề thi vào lớp 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA

NĂM HỌC 2011-2012

(Đề thi đã đăng trên THTT số 413, tháng 11 năm 2011)

Câu 1. Ta có $x^2-1=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-1=\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$.

Suy ra $\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$(do $a\ge 1$).

Tương tự, ta có $\sqrt{y^2-1}=\frac{1}{2}\left(b-\frac{1}{b}\right)$. Thay vào P và biến đổi thu được $P=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2+1}$.

Câu 2. $\begin{cases} x^4-x^3y+x^2y^2=1 & (1)\\ x^3y-x^2+xy=-1 & (2)\end{cases}$

Trừ từng vế phương trình (1) cho phương trình (2), ta được

$(x^2-xy)^2+(x^2-xy)-2=0 \Leftrightarrow x^2-xy=1$

hoặc $x^2-xy=-2$.

• Khi $xy=x^2-1$ thì $(2)\Rightarrow x^3y=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ y=0\end{array}\right.$

kết hợp với (1) được $(x;y)=(1;0)$ và $(x;y)=(-1;0)$ là nghiệm của hệ.

• Khi $xy=x^2+2$ thì $(2)\Rightarrow x^4+2x^2+3=0$, PT này vô nghiệm. Vậy HPT có hai nghiệm $(x;y)$ là $(1;0)$ và $(-1;0)$.

Câu 3. Biến đổi PT về $(x+y)^2=xy(xy+1)$.

• Nếu $x+y=0$ thì $xy(xy+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=0\\ xy=-1.\end{array}\right.$

Với $xy=0$, suy ra $x=y=0$.

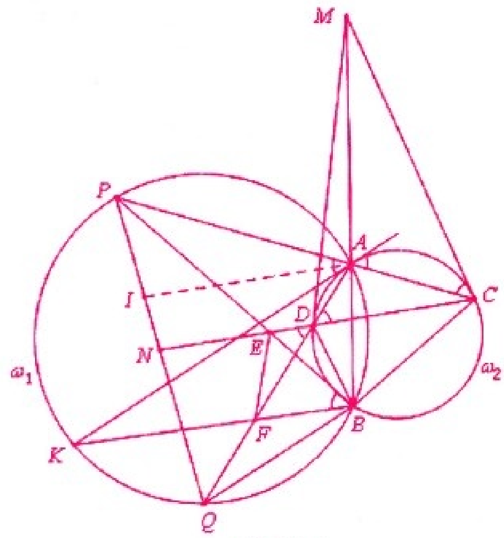
Với $xy=-1$, suy ra $x=1; y=-1$ hoặc $x=-1; y=1$.

• Nếu $x+y\ne 0$ thì xy và $xy+1$ là hai số nguyên liên tiếp khác 0, nên nguyên tố cùng nhau. Do đó $xy(xy+1)$ không thể là số chính phương.

Vậy các cặp nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình là $(0;0), (1;-1), (-1;1)$.

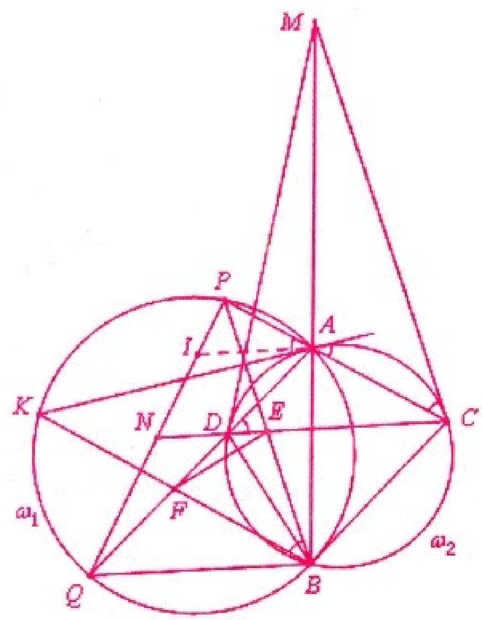
Câu 4. a) Trường hợp $BFED$ là tứ giác lồi (h. 1).

Ta có $\widehat{EDF}=\widehat{ADC}=\widehat{MCA}=\widehat{PAK}=\widehat{PBK}=\widehat{EBF}$, suy ra $BFED$ là tứ giác nội tiếp.



Hình 1

Trường hợp $BFDE$ là tứ giác lồi (h. 2).



Hình 2

Chứng minh được $\widehat{EBF}+\widehat{EDF}=180^{o}$, suy ra $BFDE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do $\widehat{DQB}=\widehat{CPB}$ ($=\frac{1}{2}$ sđ $\widehat{AB}$ của ω_1) và $\widehat{QDB}=\widehat{PCB}$ (cùng bù với $\widehat{BDA}$), suy ra $\Delta DBQ \backsim \Delta CBP$, nên $\frac{CP}{DQ}=\frac{BC}{BD}$ (1)

Xét hai tam giác MAC và MCB, có $\widehat{BMC}$ chung và $\widehat{MCA}=\widehat{MBC}$, vì MC là tiếp tuyến của ω_2, suy ra $\Delta MAC \backsim \Delta MCB$. Do vậy

$$\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MC}=\frac{MC}{MB}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{CA}{CB}\right)^2=\frac{MA}{MC}.\frac{MC}{MB}=\frac{MA}{MB} \quad (2)$$

Chứng minh tương tự $\left(\frac{DA}{DB}\right)^2=\frac{MA}{MB}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra

$$\left(\frac{CA}{CB}\right)^2=\left(\frac{DA}{DB}\right)^2\Rightarrow\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}\Rightarrow\frac{CA}{DA}=\frac{BC}{BD} \quad (4)$$

Từ (1) và (4) suy ra $\frac{CP}{DQ}=\frac{BC}{BD}=\frac{CA}{DA}$ (5)

c) Gọi $N=CD\cap PQ$. Từ (5) suy ra $\frac{CA}{CP}=\frac{DA}{DQ}$ (6)

Từ A kẻ AI song song với CD ($I\in PQ$). Suy ra $\frac{CA}{CP}=\frac{NI}{NP}$ và $\frac{DA}{DQ}=\frac{NI}{NQ}$, kết hợp với (6), suy ra $NP=NQ$.

Câu 5. Với mỗi tập $B=\{a_1;a_2;a_3;a_4;a_5\}\subset A$, ta có tất cả mười tổng a_i+a_j, với $i\neq j$, $i,j\in\{1,2,3,4,5\}$.

Giả sử chữ số hàng đơn vị của mười tổng a_i+a_j khác nhau đôi một, khi đó tổng tất cả các chữ số hàng đơn vị của chúng là

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

Như vậy $\sum_{1\le i<j\le 5}(a_i+a_j)$ là một số lẻ (1)

Mặt khác, lại có $\sum_{1\le i<j\le 5}(a_i+a_j)=4\sum_{i=1}^{5}a_i$, suy ra $\sum_{1\le i<j\le 5}(a_i+a_j)$ là một số chẵn (2)

Ta có (1) và (2) mâu thuẫn. Vậy yêu cầu bài toán được chứng minh.

PHẠM NGỌC QUANG

(Sở GD&ĐT Thanh Hóa) sưu tầm và giới thiệu

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

SỰ TƯƠNG GIAO của hai đồ thị

TRỊNH XUÂN TÌNH
(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y=g(x)$ có đồ thị là (C_2). Tọa độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x). \end{cases}$

Phương trình (PT) hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $f(x)=g(x)$. Số giao điểm của (C_1) và (C_2) chính là số nghiệm của PT $f(x)=g(x)$.

• Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, giả sử $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$. Khi đó $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

• Phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1,x_2 thì $|x_2-x_1|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$. Nếu $b=2b'$ thì $|x_2-x_1|=\dfrac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}$.

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN

1. Bài toán về giao điểm của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ và đường thẳng $y=mx+n$.

★**Thí dụ 1.** *Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị là (C). Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(3;20)$ và có hệ số góc m. Tìm m để đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -2.*

Lời giải. Đường thẳng d có PT $y=m(x-3)+20$. PT hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$x^3-3x+2=m(x-3)+20$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+6-m)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x^2+3x+6-m=0 \end{array}\right. \quad (1)$$

Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -2 thì PT (1) phải có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -2 và khác 3. Đặt $t=x+2$ thì PT (1) trở thành $f(t)=t^2-t+4-m=0$ (2)

PT (1) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -2 và khác 3 khi PT (2) có hai nghiệm dương phân biệt khác 5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=4m-15>0 \\ S=1>0 \\ P=4-m>0 \\ f(5)=24-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{15}{4}<m<4. \square$$

★**Thí dụ 2.** *Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C) và m là tham số thực. Tìm m để đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$.*

Lời giải. PT hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành có dạng

$$x^3-2x^2+(1-m)x+m=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-m)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-x-m=0. \end{array}\right.$$

Đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1,x_2,x_3 \Leftrightarrow g(x)=x^2-x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=1+4m>0 \\ g(1)=-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<m\neq 0.$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1+x_1^2+x_2^2<4$$
$$\Leftrightarrow 1+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2<4 \Leftrightarrow m<1.$$

Vậy $-\dfrac{1}{4}<m<1$ $(m\neq 0)$ là các giá trị cần tìm. $\square$

2. Bài toán về giao điểm của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\,(a \neq 0)$ với trục hoành

★Thí dụ 3. *Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m+1$ có đồ thị là (C_m), m là tham số thực. Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.*

Lời giải. PT hoành độ giao điểm giữa (C_m) và Ox là

$$x^4-(3m+2)x^2+3m+1=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-3m-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^2-3m-1=0. \end{array}\right.$$

(C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi PT $x^2-3m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 và khác ± 1. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 0<3m+1<4 \\ 3m+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(-\frac{1}{3};1\right)\setminus\{0\}.\square$$

★Thí dụ 4. *Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m-1$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.*

Lời giải. PT hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là $x^4-2mx^2+2m-1=0$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-2m+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x^2-2m+1=0. \end{array}\right.$$

Để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt thì ta phải có $\begin{cases} 2m-1>0 \\ 2m-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<m\neq 1.$

• Nếu $m>1$ thì (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt (theo thứ thự từ nhỏ đến lớn) là
$x_1=-\sqrt{2m-1}, x_2=-1, x_3=1, x_4=\sqrt{2m-1}$.
Các nghiệm này lập thành cấp số cộng khi

$$x_1+x_3=2x_2 \Leftrightarrow -\sqrt{2m-1}+1=-2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2m-1}=3 \Leftrightarrow m=5.$$

• Nếu $\frac{1}{2}<m<1$ thì (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là (theo thứ thự từ nhỏ đến lớn) là
$x_1=-1, x_2=-\sqrt{2m-1}, x_3=\sqrt{2m-1}, x_4=1.$
Các nghiệm này lập thành cấp số cộng khi

$$x_1+x_3=2x_2 \Leftrightarrow -1+\sqrt{2m-1}=-2\sqrt{2m-1}$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2m-1}=1 \Leftrightarrow m=\frac{5}{9}.$$

Vậy với $m=5$ hoặc $m=\frac{5}{9}$ thì (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. ❐

3. Bài toán về giao điểm của đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ với đường thẳng $y=mx+n$.

★Thí dụ 5. *Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-2}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $d_m: y=m(x-2)+2$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất.*

Lời giải. PT hoành độ giao điểm giữa (C) và d_m là $\frac{2x+1}{x-2}=m(x-2)+2$

$$\Leftrightarrow mx^2-4mx+4m-5=0\ (x\neq 2) \qquad (2)$$

Nhận xét

• Khi $x=2$ thì PT $mx^2-4mx+4m-5=0$ $\Leftrightarrow -5=0$ (vô lí) nên PT $mx^2-4mx+4m-5=0$ không nhận $x=2$ làm nghiệm.

• Đường thẳng $d_m: y=m(x-2)+2$ luôn đi qua điểm cố định $I(2;2)$ là tâm đối xứng của đồ thị (C) nên nếu đường thẳng d_m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B thì A, B thuộc hai nhánh của đồ thị (C) và phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=5m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>0.$

(Xem tiếp trang 5)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 3

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 *điểm*) Cho hàm số

$$y=\frac{2x-3}{x-2}\ (C)$$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Viết phương trình tiếp tuyến tại M thuộc (C), biết rằng tiếp tuyến đó cắt hai đường tiệm cận tại A, B sao cho $\cos\widehat{ABI}=\frac{4}{\sqrt{17}}$ với I là giao điểm của hai đường tiệm cận (A nằm trên tiệm cận đứng, B nằm trên tiệm cận ngang).

Câu II. (2 *điểm*)

1) Giải phương trình

$$x^3-\sqrt[3]{x+2\ln x}-\frac{2}{3}\ln(x+2\ln x)=0.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(3x+y)(x+3y)\sqrt{xy}=14\\(x+y)(x^2+14xy+y^2)=36.\end{cases}$$

Câu III. (1 *điểm*) Tính tích phân

$$I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin 2x-2\sin x}.$$

Câu IV. (1 *điểm*)

Cho hình trụ với đáy là hai đường tròn $(O\,;R)$; $(O'\,;R)$; chiều cao $OO'=\frac{2R}{3}$ và đường sinh AB. Tính thể tích khối tứ diện đều $ABCD$ biết rằng C, D nằm trên mặt trụ.

Câu V. (1 *điểm*) Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a^4+b^4+c^4=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F=\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}.$$

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa. (2 *điểm*)

1) Cho đường tròn (C): $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ và $A(3\,;0)$. Viết phương trình đường thẳng chứa dây cung của đường tròn qua A khi dây cung có độ dài bé nhất.

2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $(d_1):\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$ và

$$(d_2):\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}.$$

Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1) hợp với (d_2) một góc 30°.

Câu VIIa. (1 *điểm*)

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm có 4 chữ số mà tổng các chữ số của nó là bội của 4?

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VIb. (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét elip (E) đi qua điểm $M(-2;-3)$ và có phương trình đường chuẩn là $x+8=0$. Viết phương trình chính tắc của (E).

2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;1\,;0)$, $C(0\,;3\,;2)$, và mặt phẳng $(\alpha):x+2y+2=0$. Tìm tọa độ của điểm M, biết rằng M cách đều các điểm A, B, C và mặt phẳng (α).

Câu VIIb. (1 *điểm*)

Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau? Tính tổng các số tự nhiên đó.

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Ta thấy $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MN}=(3;0)$.

Giả sử $Q(a;a^3+3a^2-4)$ thì $P(a+3;a^3+3a^2-4)$.

Vì $P\in(C)$ nên

$(a+3)^3+3(a+3)^2-4=a^3+3a^2-4$

$\Leftrightarrow a=-2$ hoặc $a=-3$.

Có hai đường thẳng $d_1:y=0$; $d_2:y=-4$.

Câu II. 1) ĐK: $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$$\text{PT}\Leftrightarrow\frac{2\left(\sqrt{3}-2\sin 2x-2\sqrt{3}\cos 2x+2\sin 4x\right)}{\sin x-\sqrt{3}\cos x}=3(1-\cos 2x)-(1+\cos 2x).$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{3}-2\sin 2x\right)(1-2\cos 2x)}{\sin x-\sqrt{3}\cos x}=1-2\cos 2x.$$

Đáp số. $x=\pm\frac{\pi}{6}+l\pi, x=\frac{5\pi}{6}+2l\pi, l\in\mathbb{Z}$.

2) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2} & (1)\\ x^2+2y^2+3xy+3x+2y=4 & (2)\end{cases}$$

ĐK: $x\geq-\frac{1}{2}, y\geq-\frac{1}{2}$ (*)

PT $(2)\Leftrightarrow x^2+3x(y+1)+2y^2+2y-4=0$.

$\Leftrightarrow x=1-y$ (thỏa mãn (*)) hoặc $x=-2y-4$ (không thỏa mãn (*)). Thay vào (1) ta được

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=\frac{(2x-1)^2}{2} \quad (3)$$

Điều kiện $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$.

PT $(3)\Leftrightarrow 4+2\sqrt{2x+1}\sqrt{3-2x}=\frac{(2x-1)^4}{4}$

$\Leftrightarrow 16-(2x-1)^4+8\sqrt{2x+1}\sqrt{3-2x}=0$

$\Leftrightarrow(2x+1)(3-2x)\left(4+(2x-1)^2\right)+8\sqrt{2x+1}\sqrt{3-2x}=0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ hoặc $x=\frac{3}{2}$ $\left(\text{do}-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}\right)$.

Vậy hệ có hai nghiệm $(x;y)$ là

$$\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

Câu III. Đặt $\sqrt{2+\ln x}+\sqrt{2-\ln x}=t$ thì

$4+2\sqrt{4-\ln^2 x}=t^2\Rightarrow 4\ln^2 x=8t^2-t^4$

$\Rightarrow\frac{8\ln x}{x}dx=(16t-4t^3)dt\Rightarrow\frac{\ln x}{x}dx=\left(2t-\frac{1}{2}t^3\right)dt.$

Vậy $I=\int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{3}+1}\left(2-\frac{1}{2}t^2\right)dt=\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}+1-4\sqrt{2}\right).$

Câu IV. Gọi $O=AC\cap BD$. Từ giả thiết có $SO\perp(ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật.

Đặt $AB=x\,(x>0)$ thì $SO=\frac{\sqrt{8a^2-x^2}}{2}$.

Từ đó $V_{ABCD}=\frac{1}{3}4a.x.\frac{\sqrt{8a^2-x^2}}{2}$

$\leq\frac{a}{3}.(x^2+8a^2-x^2)=\frac{8a^3}{3}.$

Vậy $\max V_{ABCD}=\frac{8a^3}{3}$, khi $x=2a$. Lúc đó $SO=a$.

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho $O(0;0;0), S(0;0;a), B(-a;-2a;0), C(-a;2a;0), D(a;2a;0)$.

Tìm được VTPT của mp(SBC) là $\overrightarrow{n_{SBC}}(1;0;-1)$,

VTCP của mp(SCD) là $\overrightarrow{n_{SCD}}(0;1;2)$.

Suy ra $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{10}}$, với φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Câu V. Lấy điểm $A(4;0), B(1;7)$ và $M(x;y)\in(C)$.

$2P=\sqrt{x^2+y^2-8x+16}+2\sqrt{x^2+y^2-2x-14y+50}$
$=MA+2MB.$

Gọi $I(1;0)$ thì I nằm trong (C). Khi đó mọi điểm M thuộc (C) luôn có $MA=2MI$. Thật vậy

$MA=2MI \Leftrightarrow MA^2=4MI^2$
$\Leftrightarrow MO^2+OA^2+2.\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}$
$=4\left(MO^2+OI^2+2.\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OI}\right)$
$\Leftrightarrow 4+16+2.\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}=4\left(5+2.\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OI}\right)$
$\Leftrightarrow 2.\overrightarrow{MO}.\left(\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OI}\right)=0$ (đúng).

Suy ra $2P=2MI+2MB\ge 2IB=14.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của (C) và đoạn IB. Tìm được $M\left(1;\sqrt{3}\right)$.

Vậy $\min P=7 \Leftrightarrow (x\,;y)=\left(1;\sqrt{3}\right)$.

Câu VIa. 1) Gọi tâm đường tròn cần tìm là $I(x\,;x-1)$ và bán kính là R.

(C_1) có tâm $A(3;-4)$, bán kính $R_1=3\sqrt{2}$;

(C_2) có tâm $B(-5;4)$, bán kính $R_2=5\sqrt{2}$.

Ta có $\begin{cases}R+R_1=IA\\R+R_2=IB\end{cases}\Rightarrow IA-R_1=IB-R_2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(x+3)^2}+2\sqrt{2}$
$=\sqrt{(x-5)^2+(x+5)^2}\Leftrightarrow x=0.$ Vậy $I(0;-1)$.

Đường tròn cần tìm là đường tròn điểm $\{I\}(R=0)$.

2) Giả sử $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$, $abc\ne 0$.

PT mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

Do (P) đi qua I nên $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ (*)

Mà $IA=IB=IC$ nên

$(a-1)^2+1+1=1+(b-1)^2+1=1+1+(c-1)^2$

$\Leftrightarrow a=b=c,\left[\begin{array}{l}b=2-a\\c=a\end{array}\right.,\left[\begin{array}{l}c=2-a\\b=a\end{array}\right.,b=c=2-a.$

Với $a=b=c$ thay vào (*) được $a=b=c=3$ khi đó PT của (P): $x+y+z=3$.

Các trường hợp còn lại đều không tồn tại a, b, c.

Câu VIIa. Gọi điểm biểu diễn z và $3-2i$ lần lượt là $M(x\,;y)$ và $A(3\,;-2)$ ta có $|z-3+2i|=AM.$

Ta thấy M thuộc đường tròn (C) có tâm O bán kính là 1.

Gọi I là giao điểm của đoạn AM với (C). Khi đó với mọi M thuộc (C), $AM\ge OA-OM=IM$, dấu bằng xảy ra khi $M\equiv I$.

Tìm được $M\left(\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)$ hay $z=\frac{3}{\sqrt{13}}-\frac{2i}{\sqrt{13}}.$

Câu VIb. 1) Giả sử $B(x\,;12-2x)$.

Từ $BM\perp BN$, tìm được $x=6$. Vậy $B(6\,;0)$.

Suy ra $AB: x+y=6$, $BC: x-y=6$.

Giả sử $A(a\,;6-a)$, $C(b\,;b-6)$. Khi đó, trung điểm AC thuộc BD nên

$a+b+\frac{b-a}{2}=12\Rightarrow a=24-3b,$

suy ra $A(24-3b;3b-18)$.

$S_{ABCD}=AB.BC=6\Leftrightarrow\sqrt{2(18-3b)^2}.\sqrt{2(b-6)^2}=6$

$\Leftrightarrow (b-6)^2=1\Leftrightarrow b=5$ hoặc $b=7$.

- Với $b=7$ thì $A(3\,;3)$, $C(7\,;1)$ khi đó PT của $AD: x-y=0$, $CD: x+y=8$.
- Với $b=5$ thì $A(9\,;-3)$, $C(5\,;-1)$ khi đó PT của $AD: x-y=12$, $CD: x+y=4$.

2) Giả sử $B(x;y;z)$ khi đó $C(6-x;3-y;3-z)$.

Từ giả thiết $OA=OB=OC=AB$ được các nghiệm $(x;y;z)$ là $(3;0;3)$, $(3;3;0)$.

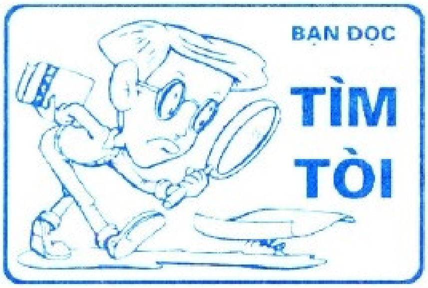
Câu VIIb. Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$

$z^2=\sqrt{z^2+\overline{z^2}}\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi$
$=\sqrt{x^2-y^2+2xyi+x^2-y^2-2xyi}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=\sqrt{2(x^2-y^2)}\\2xy=0.\end{cases}$

Từ đó được các nghiệm $(x\,;y)$ là

$(0;0),\left(\sqrt{2};0\right),\left(-\sqrt{2};0\right).$

NGUYỄN MINH NHIÊN
(GV THPT Quế Võ, Bắc Ninh)



Các bài toán VỀ TRỌNG TÂM TAM GIÁC

HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

Khái niệm vectơ được đưa vào đầu chương trình hình học THPT đã trang bị cho học sinh một phương tiện rất hữu hiệu trong việc giải các bài toán hình học. Các lời giải của bài toán bằng phương pháp vectơ thường nhẹ nhàng, đơn giản, mang tính tổng quát. Những khai thác xung quanh bài toán bằng phương pháp vectơ thật là đa dạng, phong phú và mang lại nhiều điều thú vị. Tác giả muốn lưu ý với người đọc rằng những kiến thức trong bài viết này chỉ hạn chế trong chương trình phổ thông. Còn như nếu chúng ta nhìn vấn đề dưới góc độ cao cấp hơn như sử dụng phép quay, định lí "Con nhím"... thì các bài toán sẽ đơn giản hơn nhiều. Sau đây ta hãy nghiên cứu một vấn đề quen thuộc: *trọng tâm của tam giác*, bằng phương pháp vectơ.

Xét tam giác ABC có trọng tâm G, M là điểm bất kì. Các đẳng thức vectơ mà ta hay sử dụng là

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \qquad (*)$$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG} \qquad (**)$$

Một tính chất quan trọng của trọng tâm tam giác mà ta thường xuyên vận dụng, đó là: *Hai tam giác ABC, A'B'C' có cùng trọng tâm khi và chỉ khi một trong ba hệ thức sau được thoả mãn*

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CA'}=\vec{0} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}=\vec{0} \qquad (3)$$

Ngoài ra có một nhận xét mà trong bài viết này ta sẽ sử dụng:

Nhận xét. *Cho tam giác ABC, các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB thoả mãn AA', BB', CC' đồng quy và* $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ *thì AA', BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC.*

Thật vậy, do các hệ thức (1), (2), (3) là tương đương nên từ (3) suy ra

$$\frac{BA'}{BC}=\frac{CB'}{CA}=\frac{AC'}{AB} \qquad (4)$$

Theo định lí Ceva ta có

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-1 \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra nhận xét trên.

Sau đây ta sẽ vận dụng những kết quả trên để giải một số các bài toán.

✪**Bài toán 1.** *Cho tam giác ABC gọi A', B', C' lần lượt là chân các đường cao hạ từ A, B, C. Chứng minh rằng tam giác ABC là đều khi một trong ba đẳng thức (1), (2), (3) được thoả mãn.*

Lời giải. Từ nhận xét (*) và do giả thiết, nên các đường AA', BB', CC' là các đường cao vừa là các đường trung tuyến, vậy tam giác ABC là tam giác đều (đpcm). ❐

Hiển nhiên kết quả của bài toán vẫn đúng khi thay chân các đường cao bởi chân các đường phân giác trong của các góc A, B, C.

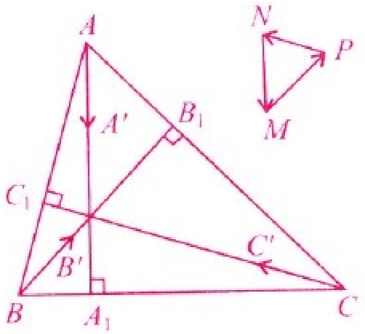
✪**Bài toán 2.** *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi A', B', C' lần lượt là các tiếp điểm thuộc các cạnh BC, CA, AB. Biết* $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$. *Chứng minh rằng tam giác ABC đều.*

Hướng dẫn. Chứng minh các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Sau đây ta đưa ra một số thí dụ ở mức độ khai thác sâu hơn các hệ thức trên.

✪**Bài toán 3.** *Cho tam giác ABC kẻ các đường cao* AA_1, BB_1, CC_1. *Trên các tia* AA_1, BB_1, CC_1 *lấy lần lượt các điểm A', B', C' sao cho* $AA_1.AA' = BB_1.BB' = CC_1.CC'$. *Chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm.*

Lời giải. (h. 1). Gọi S là diện tích của tam giác ABC, ta có $2S = AA_1.BC = BB_1.CA = CC_1.AB$.



Hình 1

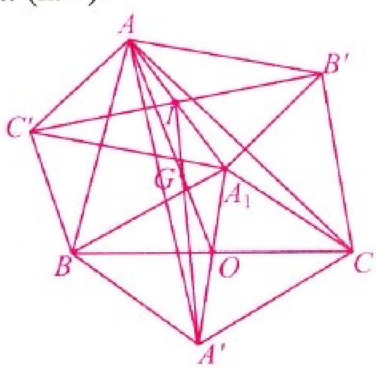
Từ giả thiết có $\dfrac{AA'}{BC}=\dfrac{BB'}{AC}=\dfrac{CC'}{AB}$ (6)

Lấy điểm M dựng $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AA'}$. Qua N, M kẻ các thẳng lần lượt song song với các đường CC', BB' chúng cắt nhau tại P. Ta chứng minh được $\Delta MNP \backsim \Delta CBA$.

Từ (6) suy ra $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{CC'}$. Do đó $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ (đpcm). ❒

✪Bài toan 4. *Cho tam giac ABC dựng trên các cạnh tam giác ra miền ngoài tam giác các tam giác cân đồng dạng với nhau: BCA', ACB', ABC' (cân tại các đỉnh A', B', C'). Chứng minh rằng* $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

Lời giải. (h. 2).



Hình 2

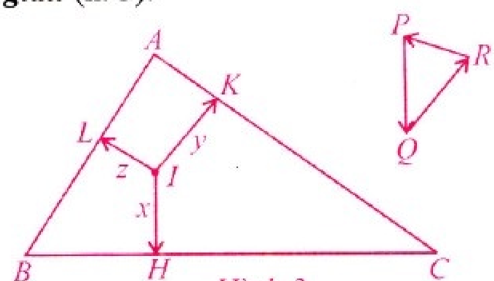
Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua cạnh BC. Ta chứng minh được tam giác $C'BA_1$, $B'A_1C$ cùng đồng dạng với tam giác ABC, suy ra $\Delta C'BA_1 = \Delta B'A_1C$ (vì có hai cạnh tương ứng $A_1B = A_1C$). Suy ra tứ giác $AB'A_1C'$ là hình bình hành (Trường hợp đặc biệt khi A, B', A_1, C' thẳng hàng cũng không ảnh hưởng đến kết quả). Gọi O, I lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của hai hình bình hành $A_1BA'C$, $AB'A_1C'$. Ta thấy AO, $A'I$ là trung tuyến của tam giác $AA'A_1$ lại là trung tuyến riêng của các tam giác ABC, $A'B'C'$. AO cắt $A'I$ tại G thì G là trọng tâm chung của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Vậy

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0} \text{ (đpcm). ❒}$$

✪Bài toán 5. a) *Cho tam giác ABC, xác định điểm I thuộc miền tam giác ABC sao cho I là trọng tâm của tam giác tạo bởi chân ba đường vuông góc hạ từ I xuống ba cạnh tam giác ABC.*

b) *Gọi chu vi tam giác ABC là 2p. Tổng các khoảng cách từ I xuống ba cạnh tam giác ABC là h. Chứng minh rằng* $p \geq \sqrt{3}h$.

Lời giải. (h. 3).



Hình 3

a) Giả sử có điểm I thoả mãn điều kiện bài toán. Gọi H, K, L là chân các đường vuông góc hạ từ I xuống các cạnh tam giác. Ta có $\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{IL}=\vec{0}$. Dựng tam giác PQR sao cho $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{IH}$, $\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{IL}$. Ta thấy

$\Delta PQR \backsim \Delta BCA$. Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $IH = x$, $IK = y$, $IL = z$, ta có $x : y : z = a : b : c$. Suy ra I là giao điểm các đường đối trung của tam giác ABC.

b) Đặt $\dfrac{h}{2p}=k$ thì $x = ka$, $y = kb$, $z = kc$.

Gọi S là diện tích của tam giác ABC. Ta có $2S = xa + yb + zc = k(a^2 + b^2 + c^2)$.

Suy ra $k=\dfrac{2S}{a^2+b^2+c^2}$.

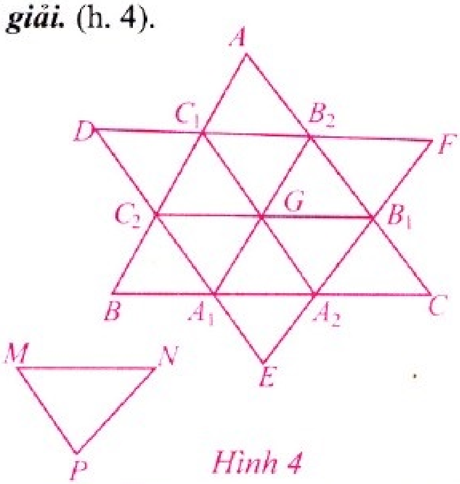
Ta cần chứng minh $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$. Bất đẳng thức này quen thuộc có trong một số sách, tài liệu bồi dưỡng, bạn đọc tự chứng minh. ❒

✪Bài toán 6. **(IMO 2005)**

Trên các cạnh của tam giác đều ABC chọn sáu điểm A_1, A_2 trên BC; B_1, B_2 trên AC; C_1,

C_2 trên AB. Các điểm này là đỉnh của một lục giác lồi $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ (H) có sáu cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 đồng quy.

Lời giải. (h. 4).



Hình 4

Ta có $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2A_1}=\vec{0}$.

Mà $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}$ suy ra

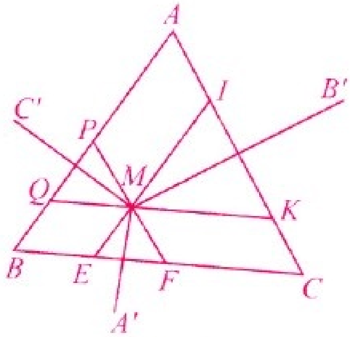
$$\overrightarrow{A_2B_1}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_2A_1}=\vec{0}.$$

Suy ra hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ có cùng trọng tâm là G cũng là trọng tâm của lục giác $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$. Dựng tam giác MNP sao cho $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{A_2B_1}$; $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{B_2C_1}$; $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{C_2A_1}$. Do $A_2B_1=B_2C_1=C_2A_1$ nên tam giác MNP đều. Giả sử các đường thẳng A_2B_1, B_2C_1 và C_2A_1 cắt nhau tạo thành tam giác DEF thì tam giác DEF đều.

Ta chứng minh được sáu tam giác nhỏ nằm ở phía ngoài của hình lục giác (H) bằng nhau. Ta hãy xét một đường chéo nào đó của hình lục giác (H), chẳng hạn A_1B_2. Ta chứng minh được hai tứ giác $A_1A_2B_1B_2$, $A_1C_2C_1B_2$ bằng nhau và đối xứng với nhau qua đường thẳng A_1B_2. Suy ra hình lục giác (H) có trục đối xứng là đường thẳng A_1B_2 và trọng tâm G của hình lục giác (H) thuộc đường thẳng A_1B_2. Tương tự trọng tâm G của hình lục giác (H) cũng thuộc các đường thẳng B_1C_2 và C_1A_2. Do tính duy nhất của trọng tâm của một hệ điểm suy ra các đường thẳng A_1B_2, B_1C_2 và C_1A_2 đồng quy tại điểm G (đpcm). ❒

✪**Bài toán 7.** *Cho tam giác đều ABC, M là một điểm thuộc miền trong tam giác ABC. Gọi A', B', C', lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.*

Lời giải. (h. 5).



Hình 5

Qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác ABC cắt các cạnh của tam giác tại các điểm E, F, K, I, P, Q. Dễ thấy các tam giác MEF, MKI, MPQ là các tam giác đều, từ đó $\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}$

$=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}$

$=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MG'}$ (G, G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A'B'C'$). Do đó $G\equiv G'$. ❒

BÀI TẬP

1. Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và một đường thẳng d. Gọi $B_1, B_2, ..., B_n$ lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ $A_1, A_2,..., A_n$ xuống đường thẳng d. Biết rằng $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}=\vec{0}$. Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

2. Cho tam giác ABC, M là một điểm trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng của M qua trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ đối xứng với M qua trọng tâm của tam giác ABC.

3. Cho hai tam giác đều ABC, $A'B'C'$ bằng nhau sắp xếp ở vị trí sao phần giao của chúng là một lục giác $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ với A_1, A_2 thuộc cạnh BC; B_1, B_2 thuộc cạnh CA; C_1, C_2 thuộc cạnh AB. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ có cùng trọng tâm.

4. Cho tam giác ABC. Hãy dựng điểm M thuộc miền ngoài tam giác ABC đồng thời thuộc miền trong góc BAC sao cho $\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MK}=\vec{0}$, trong đó H, I, K thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống các đường thẳng BC, AC và AB.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/414. (Lớp 6). Có tồn tại hay không hai số tự nhiên a, b để có

$$(3a+2b)(7a+3b)-4=\overline{22*12*2011}\,?$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/414. (Lớp 7). Về phía ngoài của tam giác ABC, ta dựng các tam giác đều ABE và BCF. Gọi G là trọng tâm tam giác ABE và I là trung điểm của AC. Tính số đo góc GIF.

ĐỖ CAO TRÍ
(GV THCS Phạm Hữu Chí, An Ngãi, Long Điền, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Bài T3/414. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho 2^n-1 chia hết cho 2011.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T4/414. Chứng minh rằng với mọi số nguyên k thì phương trình

$$x^4-2010x^3+(2009+k)x^2-2007x+k=0$$

không thể có hai nghiệm nguyên phân biệt.

ĐOÀN CÁT NHƠN
(GV THCS Nhơn Lộc, An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/414. Từ điểm M ngoài đường tròn (O) vẽ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD đến (O), C nằm giữa M và D. AB cắt CD tại N. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{MD}+\frac{1}{ND}=\frac{2}{CD}.$$

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/414. Cho tam giác ABC vuông tại A và thỏa mãn $AB+\sqrt{3}AC=2BC$. Xác định vị trí điểm M sao cho $4\sqrt{3}.MA+3\sqrt{7}.MB+\sqrt{39}.MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

ĐẬU THANH KỲ
(GV THPT Diễn Châu IV, Nghệ An)

Bài T7/414. Giải phương trình

$$\log_3(7^x+2)=\log_5(6^x+19).$$

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T8/414. Cho tam giác ABC thỏa mãn

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}.$$

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông là

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{10}.$$

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/414. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O\,;\,R)$. M là một điểm không nằm trên đường tròn. MA, MB, MC lần lượt cắt đường tròn tại A_1, B_1, C_1. Gọi r, r_1 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC và $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng $|R^2-OM^2|\ge 4r.r_1$.

NGUYỄN LÊ PHƯỚC
(SV lớp Hệ thống điện 3-K51, ĐHBK Hà Nội)

Bài T10/414. Cho các số thực dương a, b. Tìm hằng số k lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức

$$\frac{k}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\ge\frac{16+4k}{(a+b)^3}.$$

NGUYỄN VĂN DŨNG
(GV K22, Học viện Kĩ thuật Quân sự)

Bài T11/414. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(y)+y)+f(xy+x)=f(x+y)+2xy.$$

TẠ HOÀNG THÔNG
(GV TT Thăng Long, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T12/414. Với mỗi số nguyên dương n, ta xét hàm số f_n trên $\mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f_n(x)=\sum_{i=1}^{2n}x^i+1.$$

Chứng minh rằng:

a) Hàm số f_n đạt giá trị nhỏ nhất tại mỗi điểm duy nhất với mỗi số n nguyên dương. Kí hiệu điểm đó là x_n và giá trị nhỏ nhất của hàm số f_n là S_n, tức là $S_n = f_n(x_n)$.

b) $S_n > \frac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Hơn nữa $\frac{1}{2}$ là hằng số tốt nhất theo nghĩa không tồn tại số thực $a > \frac{1}{2}$ sao cho $S_n > a$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

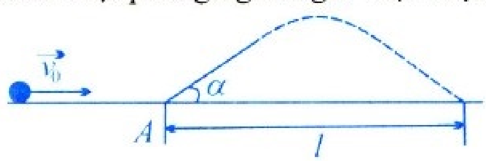
c) Dãy số (S_n) $(n = 1, 2, ...)$ là dãy giảm và $\lim S_n = \frac{1}{2}$.

d) $\lim x_n = -1$.

TRẦN TUẤN ANH
(Khoa Toán - Tin, Trường ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/414. Một vật đang chuyển động trên mặt sàn nằm ngang với vận tốc $\vec{v}_0$ thì đi lên một mặt phẳng nghiêng nhẵn tạo với phương ngang một góc α (α < 45°) như hình vẽ. Sau khi rời mặt phẳng nghiêng, vật rơi xuống sàn cách chân mặt phẳng nghiêng A một đoạn l.



Hỏi chiều dài của mặt phẳng nghiêng phải bằng bao nhiêu để khoảng cách l đạt cực đại? Giá trị cực đại đó bằng bao nhiêu? Bỏ qua sự mất mát động năng ở chân mặt phẳng nghiêng và sức cản không khí.

PHẠM XUÂN THI
(3C34-38 - Biên Hòa, Đồng Nai)

Bài L2/414. Cho đoạn mạch R, L, C nối tiếp, trong đó điện dung C của tụ điện thay đổi được. Điện áp giữa hai đầu đoạn mạch là $u = 200\sqrt{2}\cos(100\pi t)$V. Khi $C = C_1 = \frac{10^{-4}}{4^{\pi}}$F và $C = C_2 = 2C_1$ thì mạch điện có cùng công suất $P = 200$W.

a) Xác định L, R và hệ số công suất $\cos\varphi$ của mạch điện.

b) Viết biểu thức của cường độ dòng điện ứng với các giá trị của C_1 và C_2.

c) Với giá trị C bằng bao nhiêu thì U_C đạt cực đại? Tính $U_{C\max}$.

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV ĐHSP Hà Nội)

Đọc lại cho đúng:

Trên THTT số 413, tháng 11 năm 2011 **Bài T8/413** xin sửa biểu thức $P = 9\left(\frac{x+z}{x+t}\right)^2 + 16\left(\frac{z+t}{x+y}\right)^2$.

Tác giả thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

PROBLEMS IN THIS ISUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/414. (For 6th grade). Do there exist two natural numbers a, b such that

$$(3a+2b)(7a+3b) - 4 = \overline{22*12*2011}\,?$$

T2/414. (For 7th grade). Equilateral triangles ABE and BCF are constructed outside triangle ABC. Let G be the centroid of triangle ABE and I be the midpoint of AC. Find the measure of angle GIF.

T3/414. Find the smallest positive integer n such that $2^n - 1$ is divisible by 2011.

T4/414. Prove that for all integers k, the equation $x^4 - 2010x^3 + (2009+k)x^2 - 2007x + k = 0$ does not have two distinct integer roots.

T5/414. From a point M outside the cycle (O), draw the tangents MA, MB and the secant MCD to (O), C lies between M and D. AB cuts CD at N. Prove that

$$\frac{1}{MD} + \frac{1}{ND} = \frac{2}{CD}.$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/414. Let ABC be a right triangle, right angle at A, satisfying $AB + \sqrt{3}AC = 2BC$. Find the position of point M such that

$$4\sqrt{3}.MA + 3\sqrt{7}.MB + \sqrt{39}.MC$$

is smallest possible.

(Xem tiếp trang 26)

★Bài T1/410. *Tìm các cặp số nguyên dương x, y nguyên tố cùng nhau sao cho*

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}=\frac{7}{25}.$$

Lời giải. Vì (7, 25) = 1 nên đặt $x+y=7k$ thì $x^2+y^2=25k$, với k là số nguyên dương.

Ta có $(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$ (1)

Suy ra $(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)$

hay là $49k^2\le 50k \Leftrightarrow 49k\le 50$.

Do đó chỉ có thể là $k=1$ nên $x+y=7$ và $x^2+y^2=25$. Thay vào (1) được $(x-y)^2=1$.

- Với $x-y=1$ và $x+y=7$ thì $x=4, y=3$.
- Với $x-y=-1$ và $x+y=7$ thì $x=3, y=4$.

Bài toán có hai nghiệm như trên. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Trong cách giải trên không cần đến giả thiết: *hai số x và y nguyên tố cùng nhau.*

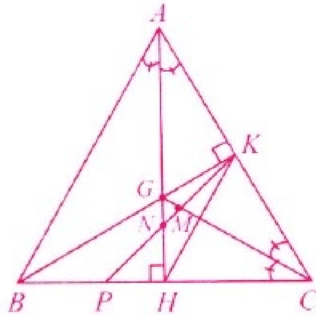
2) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn:

Vĩnh Phúc: *Lê Thị Thùy Linh*, 6A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Đào Mỹ Linh*, 6A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Văn Quân*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương: **Quảng Ngãi:** *Võ Nguyên Hải, Nguyễn Phan Trà My, Trần Thị Mỹ Ninh*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; *Nguyễn Thị Hạ Vy, Cao Thị Thúy Điểm, Nguyễn Thúy Phượng*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

★Bài T2/410. *Cho tam giác đều ABC, các đường cao AH, BK cắt nhau tại điểm G. Tia phân giác góc BKH cắt các đoạn thẳng CG, AH, BC lần lượt tại các điểm M, N, P. Chứng minh rằng KM = NP.*

Lời giải. Ta thấy CG là tia phân giác của góc C, suy ra $\widehat{ACG}=30^\circ$. Vì K, H là trung điểm của AC, BC nên $KH//AB$ và tam giác CHK đều.



Suy ra $\widehat{HKB}=90^\circ-60^\circ=30^\circ$. Do KP là phân giác của $\widehat{HKB}$ nên $\widehat{BKP}=15^\circ$, từ đó $\widehat{CKP}=75^\circ$.

Ta có $\widehat{MCK}=30^\circ$, $\widehat{MKC}=75^\circ \Rightarrow \widehat{KMC}=75^\circ$, nên tam giác CMK cân tại C, do đó $CK=CM$. Ta có $AK=CM$ (cùng bằng CK); $\widehat{KAN}=\widehat{MCP}$ (cùng bằng 30°); $\widehat{AKN}=\widehat{CMP}$ (cùng bằng 105°). Vậy $\Delta AKN=\Delta CMP$ (g.c.g), suy ra $KN=MP$ hay $KM+MN=MN+NP$. Từ đó ta có $KM=NP$ (đpcm). ❐

➢**Nhận xét.** Tất cả các bạn tham gia giải gửi bài đều cho lời giải đúng. Trừ các bạn lớp 8, lớp 9 và một bạn dùng tính chất đường phân giác. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Phạm Ngọc Hải*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 7A, THCS Phương Khoan, Sông Lô, *Đào Thị Hồng*, 7A, THCS Yên Lạc; **Bình Định:** *Nguyễn Trọng Khiêm*, 7A1, THCS Võ Hán, Tây Sơn, Bình Định; **Trà Vinh:** *Trương Hoàng Việt*, 7/4, THCS Cầu Quan, Tiểu Cần; **Quảng Ngãi:** *Phạm Thiên Trang*, 6A, *Đặng Lưu Việt Quý, Nguyễn Thị Hạ Vy, Cao Thị Thúy Điểm*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; *Võ Nguyên Hải, Nguyễn Phan Trà My, Trần Thị Mỹ Ninh*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/410. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=2011ca-ab-bc$ trong đó a, b, c là các số thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\le 2$.*

Lời giải. Áp dụng BĐT $xy\le\dfrac{x^2+y^2}{2}$ dấu bằng xảy ra khi $x=y$ và $a^2+b^2+c^2\le 2$ ta có

- *Cách 1.* $ab+bc=b(a+c)$

$$\le\frac{b^2+(a+c)^2}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2+2ac}{2}\le 1+ac.$$

$$|ac|\le\frac{a^2+c^2}{2}\le\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\le 1.$$

$$\Rightarrow ac\ge -1 \Rightarrow 2010ac\ge -2010.$$

Do đó $S=2011ac-(ab+bc)\ge 2011ac-(1+ac)$
$=2010ac-1\ge -2011.$

$S=-2011$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}|a|=|c|\\ b=a+c\\ a^2+b^2+c^2=2\\ ac=-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1,b=0,c=-1\\ a=-1,b=0,c=1.\end{array}\right.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là -2011 khi $(a;b;c)\in\{(1;0;-1),(-1;0;1)\}$.

• *Cách 2.* Ta có $2S=4022ac-2ab-2ac$
$=2010(a+c)^2+(a+c-b)^2-2010(a^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2)$.
Do $(a+c)^2\ge 0$; $(a+c-b)^2\ge 0$, $a^2+c^2\le a^2+b^2+c^2\le 2$ nên $2S\le -2010.2-2=-4022 \Rightarrow S\le -2011$.

$S=-2011$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a+c=0\\a+c-b=0\\a^2+c^2=a^2+b^2+c^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1,b=0,c=-1\\a=-1,b=0,c=1.\end{array}\right.$$

Từ đó ta cũng có kết luận như trên. ❐

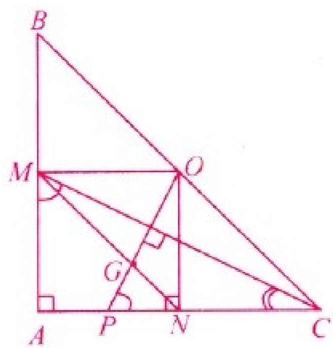
➤**Nhận xét.** Hầu hết các bạn tham gia đều giải theo cách trên. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Trương Văn Khánh*, 9A, THCS Đại Đồng Thành; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Cao*, 9A, THCS Phương Khoan, Sông Lô; **Đồng Nai:** *Lê Duy Khánh*, 6/4, THCS Bùi Hữu Nghĩa, TP. Biên Hòa; **Nghệ An:** *Cao Thị Quỳnh Trang*, 8B, *Cao Minh Trang*, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Văn Quân*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Trần Thị Mỹ Linh*, 8A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Nguyễn Thị Kiều Duyên*, *Huỳnh Tiến Vỹ*, 8A, THCS Nguyễn KimVang, Nghĩa Hành.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T4/410. *Cho tam giác ABC vuông cân ở A. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Đường vuông góc với CM kẻ từ O cắt MN tại G. So sánh độ dài hai đoạn thẳng GM và GN.*

Lời giải. (Theo bạn *Trương Thị Hoài Thu*, 7A, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**).



Gọi P là giao điểm của AC và OG. Từ giả thiết dễ thấy $AMON$ là hình vuông. Tam giác vuông ONP và tam giác vuông CAM có $\widehat{OPN}=\widehat{CMA}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ACM}$) nên đồng dạng với nhau.

Suy ra $\dfrac{NP}{AM}=\dfrac{ON}{AC}=\dfrac{ON}{AB}=\dfrac{1}{2}$.

Vì $NP//OM$ nên theo định lí Thales ta có $\dfrac{NG}{GM}=\dfrac{NP}{OM}=\dfrac{NP}{AM}=\dfrac{1}{2}$. Vậy $GM=2GN$. ❐

➤**Nhận xét.** 1) Bài toán được các bạn tham gia giải theo nhiều cách khác nhau, chẳng hạn như: Dùng tam giác đồng dạng, định lí Thales, chứng minh G là trọng tâm của tam giác... Tuy nhiên có một vài bạn chỉ lập luận và chứng minh $GM > GN$, kết quả này cũng đúng song chưa "triệt để" lắm!

2) Ngoài bạn *Thu*, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Việt Huy*, 8A, THCS Yên Lạc, **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Quân*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Huỳnh Tiến Vỹ*, 8A, *Bùi Trọng Triều*, 9A, *Phan Anh Miệt*, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; *Đỗ Đăng Thịnh*, 9A, THCS Đức Thắng, Mộ Đức.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T5/410. *Giải phương trình*

$$\sqrt{7x^2+25x+19}-\sqrt{x^2-2x-35}=7\sqrt{x+2}\quad(1)$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}7x^2+25x+19\ge 0\\x^2-2x-35\ge 0\\x+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 7\,(*)$

Khi đó phương trình (1) tương đương với

$$\sqrt{7x^2+25x+19}=7\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2-2x-35}$$
$$\Leftrightarrow 7x^2+25x+19=49(x+2)+14\sqrt{(x+2)(x^2-2x-35)}+x^2-2x-35$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-11x-22=7\sqrt{(x+2)(x+5)(x-7)}$$
$$\Leftrightarrow 3(x^2-5x-14)+4(x+5)=7\sqrt{(x+5)(x^2-5x-14)}\quad(2)$$

Đặt $a=\sqrt{x^2-5x-14}$, $b=\sqrt{x+5}$ (chú ý rằng với $x\ge 7$ thì $x^2-5x-14\ge 0, x+5>0$).

Khi đó PT (2) trở thành $3a^2+4b^2=7ab$

$$\Leftrightarrow (a-b)(3a-4b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\3a=4b.\end{array}\right.$$

• Với $a=b$ ta có $\sqrt{x^2-5x-14}=\sqrt{x+5}$

$$\Leftrightarrow x^2-5x-14=x+5\Leftrightarrow x^2-6x-19=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3+2\sqrt{7}\ \text{(thỏa mãn (*))}\\x=3-2\sqrt{7}\ \text{(không thỏa mãn (*)).}\end{array}\right.$$

• Với $3a=4b$ ta có $3\sqrt{x^2-5x-14}=4\sqrt{x+5}$

$$\Leftrightarrow 9(x^2-5x-14)=16(x+5)$$
$$\Leftrightarrow 9x^2-61x-206=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{61+\sqrt{11137}}{18} \text{ (thỏa mãn (*))} \\ x=\dfrac{61-\sqrt{11137}}{18} \text{ (không thỏa mãn (*)).} \end{array}\right.$$

Vậy PT(1) có hai nghiệm là

$$x=3+2\sqrt{7} \text{ và } x=\frac{61+\sqrt{11137}}{18}. \ \square$$

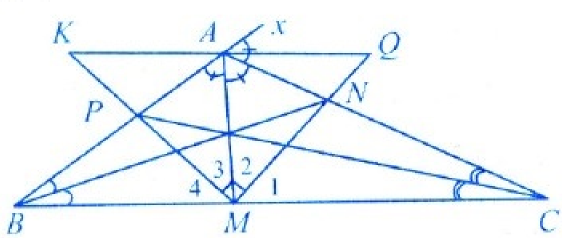
➢**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Văn Cao*, 9A, THCS Phương Khoan, Sông Lô; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đình Mười*, 9A4, THCS Mão Điền, Thuận Thành; **Hà Nội:** *Nguyễn Chí Tùng*, 9A10, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Quý*, 9C, *Nguyễn Văn Quân*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Phan Trung Hiếu*, 8A, THCS Nam Hà; **Quảng Ngãi:** *Tống Thành Nguyện*, 9A, THCS Hành Phước, *Nguyễn Thị Kiều Duyên*, 9C, THCS Nguyễn Nam Vang, Nghĩa Hành; **Gia Lai:** *Trần Nguyên Trỵ*, 9/1, THCS Phạm Hồng Thái, TP. Pleiku; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Đỗ Nguyễn Hoàng Anh*, 9A1, THCS Hắc Dịch, Tân Thành; **Đồng Tháp:** *Dương Minh Chánh*, 9A1, THCS Mỹ Quý, Tháp Mười.

TRẦN HỮU NAM

★**Bài T6/410.** *Cho tam giác ABC. AM, BN, CP là các đường phân giác trong ($M \in BC$, $N \in CA$, $P \in AB$) của tam giác đó. Tìm số đo của góc BAC để PM vuông góc với NM.*

Lời giải. • *Cách 1.* (Theo bạn *Nguyễn Thị Quỳnh Loan*, 10T1, THPT Đô Lương I, **Nghệ An**).



Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt các đường thẳng MP và MN lần lượt tại K và Q. Khi đó

$$\frac{AK}{MB}=\frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BC} \quad (1)$$

$$\frac{AQ}{MC}=\frac{NA}{NC}=\frac{AB}{BC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AK}{AQ}\cdot\dfrac{MC}{MB}=\dfrac{AC}{AB}$. Mà $\dfrac{MC}{MB}=\dfrac{AC}{AB}$ nên $AK=AQ$.

Do $PM \perp NM$ nên tam giác KMQ vuông tại M. Lại có $AK = AQ$ nên $AK = AQ = AM$. Do đó $\widehat{AMQ}=\widehat{AQM}=\widehat{QMC}$, nghĩa là MN là tia phân giác của $\widehat{AMC}$. Vậy N là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABM ứng với đỉnh B. Gọi Ax là tia đối của tia AB thì $\widehat{BAM}=\widehat{MAC}=\widehat{CAx}=60^o$. Từ đó $\widehat{BAC}=120^o$.

• *Cách 2.* (Theo bạn *Dương Quốc Khánh*, 11B1, THPT Lê Hồng Phong, Biên Hòa, **Đồng Nai**).

Giả sử $MN \perp MP$. Theo định lí sin, ta có $\dfrac{NA}{NM}=\dfrac{\sin M_2}{\sin\dfrac{A}{2}}$; $\dfrac{NM}{NC}=\dfrac{\sin C}{\sin M_1}$; $\dfrac{BC}{BA}=\dfrac{\sin A}{\sin C}$.

Nhân ba đẳng thức trên theo vế và để ý rằng $\dfrac{NA}{NC}=\dfrac{BA}{BC}$ suy ra $\dfrac{\sin M_2.\sin A}{\sin M_1.\sin\dfrac{A}{2}}=1$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 M_2}{\sin^2\dfrac{A}{2}}=\frac{\sin^2 M_1}{\sin^2 A} \quad (1)$$

Tương tự $\dfrac{\sin^2 M_3}{\sin^2\dfrac{A}{2}}=\dfrac{\sin^2 M_4}{\sin^2 A}$ (2)

Mặt khác $\sin^2 M_2+\sin^2 M_3=\sin^2 M_1+\sin^2 M_4=1$ (3)

Cộng các đẳng thức (1) và (2) theo vế đồng thời kết hợp với (3) ta suy ra $\sin\dfrac{A}{2}=\sin A$.

Từ đó có $\widehat{BAC}=120^o$. $\square$

➢**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn sử dụng phương pháp vectơ hoặc tính chất của *chùm điều hòa* cũng đi đến kết quả như trên.

2) Số lời giải gửi về Tòa soạn khá nhiều, tất cả đều tìm đúng số đo của góc $\widehat{BAC}$. *Lưu ý rằng với giả thiết bài T6/410 ta có kết quả* $PM \perp NM \Leftrightarrow \widehat{BAC}=120^o$.

3) Ngoài hai bạn *Loan* và *Khánh* các bạn sau cũng có lời giải gọn:

Hà Nội: *Hoàng Đức Anh*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Bắc Giang:** *La Văn Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Đỗ Kiên, Dương Phước Thọ*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** *Nguyễn Ngọc Thiện*, 12A1, THPT Thanh Miện I; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Lan Anh*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Vương Nhật Quân*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Hiền Trang*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Hồ Diên Phúc, Hoàng Danh Thắng*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III, *Lê Hoàng Hiệp*, 11A1, THPT Thái Hòa, *Nguyễn Tất Khánh*, 10A1, THPT Đô Lương III, *Nguyễn Văn Hoàng*, 12T7, THPT Đô Lương I; **Hà Tĩnh:** *Phan Tuấn Anh*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Trần Đức Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** *Lê Vũ Văn Phi*, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đà Nẵng:** *Trần Hậu Long*, 10A1, *Lê Trần Nhạc Long*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Vũ Trung Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt; **Cần Thơ:** *Hoàng Công Đức, Phan Lê Hoài Ân*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bến Tre:** *Phạm Xuân Bách*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

HỒ QUANG VINH

★Bài T7/410. *Giải phương trình*

$$(\sin x-2)(\sin^2 x-\sin x+1)=3\sqrt[3]{3\sin x-1}+1.$$

Lời giải. PT đã cho tương đương với

$$\sin^3 x-3\sin^2 x+3\sin x-2=3\sqrt[3]{3\sin x-1}+1$$

$$\Leftrightarrow (\sin x-1)^3 = 3\sqrt[3]{3\sin x-1}+2 \quad (1)$$

• *Cách 1.* Đặt $\sin x - 1 = u$ và $\sqrt[3]{3\sin x-1}=v$ ta có hệ $\begin{cases} u^3=3v+2 \\ v^3=3u+2 \end{cases}$ (2)

Trừ theo vế hai PT của hệ trên ta được

$(u-v)(u^2+uv+v^2) = 3(v-u)$

$\Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+3)=0$

$\Leftrightarrow u = v$

(vì $u^2+uv+v^2+3=\left(u+\dfrac{v}{2}\right)^2+\dfrac{3v^2}{4}+3>0$).

Thế vào (2) ta được

$u^3 = 3u+2 \Leftrightarrow (u+1)^2(u-2)=0 \Leftrightarrow u=-1$ hoặc $u = 2$.

• Với $u = -1$, ta có $\sin x - 1 = -1 \Leftrightarrow \sin x = 0$ $\Leftrightarrow x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

• Với $u = 2$, ta có $\sin x - 1 = 2 \Leftrightarrow \sin x = 3$. PT này vô nghiệm.

• *Cách 2.* Biến đổi PT(1) tương đương với

$$(\sin x-1)^3+3(\sin x-1)=(3\sin x-1)+3\sqrt[3]{3\sin x-1}$$

$$\Leftrightarrow f(\sin x-1) = f\left(3\sqrt[3]{3\sin x-1}\right) \quad (3)$$

trong đó $f(t) = t^3 + 3t$.

Ta có $f'(t)=3t^2+3>0, \forall t$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$\text{PT}(3) \Leftrightarrow \sin x - 1 = 3\sqrt[3]{3\sin x-1}$

$\Leftrightarrow \sin^3 x - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ (vì $\sin x - 3 < 0$)

$\Leftrightarrow x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy PT đã cho có nghiệm $x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. □

➤**Nhận xét.** Đây là bài toán cơ bản nên có rất nhiều bạn tham gia và hầu hết cho lời giải đúng theo hai cách nêu trên. Các bạn dưới đây có lời giải gọn và tốt:

Đồng Nai: *Dương Quốc Khánh*, 11B, THPT Lê Hồng Phong, Biên Hoà; **Đồng Tháp:** *Dương Minh Chí, Võ Hoài Bảo*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Quảng Trị:** *Phạm Hồ Hà Trâm*, 11Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bắc Ninh:** *Khổng Văn Thịnh*, 11A13, THPT Yên Phong số 2; **Cần Thơ:** *Hoàng Công Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bình Định:** *Nguyễn Quang Hải*, 11TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Nghệ An:** *Vương Nhật Quân*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Thanh Hoá:** *Lê Thị Lan Anh*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; *Hoàng Văn Hiệp*, 12B2, THPT Triệu Sơn II; *Nguyễn Xuân Nghĩa*, 11A10, THPT Đông Sơn I; **Bình Dương:** *Nguyễn Quang Minh*, 11T2, THPT chuyên Hùng Vương; **Hưng Yên:** *Dương Mạnh Cường*, 11Toán1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam:** *Trần Minh Hải*, 12A2, THPT A Phủ Lý; **Hải Dương:** *Nguyễn Thị Thanh Yên*, 12Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Vũ Trung Quân*, 11Toán 1, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T8/410. *Tìm các giá trị của a, b để phương trình*

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

có nghiệm và tổng a^2+b^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Với $x\neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho x^2, ta được

$$x^2+\frac{1}{x^2}+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x+\frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ với $|t| \geq 2$, PT trở thành

$$t^2 + at + b - 2 = 0 \Leftrightarrow at + b = 2 - t^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta được

$$(2-t^2)^2 = (at+b)^2 \leq (a^2+b^2)(t^2+1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = bt$.

Do đó $a^2 + b^2 \geq \frac{t^4 - 4t^2 + 4}{t^2+1} = t^2 - 5 + \frac{9}{t^2+1}$ (1)

Đặt $u = t^2$, vì $|t| \geq 2$ nên $u \geq 4$, xét hàm số

$$f(u) = u - 5 + \frac{9}{u+1}.$$

Có $f'(u) = 1 - \frac{9}{(u+1)^2} > 0 \quad \forall u \geq 4$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $[4; +\infty)$.

Ta được với $u \in [4; +\infty)$ thì

$$a^2 + b^2 \geq f(u) \geq f(4) = \frac{4}{5}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} u = t^2 = 4 \\ a = bt \\ at + b = 2 - t^2. \end{cases}$$

• Với $t = 2$, ta có $\begin{cases} a = 2b \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{4}{5}; b = -\frac{2}{5}$

(phương trình có nghiệm $x = 1$).

• Với $t = -2$, ta có $\begin{cases} a = -2b \\ -2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{4}{5}; b = -\frac{2}{5}$

(phương trình có nghiệm $x = -1$).

Vậy các giá trị của *a, b* cần tìm là

$$\left[\begin{array}{l} a = -\frac{4}{5};\quad b = -\frac{2}{5} \\ a = \frac{4}{5};\quad b = -\frac{2}{5}. \end{array}\right.$$

➤**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn sau khi chứng minh được BĐT $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$, đã chỉ ra đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} u = t^2 = 4 \\ a = bt \\ a^2 + b^2 = \frac{4}{5} \end{cases}$ nên đã thừa nghiệm $\left[\begin{array}{l} a = -\frac{4}{5};\ b = \frac{2}{5} \\ a = \frac{4}{5};\ b = \frac{2}{5}. \end{array}\right.$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: *Lê Minh Sơn*, 12A, THPT Đa Phúc, Sóc Sơn; **Nam Định**: *Trần Văn Đạt*, 12C1, THPT Hải Hậu A; **Hưng Yên**: *Đào Thị Minh Ngọc*, 12 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa**: *Đặng Duy Khánh*, 12F, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Hoàng*, 12T7, THPT Đô Lương I, *Phan Nguyễn Thanh Sơn*, 12A1, THPT Diễn Châu 3; **Quảng Trị**: *Nguyễn Tứ Bốn*, 12A2, THPT Thị xã Quảng Trị; **Quảng Ngãi**: *Võ Văn Tiêm*, 12T1, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T9/410. *Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$(a^{2012} - a^{2010} + 3)(b^{2012} - b^{2010} + 3)(c^{2012} - c^{2010} + 3) \geq 9(ab + bc + ca).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Ta có

$$(a^{2010} - 1)(a^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow a^{2012} - a^{2010} + 3 \geq a^2 + 2.$$

Tương tự $b^{2012} - b^{2010} + 3 \geq b^2 + 2,$

$c^{2012} - c^{2010} + 3 \geq c^2 + 2.$

Suy ra

$$(a^{2012} - a^{2010} + 3)(b^{2012} - b^{2010} + 3)(c^{2012} - c^{2010} + 3) \geq (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$(a+b+c)^2 \leq (a^2+2)\left(1 + \frac{(b+c)^2}{2}\right)$$

Mặt khác ta có

$$(b^2+2)(c^2+2) - 3\left(1 + \frac{(b+c)^2}{2}\right)$$

$$= b^2c^2 + \frac{b^2+c^2}{2} - 3bc + 1 = (bc-1)^2 + \frac{(b-c)^2}{2} \geq 0$$

và dùng bất đẳng thức Cauchy cho hai số

$$(a+b+c)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2} + 2(ab+bc+ca)$$

$$\geq ab + bc + ca + 2(ab+bc+ca) = 3(ab+bc+ca).$$

Từ ba bất đẳng thức trên ta nhận được

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge(a^2+2).3\left(1+\frac{(b+c)^2}{2}\right)$$

$$\ge 3(a+b+c)^2\ge 9(ab+bc+ca).$$

Kết hợp với (2), bất đẳng thức (1) đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❐

➤**Nhận xét.** Bài toán trên là bài toán bất đẳng thức cơ bản, nhưng không quá khó. Có rất nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng, trong đó có ba bạn học sinh THCS sau:

Nghệ An: *Lương Đình Ân*, 6B, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; *Nguyễn Tất Quý*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Gia Lai:** *Trần Nguyên Try*, 9/1, THCS Phạm Hồng Thái, TP. Pleiku.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T10/410. *Cho tam giác ABC. Một đường thẳng bất kì cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại M, N, P theo thứ tự. Gọi X, Y, Z lần lượt là trọng tâm các tam giác ANP, BPM, CMN. Chứng minh rằng*

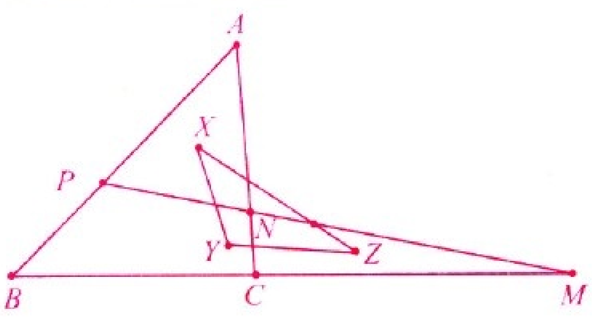
$$S_{XYZ}=\frac{2}{9}S_{ABC}.$$

Lời giải. *Bổ đề.* Nếu G, G' theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác ABC, $A'B'C'$ thì

$$3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}.$$

Trở lại giải bài toán.

Trong lời giải này kí hiệu $S[XYZ]$ chỉ diện tích đại số của tam giác XYZ.



Theo bổ đề trên, ta có

$$S[XYZ]=\frac{1}{2}\overrightarrow{XY}\wedge\overrightarrow{XZ}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{NM}\right)\wedge\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{PM}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}\wedge\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{PM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}\wedge\overrightarrow{PM}\right)$$

$$=\frac{1}{9}(S[ABC]+S[AMC]+S[ABM]+S[MNP])$$

$$=\frac{1}{9}(2S[ABC]+S[MNP])\qquad(1)$$

Mặt khác, vì M, N, P thẳng hàng nên

$$S[MNP]=0\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S[XYZ]=\frac{2}{9}S[ABC]$.

Do đó $S_{XYZ}=|S[XYZ]|=\left|\frac{2}{9}S[ABC]\right|=\frac{2}{9}S_{ABC}$. ❐

➤**Nhận xét.** 1) Chú ý rằng kết quả sau đúng "Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi X, Y, Z lần lượt là trọng tâm của các tam giác ANP, BPM, CMN. Khi đó M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $S[XYZ]=\frac{2}{9}S[ABC]$".

Kết quả sau không đúng "Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi X, Y, Z lần lượt là trọng tâm của các tam giác ANP, BPM, CMN. Khi đó M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $S_{XYZ}=\frac{2}{9}S_{ABC}$".

2) Xin nêu tên các bạn có lời giải tốt:

Bắc Giang: *La Văn Quân*, 11T, THPT chuyên Bắc Giang; **Vĩnh Phúc:** *Dương Phước Thọ, Hoàng Đỗ Kiên*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nam:** *Trần Minh Hải*, 12A2, THPT A, Phủ Lý; **Nghệ An:** *Chu Tự Tài*, 11A12, THPT Diễn Châu 2; **Quảng Trị:** *Trần Đức Anh*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Vũ Trung Quân*, 11T1, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài T11/410. *Cho dãy số* $(a_n),(n\in\mathbb{N}^*)$ *được xác định bởi* $a_1=0$; $a_2=38$; $a_3=-90$ *và* $a_{n+1}=19a_{n-1}-30a_{n-2}$, $\forall n\ge 3$.

Chứng minh rằng a_{2011} *chia hết cho 2011.*

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Xét phương trình đặc trưng của dãy

$x^3-19x+30=0\Leftrightarrow(x-2)(x-3)(x+5)=0$

có ba nghiệm phân biệt $x_1=2$, $x_2=3$ và $x_3=-5$.

Vậy $a_n = c_1 2^n + c_2 3^n + c_3(-5)^n$.

Từ điều kiện ban đầu $a_1 = 0$, $a_2 = 38$, $a_3 = -90$ ta tìm được $c_1 = c_2 = c_3 = 1$. Vậy $a_n = 2^n + 3^n + (-5)^n$.

Với p là số nguyên tố, theo định lí Fermat ta có $2^p \equiv 2 (\bmod p)$; $3^p \equiv 3 (\bmod p)$ và $(-5)^p \equiv -5 (\bmod p)$.

Do đó $a_p \equiv 2+3-5 = 0 (\bmod p)$. Với $p = 2011$ ta có a_{2011} chia hết cho 2011. ❒

➤**Nhận xét.** Bài này được đông đảo các bạn tham gia giải và đều có lời giải đúng như đã nêu ở trên. Trong các lời giải tốt có lời giải của các bạn sau:

Vĩnh Phúc: *Trần Đình Hùng*, 10A, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Ninh Bình:** *Nguyễn Văn Linh*, 11A, THPT Yên Mô; **Hưng Yên:** *Đỗ Thanh Tùng*, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Vương Nhật Quân*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Thái Bình:** *Trần Quang Đại*, 11 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Hoàng Văn Hiệp*, 12B2, THPT Triệu Sơn; **Quảng Ngãi:** *Huỳnh Nhật Quang*, 11 T1, *Võ Văn Tiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Nam:** *Phạm Quốc Sang*, 11 Toán, THPT chuyên Quảng Nam.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★**Bài T12/410.** *Với số nguyên dương n không nhỏ hơn 2. Tìm số các hàm số*

$$f:\{1,2,3,...,n\} \to \{1,2,3,4,5\}$$

thỏa mãn tính chất

$$|f(k+1)-f(k)| \geq 3 \text{ với } k \in \{1,2,...,n-1\}.$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Ta sử dụng nhận xét sau đây: Nếu hàm số f thoả mãn điều kiện bài ra thì với mọi $n > 2$ cho trước ta luôn có $f(n) \neq 3$. Thật vậy, nếu $f(n) = 3$ thì suy ra $f(n-1) \leq 0$ hoặc $f(n-1) \geq 6$, điều này là vô lí.

Kí hiệu a_n, b_n, d_n, e_n là số các hàm $f:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,3,4,5\}$ thoả mãn tính chất đã cho ứng với $f(n)$ tương ứng bằng 1, 2, 4, 5.

Khi đó $a_2 = e_2 = 2$ và $b_2 = d_2 = 1$, nên với $n \geq 2$ có

$a_{n+1} = e_n + d_n, b_{n+1} = e_n, e_{n+1} = a_n + b_n, d_{n+1} = a_n$.

Ta cần tính tổng $S = a_n + b_n + d_n + e_n, \forall n \geq 2$.

Ta có $a_2 = e_2$ và $b_2 = d_2$. Bằng phương pháp quy nạp, ta có $a_n = e_n$ và $b_n = d_n, \forall n \geq 2$. Do vậy $a_{n+2} = e_{n+1} + d_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + e_n = a_{n+1} + a_n$.

Do vậy, (a_n) thỏa mãn như dãy Fibonacci (F_n) với cách chọn $F_0 = 0, F_1 = 1$, bởi vì $a_2 = 2 = F_2$, và $a_3 = e_2 + d_2 = 3 = F_3$. Do đó $a_n = F_n$ với $n \geq 2$. Suy ra

$S = 2(a_n + b_n) = 2a_{n+1} = 2F_{n+1}$ với $n \geq 2$. ❒

➤**Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn đã biết sử dụng phương trình đặc trưng của dãy sai phân để viết công thức tường minh của S như sau:

$$S = \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Bắc Giang: *La Văn Quân*, 11T, THPT chuyên Bắc Giang; **Vĩnh Phúc:** *Đặng Quang Tuấn*, *Hoàng Đỗ Kiên*, *Dương Phước Thọ*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Nguyễn Việt Dũng*, 12A1T, Trường chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** *Nguyễn Ngọc Thiện*, 12A1, THPT Thanh Miện 1; **Nam Định:** *Vũ Hải Long*, *Vũ Xuân Trường*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Vương Nhật Quân*, 11A1, *Trần Chí Công*, 12A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Ngọc Minh*, *Lê Hoàng Hiệp*, 11A1, THPT Thái Hòa, *Nguyễn Văn Hoàng*, 12T7, *Nguyễn Tất Phú*, 11T1, THPT Đô Lương I; **Quảng Nam:** *Phạm Tuấn Anh*, 12.1, *Phạm Quốc Sang*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Nai:** *Nguyễn Quang Vũ*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Phú Yên:** *Lê Nhật Thăng*, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bà Rịa-Vũng Tàu:** *Thái Vũ Hoàng Anh* 10T2, THPT Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Hoàng Công Đức*, *Phan Lê Hoài Ân*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN VĂN MẬU

★**Bài L1/410.** *Trong không gian có trọng trường đều với gia tốc bằng $\vec{g}$. Một vật có khối lượng m được ném thẳng đứng lên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$. Biết lực cản không khí tỉ lệ với vận tốc của vật theo công thức $\vec{F}_c = -k\vec{v}$.*

1) Hãy xác định độ cao cực đại của vật theo v_0, k, g và m.

2) Hãy so sánh công của lực cản không khí khi vật chuyển động đi lên với công của lực cản không khí khi vật rơi xuống.

Lời giải. 1) Chọn trục tọa độ Ox, gốc tọa độ O tại mặt đất, chiều dương hướng lên trên. Theo Định luật II Newton, phương trình chuyển động của vật có dạng

$$-mg - kv = \frac{m\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow -k\left(\frac{mg}{k} + v\right) = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\Leftrightarrow -k\left(\frac{mg}{k} + v\right) = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mg}{k} + v\right)$$

$$\Leftrightarrow -\mathrm{d}t = \frac{m}{k}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{mg}{k} + v\right)}{\left(\frac{mg}{k} + v\right)} \qquad (2)$$

Gọi τ là khoảng thời gian từ lúc ném vật đến khi vật lên đến độ cao cực đại H. Tích phân hai vế biểu thức (2)

$$-\int_0^{\tau}\mathrm{d}t = \frac{m}{k}\int_{v_0}^{0}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{mg}{k} + v\right)}{\left(\frac{mg}{k} + v\right)}.$$

Ta tính được $\tau = \dfrac{m}{k}\ln\left(1 + \dfrac{kv_0}{mg}\right)$ (3)

Mặt khác, từ (1) ta có

$$-mg\mathrm{d}t - kv\mathrm{d}t = m\mathrm{d}v \Leftrightarrow -mg\mathrm{d}t - k\mathrm{d}x = m\mathrm{d}v.$$

Tích phân hai vế

$$-\int_0^{\tau} mg\mathrm{d}t - \int_0^{H} k\mathrm{d}x = \int_{v_0}^{0} m\mathrm{d}v$$

$$\Rightarrow -mg\tau - kH = -mv_0 \Rightarrow H = \frac{mv_0 - mg\tau}{k} \qquad (4)$$

Thế (3) vào (4), ta được

$$H = \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{mg}{k}\ln\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right)\right).$$

2) Chia độ cao H thành n đoạn rất nhỏ (gồm $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$) sao cho vận tốc trên các đoạn này coi như không đổi. Xét đoạn Δx_i bất kì, gọi vận tốc của vật khi đi lên và khi rơi xuống trên đoạn này lần lượt là v_i và v'_i. Khi đó lực cản không khí tương ứng trên đoạn này là $F_i = kv_i$ và $F'_i = kv'_i$.

Khi vật đi từ độ cao x bất kì lên đến độ cao cực đại và rơi xuống độ cao x thì vật chịu lực cản sinh công âm. Vì độ biến thiên cơ năng bằng công của lực cản (lực không phải là lực thế) nên suy ra cơ năng của vật ở độ cao x khi đi lên lớn hơn cơ năng của vật ở độ cao x khi rơi xuống. Suy ra $v_i > v'_i$ hay $F_i > F'_i$.

Từ đó suy ra $\Delta A_i = F_i.\Delta x_i > F'_i.\Delta x_i = \Delta A'_i$.

Gọi A, A' lần lượt là độ lớn công của lực cản không khí khi vật đi lên và khi vật rơi xuống. Vì Δx_i được chọn bất kì nên suy ra

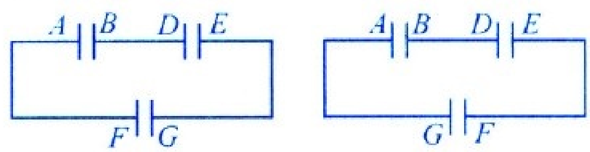
$$A = \sum_{i=1}^{n}\Delta A_i > \sum_{i=1}^{n}\Delta A'_i = A'. \ \square$$

➤**Nhận xét.** Chỉ có bạn *Bùi Xuân Hiển*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định** giải tốt bài này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★**Bài L2/410.** *Cho ba tụ điện $C_1 = 2\mu F$ (hai cốt là A và B), $C_2 = 3\mu F$ (hai cốt là D và E) và $C_3 = 3{,}6\mu F$ (hai cốt là F và G) có các điện tích lần lượt là $q_1 = q_A = 10^{-4}$ C, $q_2 = q_D = 3.10^{-4}$ C và $q_3 = q_F = 2{,}16.10^{-4}$ C (hình vẽ)*

Mắc các tụ điện trên theo các sơ đồ 1 và 2. Hãy xác định các hiệu điện thế U_{AB}, U_{DE} và U_{FG} trong sơ đồ 1 và U^*_{AB}, U^*_{DE} và U^*_{FG} trong sơ đồ 2.



Sơ đồ 1 Sơ đồ 2

Lời giải. Gọi $Q_A, Q_B, Q_D, Q_E, Q_F, Q_G$ là điện tích của các bản *A, B, D, E, F, G*.

• **Mắc theo sơ đồ 1.** Ta có

$$Q_A + Q_F = q_A + q_F = 10^{-4} + 2{,}16.10^{-4} = 3{,}16.10^{-4}(\mathrm{C}) \qquad (1)$$

$$Q_D + Q_F = q_D + q_F = 3.10^{-4} + 2{,}16.10^{-4} = 5{,}16.10^{-4}(\mathrm{C}) \qquad (2)$$

Mặt khác $U_{AB} + U_{DE} + U_{GF} = 0$

$\Rightarrow U_{AB} + U_{DE} = -U_{GF} = U_{FG}$

$\Rightarrow \dfrac{Q_A}{C_1} + \dfrac{Q_D}{C_2} = \dfrac{Q_F}{C_3}$ hay $\dfrac{Q_A}{2} + \dfrac{Q_D}{3} = \dfrac{Q_F}{3{,}6}$.

Suy ra $9Q_A + 6Q_D - 5Q_F = 0$ (3)

Giải hệ phương trình (1), (2), (3), ta được

$Q_A = 0,19.10^{-4}\text{C}$; $Q_D = 2,19.10^{-4}\text{C}$;

$Q_F = 2,97.10^{-4}\text{C}$.

$$\text{Vậy}\quad U_{AB} = \frac{Q_A}{C_1} = \frac{0,19.10^{-4}}{2.10^{-6}} = 9,5(\text{V});$$

$$U_{DE} = \frac{Q_D}{C_2} = \frac{2,19.10^{-4}}{3.10^{-6}} = 73(\text{V});$$

$$U_{FG} = \frac{Q_F}{C_3} = \frac{2,97.10^{-4}}{3,6.10^{-6}} = 82,5(\text{V}).$$

• **Mắc theo sơ đồ 2.** Ta có

$$Q_A + Q_G = q_A - q_F = 10^{-4} - 2,16.10^{-4} = -1,16.10^{-4}(\text{C}) \quad (4)$$

$$Q_D + Q_G = Q_D - Q_F = 3.10^{-4} - 2,16.10^{-4} = 0,84.10^{-4}(\text{C}) \quad (5)$$

Mặt khác $U^*_{AB} + U^*_{DE} + U^*_{FG} = 0$

$$\Rightarrow \frac{Q_A}{C_1} + \frac{Q_D}{C_2} + \frac{Q_F}{C_3} = 0 \text{ hay } \frac{Q_A}{2} + \frac{Q_D}{3} + \frac{Q_F}{3,6} = 0$$

$$\Rightarrow 9Q_A + 6Q_D - 5Q_G = 0 \quad (6)$$

Giải hệ phương trình (4), (5), (6), ta được

$Q_A = -0,89.10^{-4}\text{C}$; $Q_D = 1,11.10^{-4}\text{C}$;

$Q_G = -0,27.10^{-4}\text{C}$ hay $Q_D = 0,27.10^{-4}C$.

$$\text{Vậy}\quad U^*_{AB} = \frac{Q_A}{C_1} = \frac{-0,89.10^{-4}}{2.10^{-6}} = -44,5(\text{V});$$

$$U^*_{DE} = \frac{Q_D}{C_2} = \frac{1,11.10^{-4}}{3.10^{-6}} = 37(\text{V});$$

$$U^*_{FG} = \frac{Q_F}{C_3} = \frac{0,27.10^{-4}}{3,6.10^{-6}} = 7,5(\text{V}). \quad \square$$

➢**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Đinh Huy Hoàng, Đỗ Kiên Phong, Phan Việt Đức*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Bùi Xuân Hiển*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Chu Tự Tài*, 11A12, THPT Diễn Châu II, *Lê Văn Thông*, 11T6, THPT Đô Lương I, *Trần Văn Bắc*, 12A6, THPT chuyên Đại học Vinh, *Hồ Diên Phúc*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III; **Quảng Bình:** *Nguyễn Hoàng Duy Thành*, 11 Lí, THPT chuyên Quảng Bình; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Thanh Dư*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phạm Đức Huy*, 12A7, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

NGUYỄN VĂN THUẬN

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

T7/414. Solve the equation

$$\log_3(7^x + 2) = \log_5(6^x + 19).$$

T8/414. Let ABC be a triangle satisfying

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{2}.$$

Prove that ABC is a right triangle iff

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{10}.$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/414. Let ABC be a triangle inscribed the circle $(O;R)$, M is a point not on the circle. MA, MB, MC cut $(O;R)$ at A_1, B_1, C_1 respectively. Let r, r_1 be respectively the radii of the incircles of triangles ABC and $A_1B_1C_1$. Prove that $|R^2 - OM^2| \geq 4r.r_1$.

T10/414. Let a, b be two positive real numbers. Find the greatest positive constant k satisfying the inequality

$$\frac{k}{a^3+b^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq \frac{16+4k}{(a+b)^3}.$$

T11/414. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

$$f(xf(y)+y) + f(xy+x) = f(x+y) + 2xy.$$

T12/414. For each positive integer n, consider a function f_n in $\mathbb{R}$ defined by

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{2n} x^i + 1.$$

Prove the following statements:

a) f_n obtains its minimum value at a unique point x_n, for each positive integer n. Put $S_n = f_n(x_n)$.

b) $S_n > \frac{1}{2}$ for all $n \in \mathbb{N}^*$. Moreover, $\frac{1}{2}$ is the best constant possible in the sense that there does not exist any real number $a > \frac{1}{2}$ such that $S_n > a$ for all $n \in \mathbb{N}^*$.

c) The sequence (S_n) $(n = 1, 2, ...)$ is decreasing and $\lim S_n = \frac{1}{2}$.

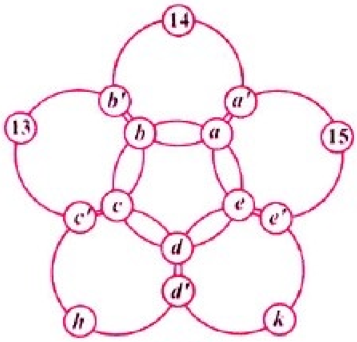
d) $\lim x_n = -1$.

Translated by LE MINH HA

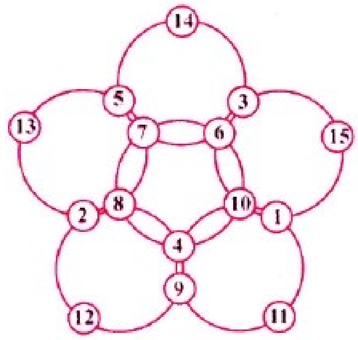
Giải đáp: SÁU VÒNG TRÒN SỐ

(Đề đăng trên THTT số 411 tháng 9 năm 2011)

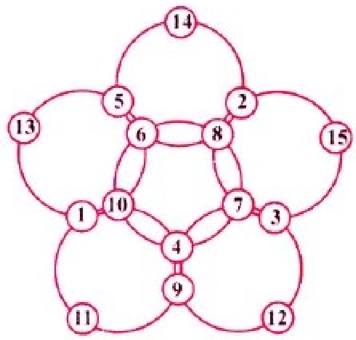
Kí hiệu các chữ biểu thị cho các số trong ô tròn như ở hình 1. Theo giả thiết có $f = a+b+c+d+e = 35$. Đặt $g = a' + b' + c' + d' + e'$ thì $f + g + h + k = 1 + 2 + ... + 12 = 6 \times 13 = 78$. Suy ra $g + h + k = 43$ (1)



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Xét tổng các số của sáu vòng tròn số ta có
$3(a+b+c+d+e) + 2(a'+b'+c'+d'+e')$
$+h+k+13+14+15 = 6\times 35 = 210.$

Suy ra $2g + h + k = 63$ (2)

Từ (1) và (2) có $g = 20$. Thay vào (1) được $h + k = 23$, do đó $(h;k)$ chỉ có thể bằng (11; 12) hoặc (12, 11). Xét hai trường hợp sau:

1) $h = 12$ và $k = 11$. Đặt $a + a' = m$. Xét hai vòng tròn chứa 13 và 14 suy ra $c + c' = m + 1$. Xét hai vòng tròn chứa 13 và $h = 12$ suy ra $e + e' = m + 2$. Xét hai vòng tròn chứa 14 và 15 suy ra $b + b' = m + 3$. Xét hai vòng tròn chứa $h = 12$ và $k = 11$ suy ra $d + d' = m + 4$. Từ các đẳng thức trên có $f + g = 5m + 10 \Rightarrow m = 9$. Do đó $a + a' = 9$,
$b + b' = 12,\ c + c' = 10,\ d + d' = 13,\ e + e' = 11$ (3)

Xảy ra các trường hợp
$$a + a' = 6 + 3 = 7 + 2 = 8 + 1 = a' + a.$$

Chẳng hạn $a = 6$, $a' = 3$, kết hợp với (3) tìm dần ra các số còn lại. Một đáp án như thế là hình 2.

2) $h = 11$ và $k = 12$. Đặt $a + a' = n$. Xét tương tự như trên tìm được $n = 10$ nên có $a + a' = 10$, $b + b' = 11, c + c' = 11,\ d + d' = 13, e + e' = 10$ (4)

Xảy ra các trường hợp
$$a + a' = 6 + 4 = 7 + 3 = 8 + 2 = 9 + 1 = a' + a.$$

Chẳng hạn $a = 8$, $a' = 2$, kết hợp với (4) tìm dần ra các số còn lại. Một đáp án như thế là hình 3.

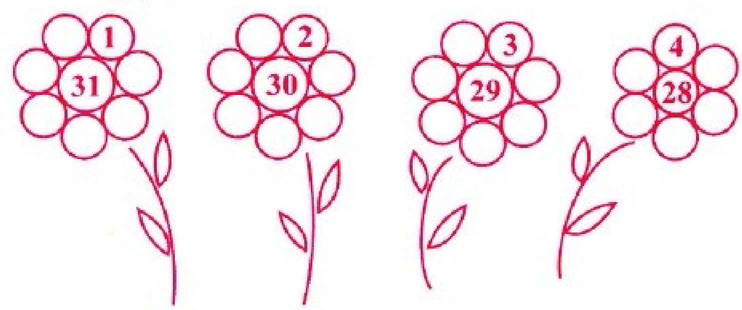
Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt:
1) *Đinh Việt Thắng*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Nam Định**.
2) *Tạ Diệu Ly*, 9A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ.**
3) *Trần Nguyên Try*, 9/1, THCS Phạm Hồng Thái, TP. Pleiku, **Gia Lai**.
4) *Bùi Xuân Hiển*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Nam Định**.

PHI PHI

Bốn bông hoa số

Bạn *Tính* muốn cắt 31 số ngày của tháng 12 trên tờ lịch rồi dán mỗi số vào một ô tròn như ở hình bên để tạo thành bốn bông hoa số chào mừng năm mới, sao cho tổng các số trong mỗi bông hoa đều bằng nhau. Bạn hãy giúp bạn *Tính* đạt được điều mong muốn đó.

AN MINH



DIỄN ĐÀN

DẠY HỌC TOÁN

Chứng minh hệ thức trong hình học không gian thường gặp trong chương trình toán bậc THPT. Thật khó tìm ra một phương pháp chung để giải các bài toán dạng này. Tuy nhiên dựa vào kinh nghiệm học tập và giảng dạy của mình, chúng tôi xin trao đổi một số phương pháp mà bản thân thấy có hiệu quả hơn cả.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HỆ THỨC trong hình học không gian

LÊ QUỐC HÁN
(GV khoa Toán, ĐH Vinh, Nghệ An)

1. SỬ DỤNG NHỮNG HỆ THỨC TƯƠNG TỰ TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

Rất nhiều hệ thức trong hình học không gian được chứng minh dựa trên kết quả hay phương pháp chứng minh các hệ thức tương tự trong hình học phẳng. Chẳng hạn các hệ thức trong tứ diện vuông (thí dụ 1), trong tứ diện tùy ý (thí dụ 2) được chứng minh dựa vào các hệ thức tương tự trong tam giác vuông và tam giác thường.

★**Thí dụ 1.** *Cho tứ diện OABC, góc tam diện đỉnh O ba mặt vuông; $OA=a, OB=b, OC=c$; đường cao tứ diện $OH=h$. Thế thì*

1) $S_{OAB}^2=S_{HAB}.S_{ABC}$

2) $S_{OAB}^2+S_{OAC}^2+S_{OBC}^2=S_{ABC}^2$

3) $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

★**Thí dụ 2.** 1) *Cho tứ diện ABCD với các đường cao h_a, h_b, h_c, h_d và bán kính mặt cầu nội tiếp bằng r. Thế thì*

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_d}=\frac{1}{r}.$$

2) *Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là trọng tâm của các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D và a, b, c, d, e, f là các cạnh của tứ diện ABCD. Thế thì*

$$AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2+DD_1^2=\frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2).$$

Bây giờ để có kết quả tương tự công thức tính đường phân giác trong của tam giác, cần xác lập công thức tính thể tích tứ diện tương tự công thức tính diện tích tam giác $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$.

★**Thí dụ 3.** 1) *Cho tứ diện ABCD có $S_{ABC}=p$, $S_{ABD}=q$, $AB=a$ và góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) bằng α. Thế thì*

$$V_{ABCD}=\frac{2pq\sin\alpha}{3}.$$

2) *Mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh AB cắt CD tại M. Đặt $S_{ABM}=x$. Thế thì*

$$x=\frac{2pq\cos\frac{\alpha}{2}}{p+q}.$$

Lời giải. (h. 1)

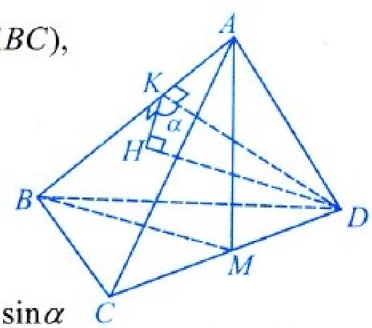
1) Kẻ $DH\perp mp(ABC)$, $DK\perp AB$ thì $HK\perp AB$.

Do đó $\widehat{DKH}=\alpha$.

Ta có

$DH=DK\sin\alpha$

$=\dfrac{2S_{ABD}}{AB}.\sin\alpha=\dfrac{2q\sin\alpha}{a}$



Hình 1

nên $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}DH=\dfrac{2pq\sin\alpha}{3a}.3$

2) Tương tự $V_{ABCM} = \dfrac{2px\sin\frac{\alpha}{2}}{3a}, V_{ABDM} = \dfrac{2qx\sin\frac{\alpha}{2}}{3a}$.

Vì $V_{ABCM} + V_{ABDM} = V_{ABCD}$, nên

$$\frac{2px\sin\frac{\alpha}{2}}{3a} + \frac{2qx\sin\frac{\alpha}{2}}{3a} = \frac{2pq\sin\alpha}{3a}.$$

Do đó $x = \dfrac{2pq\cos\frac{\alpha}{2}}{p+q}$. ❒

2. SỬ DỤNG CÔNG CỤ LƯỢNG GIÁC

Sử dụng định nghĩa tỉ số lượng giác của góc nhọn và các định lí sin, côsin trong tam giác để giải toán.

★Thí dụ 4. *Cho hình chóp S.ABCD có SA = h vuông góc với đáy và ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Trên hai cạnh BC và CD thứ tự có hai điểm M, N chuyển động sao cho $BM = u$, $DN = v$. Tìm hệ thức liên hệ giữa u và v sao cho*

1) Mặt phẳng (SAM) vuông góc với mặt phẳng (SMN).

2) Góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) bằng 45°.

Lời giải. (h. 2)

1) Ta chứng minh được mp$(SAM) \perp$ mp(SMN) khi và chỉ khi tam giác AMN vuông tại M.

Ta có $\widehat{AMN} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 90^\circ$.

$\Leftrightarrow \tan\widehat{M_1} = \cot\widehat{M_2}$

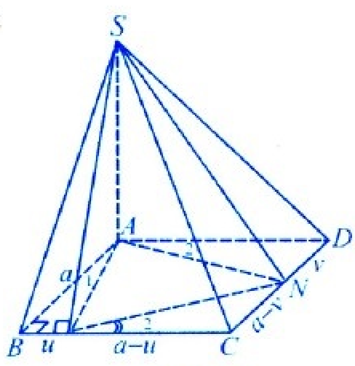
$\Leftrightarrow \dfrac{a}{u} = \dfrac{a-u}{a-v}$.

2) Góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) chính là $\widehat{MAN}$.

Mà $\widehat{MAN} = 45^\circ$

$\Leftrightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 45^\circ$

$\Leftrightarrow \tan(\widehat{A_1} + \widehat{A_2}) = \tan 45^\circ$.



Hình 2

$\Leftrightarrow \dfrac{\tan\widehat{A_1} + \tan\widehat{A_2}}{1 - \tan\widehat{A_1}\tan\widehat{A_2}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{u}{a} + \dfrac{v}{a} = 1 - \dfrac{u}{a}.\dfrac{v}{a}$

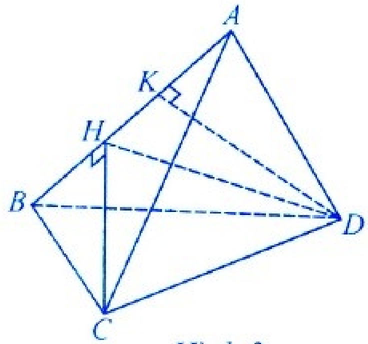
$\Leftrightarrow a(u+v) = a^2 - uv \Leftrightarrow uv + a(u+v) = a^2$. ❒

★Thí dụ 5. *Cho tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối bằng nhau. Chứng minh điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau là* $\tan\widehat{BAC}.\tan\widehat{ABC} = 2$.

Lời giải. (h. 3)

Kẻ $CH \perp AB$, $DK \perp AB$ thì $CH = DK$, $BH = AK$.

Hơn nữa mp(ABC) $\perp$ mp(ABD)



Hình 3

$\Leftrightarrow CH \perp HD$

$\Leftrightarrow CH^2 + DH^2 = CD^2$

$\Leftrightarrow CH^2 + DK^2 + HK^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow 2CH^2 + (AH - AK)^2 = (AH + BH)^2$

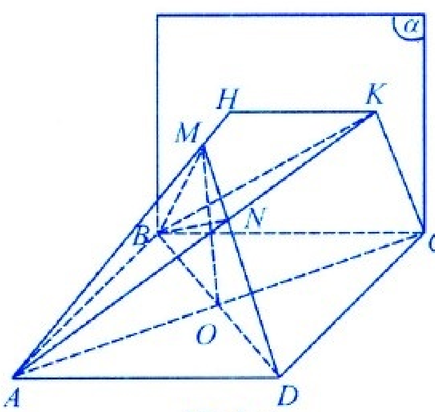
$\Leftrightarrow 2CH^2 = (AH^2 + BH)^2 - (AH - BH)^2$

$\Leftrightarrow 2CH^2 = 4AH.BH \Leftrightarrow \dfrac{CH}{AH}.\dfrac{CH}{BH} = 2$

$\Leftrightarrow \tan\widehat{BAC}.\tan\widehat{ABC} = 2$. ❒

★Thí dụ 6. *Cho hình vuông ABCD tâm O, có cạnh bằng a và nửa đường tròn (C) đường kính BO nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M là một điểm trên đường tròn (C) và N là giao điểm thứ hai (khác M) của DM với (C). Chứng minh hệ thức* $\sin^2\widehat{MAO} + \sin^2\widehat{NAO} = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải. (h. 4)



Hình 4

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua BC, vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và H, K là giao điểm của AM, AN với (α). Dễ thấy tứ giác $BCKH$ là hình thang và $OM \perp BM$. Vì mp$(MBD) \perp$ mp$(ABCD)$ và $AC \perp BD$ nên $AC \perp$ mp(BMD) $\Rightarrow AC \perp BM$. Do đó $BM \perp$ mp(AMC). Ta lại có $AB \perp BC$, mp$(ABCD) \perp$ mp(α), nên $AB \perp$ mp$(\alpha) \Rightarrow AB \perp CH$. Suy ra $CH \perp$ mp$(AMB) \Rightarrow CH \perp BH$, $CH \perp HA$.

Tương tự $CK \perp KB$, $CK \perp KA$. Từ đó hình thang $BCKH$ nội tiếp nên là hình thang cân. Do đó $\sin^2 \widehat{MAO} + \sin^2 \widehat{NAO}$

$$= \frac{HC^2 + KC^2}{AC^2} = \frac{HC^2 + BH^2}{AC^2} = \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}. \square$$

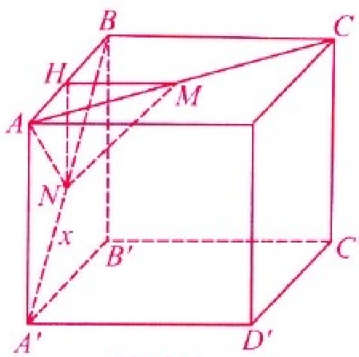
★Thí dụ 7. *Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' cạnh bằng a. Hai điểm M, N chuyển động trên AC và A'B sao cho AM=A'N=x* $(0 \le x \le a\sqrt{2})$. *Gọi* α *và* β *theo thứ tự là các góc tạo bởi MN với AC và A'B. Chứng minh hệ thức* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải. (h. 5)

Kẻ $MH \,//\, BC$. Khi đó

$$\frac{AH}{HB} = \frac{AM}{MC} = \frac{A'N}{NB}$$

nên $NH \,//\, AA'$. Vì $AA' \perp BC$ nên $HM \perp HN$.



Hình 5

Hơn nữa các tam giác AHM và BHN vuông cân nên

$$HM = \frac{AM}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}},\; HN = \frac{BN}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}}.$$

$$MN^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{(a\sqrt{2} - x)^2}{2} = x^2 - a\sqrt{2}x + a^2.$$

Áp dụng định lí côsin cho các tam giác ANA' và AMN có $AN^2 = a^2 + x^2 - a\sqrt{2}x = MN^2$.

$$\cos\alpha = \frac{AM^2 + MN^2 - AN^2}{2AM.MN} = \frac{AM}{2MN} = \frac{x}{2NM}.$$

Tương tự $\cos\beta = \dfrac{BN}{2MN} = \dfrac{a\sqrt{2} - x}{2MN}$.

Do đó $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$

$$= \frac{x^2 + (a\sqrt{2} - x)^2}{4MN^2} = \frac{2(x^2 - a\sqrt{2}x + a^2)}{4(x^2 - a\sqrt{2}x + a^2)} = \frac{1}{2}. \square$$

3. SỬ DỤNG CÔNG THỨC VỀ TỈ SỐ DIỆN TÍCH VÀ TỈ SỐ THỂ TÍCH

Kết quả 1. Cho góc $\widehat{xOy} = \alpha$. Trên Ox và Oy thứ tự lấy hai cặp điểm A, A' và B, B'. Thế thì

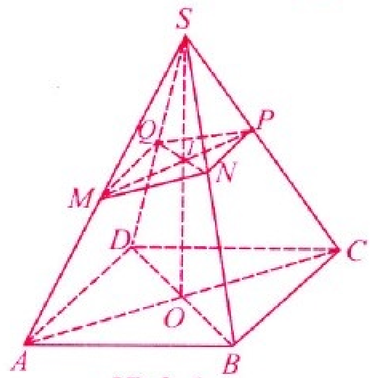
$$\frac{S_{OAB}}{S_{OA'B'}} = \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{OB}{OB'}.$$

Kết quả 2. Cho góc tam diện $S.xyz$. Trên Sx, Sy, Sz lấy các cặp điểm A, A'; B, B'; C, C'. Thế thì $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \dfrac{SA}{SA'} \cdot \dfrac{SB}{SB'} \cdot \dfrac{SC}{SC'}$.

★Thí dụ 8. *Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng tùy ý cắt SA, SB, SC, SD thứ tự tại M, N, P, Q. Chứng minh hệ thức* $\dfrac{SA}{SM} + \dfrac{SC}{SP} = \dfrac{SB}{SN} + \dfrac{SD}{SQ}$.

Lời giải. (h. 6)

Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của SO với mặt phẳng $(MNPQ)$ thì M, I, P thẳng hàng và N, I, Q thẳng hàng.



Hình 6

Vì $AO = OC$ nên $S_{SAO} = S_{SCO} = \dfrac{1}{2} S_{SAC}$.

Ta lại có $\dfrac{S_{SMI}}{S_{SAO}} + \dfrac{S_{SIP}}{S_{SOC}} = \dfrac{2S_{SMP}}{S_{SAC}}$

nên $\dfrac{SM.SI}{SA.SO} + \dfrac{SI.SP}{SO.SC} = \dfrac{2.SM.SP}{SA.SC}$.

Do đó $\dfrac{SA}{SM} + \dfrac{SC}{SP} = \dfrac{2SO}{SI}$.

Tương tự có $\dfrac{SB}{SN} + \dfrac{SD}{SQ} = \dfrac{2SO}{SI}$.

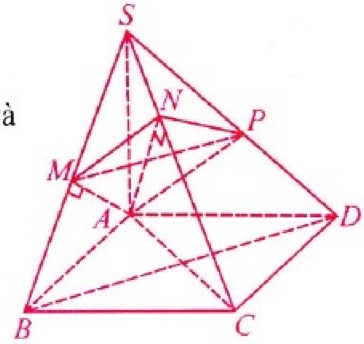
Từ đó $\dfrac{SA}{SM} + \dfrac{SC}{SP} = \dfrac{SB}{SN} + \dfrac{SD}{SQ}. \square$

★Thí dụ 9. *Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a và SA là đường cao. Góc tạo bởi SC và mặt phẳng (SAB) bằng* α*. Một mặt phẳng đi qua A,* *vuông góc với SC cắt SB, SC, SD tại M, N, P. Chứng minh hệ thức* $\dfrac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \left(\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$.

Lời giải. (h. 7)

Dễ thấy $\widehat{BSC} = \alpha$, $SB \perp BC$, $SC \perp AN$ và

$$\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.AMN}}{2V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}.$$



Hình 7

Trong tam giác vuông SAB có

$$SM.SB = SA^2 \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2}.$$

Tương tự có $\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SA^2}{SC^2}$.

Mặt khác $SB = a.\cot\alpha$, $SC = \dfrac{a}{\sin\alpha}$,

nên $SA^2 = SB^2 - AB^2 = a^2.\cot^2\alpha - a^2$

$$= a^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - 1\right) = \frac{a^2\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Do đó $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{a^2\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}.\dfrac{\sin^2\alpha}{a^2\cos^2\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$\frac{SN}{SC} = \frac{SB^2}{SC^2} = \frac{a^2\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}.\frac{\sin^2\alpha}{a^2} = \cos 2\alpha.$$

Suy ra $\dfrac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}.\cos 2\alpha = \left(\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$. ❒

4. Sử dụng kết quả về diện tích hình chiếu

Kết quả 3. Giả sử góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là α. Trên (P) có một đa giác diện tích S và hình chiếu của nó trên (Q) có diện tích S'. Thế thì $S' = S\cos\alpha$.

★Thí dụ 10. *Cho tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối bằng nhau. Gọi α, β, γ là các góc phẳng nhị diện cạnh BC, CD, DB của tứ diện đó. Chứng minh hệ thức* $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$.

Lời giải. Các đường thẳng kẻ từ B, C, D thứ tự song song với CD, BD, BC cắt nhau tại M, N, P. Kẻ $AH \perp \text{mp}(BCD)$. Khi đó tam giác MNP có ba góc nhọn và H là trực tâm của tam giác đó nên H nằm trong tam giác MNP.

Dễ thấy diện tích các mặt của tứ diện bằng nhau và kí hiệu là S. Theo kết quả 3 có $S_{HBC} = S\cos\alpha$, $S_{HCD} = S\cos\beta$, $S_{HDB} = S\cos\gamma$.

- Nếu H nằm trong tam giác BCD thì $S_{HBC} + S_{HCD} + S_{HDB} = S_{BCD} = S$, nên
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1.$$

- Nếu H nằm ngoài tam giác BCD, chẳng hạn H nằm trong tam giác PCB. Gọi α_1 là góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) thì
$$\alpha_1 + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \cos\alpha = -\cos\alpha_1.$$

Khi đó $S_{HCD} + S_{HBD} - S_{HBC} = S_{BCD} = S$ nên
$$\cos\beta + \cos\gamma - \cos\alpha_1 = 1.$$

Do đó $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$. ❒

BÀI TẬP

1. Cho tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau. Chứng minh hệ thức
$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

2. a) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $CD = b$, khoảng cách giữa AB và CD là d, góc giữa AB và CD là α. Chứng minh rằng $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}abd\sin\alpha$.

b) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$. Chứng minh rằng
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\sqrt{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)(p^2 - c^2)},$$
trong đó $2p^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

3. Cho tứ diện $OABC$, góc tam diện đỉnh O ba mặt vuông, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$; đường cao $OH = h$.

a) Gọi α, β, γ là các góc tạo bởi OH với OA, OB, OC. Chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

b) Gọi α_1, β_1, γ_1 là các góc tạo bởi các mặt phẳng (OAB), (OAC), (OBC) với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng
$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1.$$

4. Cho hình chóp $S.ABC$ và G là trọng tâm tam giác ABC. Một mặt phẳng cắt SA, SB, SC, SG tại A', B', C' và G'. Chứng minh hệ thức
$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{3SG}{SG'}.$$

5. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a, AH là đường cao của tứ diện và O là trung điểm của AH. Một mặt phẳng đi qua O cắt AB, AC, AD tại M, N, P. Chứng minh hệ thức $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN} + \dfrac{1}{AP} = \dfrac{6}{a}$.

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 414 (12.2011)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

TRONG SỐ NÀY

Bìa 1. Học sinh trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long

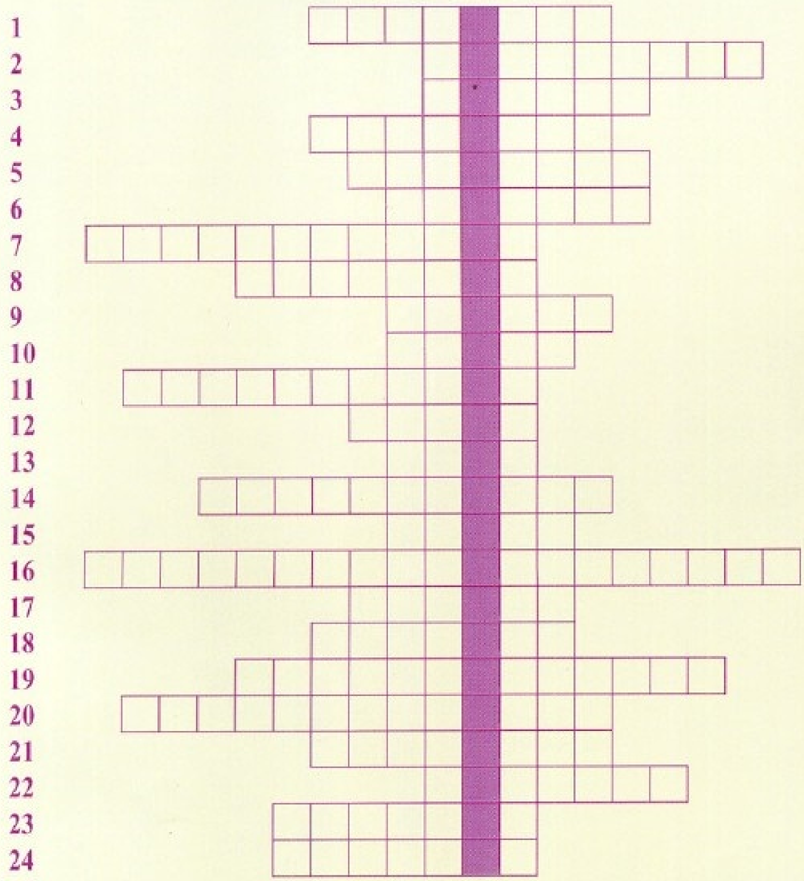
Bìa 3. Câu lạc bộ – Math Club

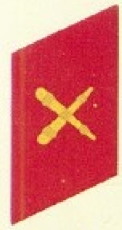
Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : MINH THƠ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

CÁC BINH CHỦNG trong Quân đội

Quân đội nhân dân Việt Nam có 25 loại phù hiệu, mỗi phù hiệu biểu thị cho một binh chủng, quân chủng hoặc ngành Kĩ thuật hoặc ngành Hậu cần Tài chính. Dựa vào hình ảnh mỗi phù hiệu bạn hãy tìm tên của binh chủng, quân chủng hoặc ngành tương ứng trong Quân đội nhân dân Việt Nam rồi điền tên vào mỗi hàng (kể từ trên xuống) của ô chữ để phát hiện từ khóa ở cột dọc sẫm màu.

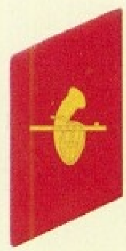
VÂN KHANH




Hàng 1

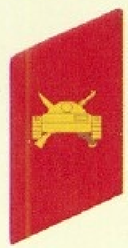

Hàng 2


Hàng 3


Hàng 4


Hàng 5


Hàng 6


Hàng 7


Hàng 8


Hàng 9


Hàng 10


Hàng 11


Hàng 12


Hàng 13


Hàng 14


Hàng 15


Hàng 16


Hàng 17


Hàng 18


Hàng 19


Hàng 20


Hàng 21


Hàng 22


Hàng 23


Hàng 24

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM - VĨNH LONG

NIỀM TỰ HÀO CỦA VÙNG ĐẤT CHÍN RỒNG TRÒN 20 TUỔI

Hiệu trưởng
BÙI CHÍ HIẾU

Nằm giữa đôi bờ Cửu Long Giang hiền hòa, Trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm tỉnh Vĩnh Long, tiền thân là trường chuyên Vĩnh Long, chính thức được mang tên Nguyễn Bỉnh Khiêm từ ngày 29/7/1992 theo quyết định của UBND Tỉnh với vỏn vẹn 3 lớp chuyên khối 10 và 60 học sinh. Đến nay trường đã có quy mô 33 lớp và 1132 học sinh; 129 cán bộ, giáo viên, công nhân viên (trong đó có 40 thạc sĩ).

Được sự quan tâm của các cấp lãnh đạo, sự chỉ đạo của Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Vĩnh Long, được cổ vũ bởi truyền thống hiếu học và khát vọng vươn lên của các thế hệ giáo viên học sinh, sự ủng hộ của cha mẹ học sinh, trong 20 năm qua nhà trường đã đạt được những thành tích đáng phấn khởi và tự hào.

HỌC SINH: Tỉ lệ tốt nghiệp luôn đạt 100%, tỉ lệ trúng tuyển vào đại học luôn đạt trên 80% (nếu chỉ tính từ năm học 2006-2007 tới nay luôn xếp trong Top 100 các trường THPT toàn quốc với tỉ lệ trên 95%). Trong 20 năm qua, học sinh của trường dự thi và đoạt 3468 giải học sinh giỏi cấp tỉnh, 321 giải học sinh giỏi Quốc gia (bình quân 16 giải/năm). Dự thi "Đường lên đỉnh Olympia" do Đài Truyền hình Việt Nam tổ chức, liên tiếp 3 năm từ 2001 đến 2003, trường đoạt 2 giải Nhất (em *Trần Ngọc Minh*, em *Lương Phương Thảo*) và 1 giải Nhì (em *Đỗ Thị Hồng Nhung*).

GIÁO VIÊN: 2 giáo viên được tặng danh hiệu Nhà giáo Ưu tú (thầy *Nguyễn Tuấn Thanh* và cô *Bùi Thị Xuân Hoa*), 1 giáo viên được Hội Toán học Việt Nam tặng giải thưởng Lê Văn Thiêm (cô *Lê Ngọc Trường*) và 7 giáo viên được Sở Giáo dục và Đào tạo Vĩnh Long tặng thưởng danh hiệu Viên phấn Vàng, 10 giáo viên được tặng Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ.

NHÀ TRƯỜNG: Được Nhà nước tặng Huân chương Lao động hạng Ba năm 2003, Bộ Giáo dục và Đào tạo quyết định công nhận trường đạt chuẩn Quốc gia năm 2002. Hai lần được Thủ tướng chính phủ tặng Bằng khen, hai lần được UBND tỉnh trao Cờ dẫn đầu thi đua khối các trường THPT của tỉnh năm 2009 và 2010.

Năm học 2010-2011, lập thành tích chào mừng kỉ niệm 20 năm thành lập trường, nhiều niềm vui đã đến với trường như: Có 15 học sinh đoạt giải học sinh giỏi Quốc gia (nhiều nhất từ khi trường không còn thi ở bảng B), 498 học sinh đoạt giải học sinh giỏi cấp tỉnh; kết quả thi đại học trường đạt điểm bình quân 3 môn là 16,27; và xếp thứ 66 trong Top 100 các trường THPT toàn quốc, đặc biệt có em *Dương Thanh Hùng* đạt thủ khoa toàn quốc. Trường được Hội đồng thi đua tỉnh xét duyệt và đề nghị Nhà nước tặng Huân chương Lao động hạng Nhì năm 2011. Song song đó, Dự án cải tạo xây dựng mở rộng nhà trường (dự trù kinh phí trên 50 tỉ đồng) đã được UBND tỉnh phê duyệt và có kế hoạch triển khai vào đầu năm 2012.

Kỉ niệm tròn 20 tuổi, trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm tỉnh Vĩnh Long vui mừng với thành tích đã đạt được và không ngừng cố gắng vươn lên để xứng đáng là niềm tự hào của vùng đất Chín Rồng.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT12M1
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2011
Giá : 8000 đồng
Tám nghìn đồng