

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
1. Mở đầu	2
1.1. Lí do chọn đề tài	2
1.2. Mục đích nghiên cứu	2
1.3. Đối tượng nghiên cứu.	2
1.4. Phương pháp nghiên cứu	2
2. Nội dung của sáng kiến kinh nghiệm.	2
2.1.Cơ sở lí luận	2
2.2.Thực trạng của vấn đề	4
2.3.Giải pháp và tổ chức thực hiện	4
2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm.	14
3. Kết luận và đề xuất.	15
3.1. Kết luận	15
3.2.Ý kiến đề xuất	16

1. Mở đầu

1.1. Lí do chọn đề tài.

Trong đề thi của kì thi THPT quốc gia thường có một câu hỏi phân hình học trong không gian liên quan đến tính khoảng cách. Thực tế cho thấy khi tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng hoặc khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau thì số học sinh làm được phần này không nhiều. Đặc biệt môn toán đã sử dụng phương pháp thi trắc nghiệm thì việc đưa ra đáp số nhanh và chính xác là rất quan trọng và cần thiết. Đã có rất nhiều tài liệu đưa ra một số phương pháp để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Song phần lớn các tài liệu lại chưa trình bày một cách trực quan thông qua bài toán tổng quát gắn với hình chóp hoặc lăng trụ để các em học sinh có thể giải dạng toán này một cách nhanh chóng và dễ dàng.

Do đó khi gặp loại toán này nhiều học sinh rất lúng túng, đặc biệt là số học sinh có học lực trung bình không biết hướng giải quyết. Nhằm giúp các em có thêm kiến thức, phát triển năng lực tư duy sáng tạo và gợi cho các em hướng giải quyết tốt khi gặp loại toán này. Tôi xin trình bày ***bài toán tổng quát tính khoảng cách trong hình học không gian*** dưới dạng một bài viết nhỏ, với hy vọng phần nào giúp các em học sinh không lúng túng khi gặp dạng toán này.

1.2. Mục đích nghiên cứu.

Trong bài viết này tôi muốn đề cập về “bài toán tổng quát tính khoảng cách trong hình học không gian” nhằm trang bị thêm cho học sinh một số công cụ hữu hiệu để giải một bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng hoặc khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Việc đưa ra cách giải cho một bài toán dạng tổng quát sẽ giúp cho học sinh có cái nhìn sâu hơn và nhanh chóng đưa ra được lời giải khi làm một bài tập cụ thể.

1.3. Đối tượng nghiên cứu.

Đề tài nghiên cứu, tổng kết về vấn đề tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong không gian.

1.4. Phương pháp nghiên cứu.

Xây dựng cơ sở lí thuyết.

Khảo sát, điều tra từ thực tế dạy học.

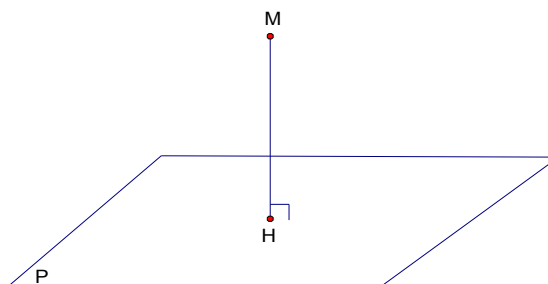
Tổng hợp, so sánh, đúc rút kinh nghiệm.

2. Nội dung của sáng kiến kinh nghiệm.

2.1. Cơ sở lí luận.

a. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

*Cho điểm M và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (P). Khi đó khoảng cách giữa hai điểm M và H được gọi là khoảng cách từ điểm M đến (P) và kí hiệu là $d(M, (P))$. [1]



*Cho hai điểm A, B không thuộc mặt phẳng (P)

+ Nếu $AB \parallel (P)$ thì $d(A, (P)) = d(B, (P))$

Chứng minh: Gọi A' , B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên (P) khi đó $ABB'A'$ là hình chữ nhật

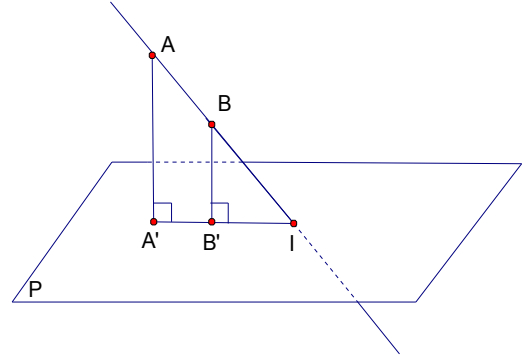
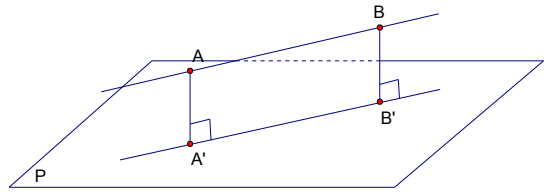
$$\Rightarrow AA' = BB' \Rightarrow d(A, (P)) = d(B, (P))$$

+ Nếu AB không song song với (P) . Gọi I là giao điểm của đường thẳng AB và

$$(P). \text{ Khi đó } \frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = \frac{AI}{BI}$$

Chứng minh: Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên (P) Xét $\triangle AA'I$ có $BB' \parallel AA'$. Theo định lý Talet ta có:

$$\frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{AI}{BI}$$



b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau :

+ Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b là đường thẳng c cắt cả hai đường thẳng a và b đồng thời vuông góc với cả hai đường thẳng ấy.

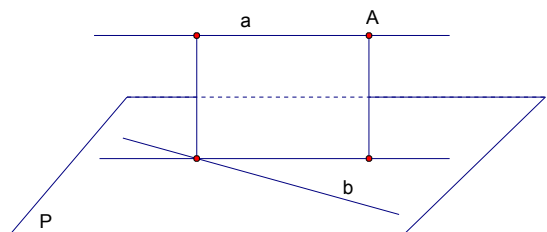
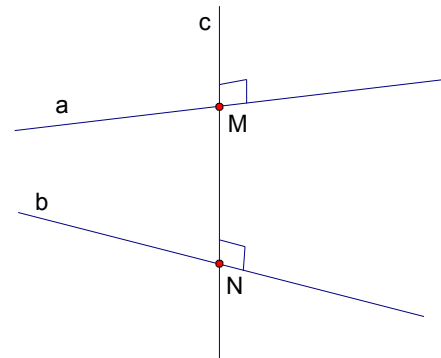
+ Đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b lần lượt tại M và N thì đoạn MN là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b .

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là độ dài đoạn thẳng MN , kí hiệu là $d(a, b)$

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng khoảng cách giữa a và (P) chứa b và song song với a .

$$d(a, b) = d(a, (P)) = d(A, (P))$$

(Với $A \in a$ và $(P) \parallel b$). [1]

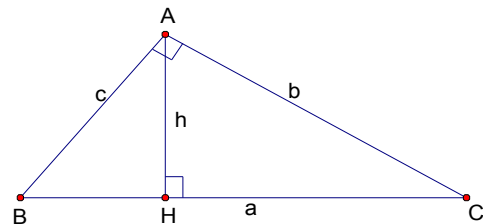


c. Các hệ thức lượng trong tam giác vuông:

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$).

$$BC = a, AB = c, AC = b, AH = h, BH = c', CH = b'$$

Ta có một số hệ thức sau.



$$* a^2 = b^2 + c^2 \quad * b^2 = ab', c^2 = a.c' \quad * a.h = b.c = 2S_{\Delta ABC} \quad * \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$* \sin B = \cos C = \frac{b}{a}, \sin C = \cos B = \frac{c}{a}, \tan B = \cot C = \frac{b}{c}, \tan C = \cot B = \frac{c}{b}. \quad [2]$$

2.2. Thực trạng của vấn đề.

Các kiến thức khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong sách giáo khoa trình bày rất đơn giản. Trong khi đó các kỳ thi Đại học và Cao đẳng cũng như kì thi THPT quốc gia trong những năm gần đây thì năm nào cũng có bài toán tính thể tích của khối chóp hoặc khối lăng trụ và tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng hoặc khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Kỹ năng giải quyết dạng bài tập này đối với nhiều học sinh, đặc biệt là học sinh trường THPT Triệu Sơn 6 thực sự còn nhiều lúng túng.

Vì thế thông qua học tập làm sao giúp các em rèn luyện khả năng tư duy sáng tạo, từ đó có kĩ năng giải quyết các vấn đề trong học tập, giúp học sinh có hứng thú học tập bộ môn. Việc làm này tôi nghĩ cần thiết và phù hợp với yêu cầu của giáo dục trong giai đoạn mới.

Từ thực trạng trên để công việc đạt hiệu quả hơn, trong chuyên đề này tôi muốn chia sẻ với các em học sinh cũng như đồng nghiệp “bài toán tổng quát tính khoảng cách trong hình học không gian”. Trong chuyên đề sẽ có những bài tập minh họa là đề thi đại học hoặc THPT quốc gia các năm gần đây để từ đó các em một lần nữa nắm chắc thuật toán để giải loại toán này.

Tôi hy vọng chuyên đề này sẽ đem lại cho các thầy cô giáo những cải tiến giảng dạy mới, nhằm góp phần vào việc nâng cao chất lượng giáo dục hiện nay.

2.3. Giải pháp và tổ chức thực hiện.

Chuyên đề đã thực hiện trong năm học 2016-2017 tại lớp 11A1. Sau khi thực hiện có kiểm tra, đối chứng, tôi thấy học sinh đã giải được các bài toán dạng này tốt hơn rất nhiều so với trước đây khi chưa được tiếp thu chuyên đề. Và cũng qua đó học sinh tỏ ra hứng thú học tập đối với phần này.

Trong mỗi bài tập cụ thể sẽ có hướng dẫn học sinh liên hệ với bài toán tổng quát. Từ đó giúp các em có cách nhìn rộng, hiểu sâu hơn để có thể giải tốt dạng toán này.

Sau đây là “bài toán tổng quát tính khoảng cách trong hình học không gian” mà tôi đã rút ra được trong quá trình ôn tập thi đại học như trước đây mà nay là kì thi THPT quốc gia.

Bài toán tổng quát được xây dựng trên hình chóp đỉnh S. Khi gặp bài toán về lăng trụ thì ta thể quy về bài toán về hình chóp bằng cách chọn một hình chóp có đáy là một đáy của lăng trụ còn đỉnh S thuộc đáy còn lại của lăng trụ.

a. Bài toán tổng quát. Cho một hình chóp có đỉnh S. Điểm H là hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng đáy. $M_p(SAB)$ là một mặt bên không đi qua điểm H, $m_p(SPQ)$ là mặt phẳng đi qua điểm H (Với PQ là giao tuyến của (SPQ) và mặt đáy).

- 1/ Tính khoảng cách từ điểm H đến (SAB)
- 2/ Tính khoảng cách từ điểm M **thuộc mặt đáy** của hình chóp đến (SAB)
- 3/ Tính khoảng cách từ điểm M **không thuộc mặt đáy** của hình chóp đến (SAB)
- 4/ Tính khoảng cách từ điểm M **thuộc mặt đáy** của hình chóp đến (SPQ)
- 5/ Tính khoảng cách từ điểm M **không thuộc mặt đáy** của hình chóp đến (SPQ)
- 6/ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và đường thẳng CD (với CD là đoạn thẳng nằm trong mặt đáy).

Cách giải:

1/Ta thực hiện các bước sau đây.

Bước 1: Dựng $HI \perp AB$ tại I

Bước 2: Dựng $HK \perp SI$ tại K

$\Rightarrow d(H, (SAB)) = HK$

*Chứng minh: $SH \perp (HAB)$

$\Rightarrow AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow AB \perp HK$

Ta có. $HK \perp AB$ và $HK \perp SI$ nên

$HK \perp (SAB)$. Do đó $d(H, (SAB)) = HK$

*Cách tính HK.

Tam giác SHI vuông tại H và $HK \perp SI$

nên. $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2}$. Ta tính SH và

HI từ đó tính được HK.

Điểm H là hình chiếu vuông góc của đỉnh hình chóp lên mặt đáy của hình chóp và sau đây gọi tắt là **điểm hình chiếu**. Việc xác định điểm hình chiếu và tính khoảng cách từ điểm hình chiếu đến một mặt phẳng đi qua đỉnh S là rất quan trọng và cần thiết vì các bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng hoặc khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau sẽ quy về bài toán tính khoảng cách từ điểm hình chiếu.

2/Ta thực hiện các bước sau đây.

Bước 1: Tính $d(H, (SAB))$

(Giải như câu 1 của bài toán)

Bước 2: Nối M với H. Khi đó.

* Nếu $MH \parallel AB \Rightarrow MH \parallel (SAB) \Rightarrow$

$d(M, (SAB)) = d(H, (SAB))$

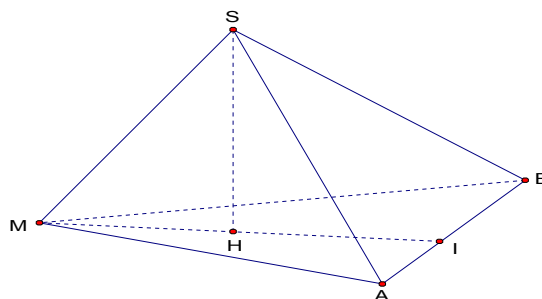
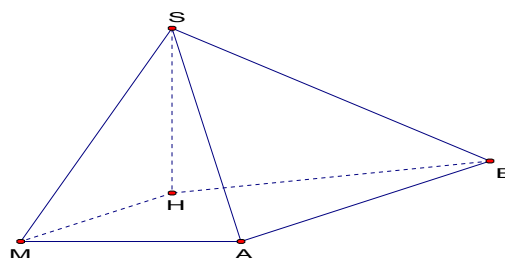
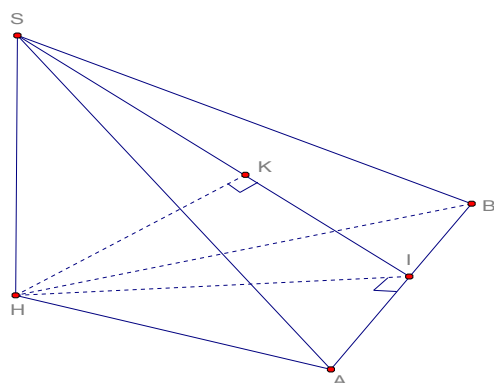
* Nếu MH không song song với AB.

Gọi I là giao điểm của MH với AB

Khi đó $\frac{d(M, (SAB))}{d(H, (SAB))} = \frac{MI}{HI}$. Ta tính tỉ

số $\frac{MI}{HI}$ và từ đó suy ra $d(M, (SAB))$

3/ Ta thực hiện các bước sau đây.



Bước 1: Tính $d(H, (SAB))$

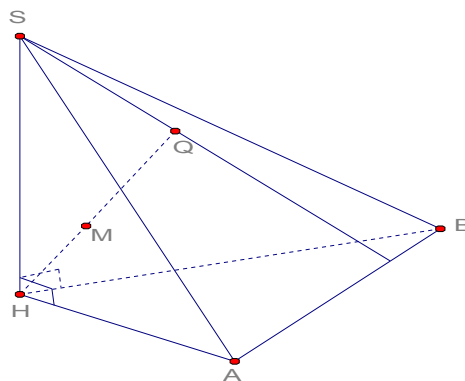
(Giải như câu 1 của bài toán)

Bước 2: Nối M với điểm hình chiếu H.

* Nếu $MH \parallel (SAB) \Rightarrow d(M, (SAB)) = d(H, (SAB))$

* Nếu MH không song song với (SAB). Đường thẳng MH cắt (SAB) tại Q. Khi

$$\text{đó } \frac{d(M, (SAB))}{d(H, (SAB))} = \frac{MQ}{HQ}$$



Tuy nhiên trong nhiều bài toán việc xác định giao điểm Q gặp khó khăn hoặc có khi xác định được giao điểm Q nhưng không tính được tỉ số $\frac{MQ}{HQ}$.

Trong trường hợp này ta sẽ tính $d(M, (SAB))$ thông qua $d(N, (SAB))$ với N là một điểm thuộc mặt đáy của hình chóp.

Bước 1: Tính $d(H, (SAB))$

(Giải như câu 1 của bài toán)

Bước 2: Tính khoảng cách từ điểm

N thuộc mặt đáy đến (SAB)

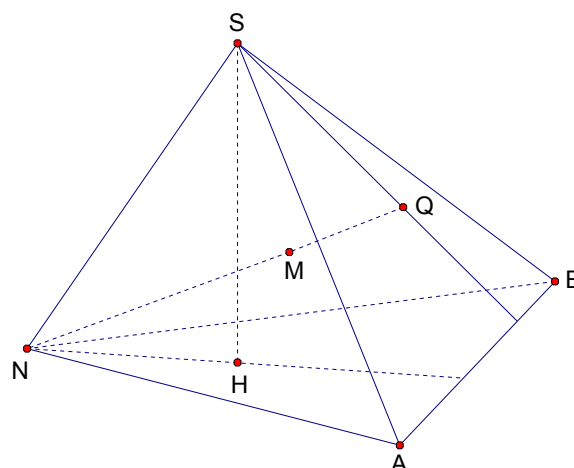
(Giải như câu 2 của bài toán)

Bước 3: Nối M với N.

* Nếu $MN \parallel (SAB) \Rightarrow d(M, (SAB)) = d(N, (SAB))$

* Nếu MN không song song với (SAB). Đường thẳng MN cắt (SAB) tại Q. Khi đó ta có

$$\frac{d(M, (SAB))}{d(N, (SAB))} = \frac{MQ}{NQ}$$



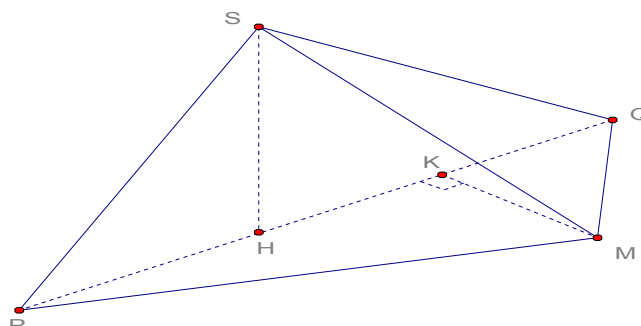
Lưu ý: Việc chọn điểm N ở bước 2 phải đảm bảo tính được $d(N, (SAB))$ và tính được tỉ số $\frac{MQ}{NQ}$

4/ Ta thực hiện như sau.

Từ M ta dựng $MK \perp PQ$ tại K

$\Rightarrow MK \perp (SPQ)$

$\Rightarrow d(M, (SPQ)) = MK$



5/ Ta thực hiện các bước sau đây.

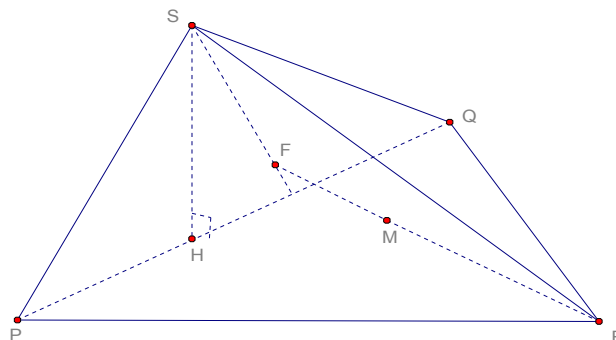
Bước 1: Chọn một điểm E thuộc mặt đáy của hình chóp rồi tính khoảng cách từ E đến (SPQ).

Bước 2: Nối điểm M với E, xảy ra các trường hợp sau.

* Nếu $ME \parallel (SPQ)$ thì.

$$d(M, (SPQ)) = d(E, (SPQ))$$

* Nếu ME không song song với (SPQ) , đường thẳng EM cắt (SPQ) tại F thì.



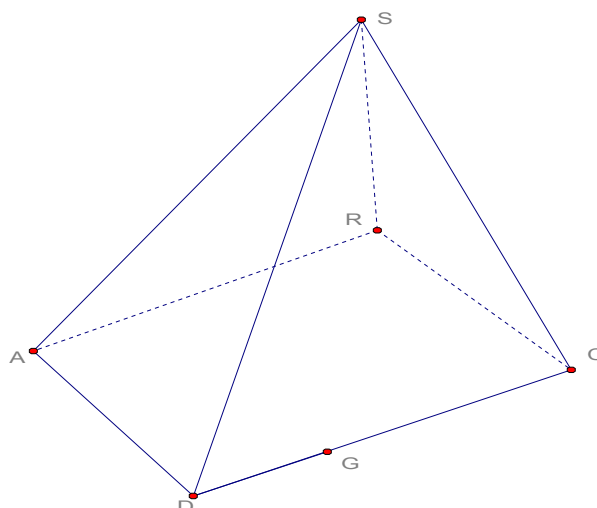
$\frac{d(M, (SPQ))}{d(E, (SPQ))} = \frac{FM}{FE}$. Tính tỉ số $\frac{FM}{FE}$ và từ đó suy ra khoảng từ điểm M đến mặt (SPQ) .

Lưu ý: Việc chọn điểm E ở bước 1 phải đảm bảo tính được $d(E, (SPQ))$ và tính được tỉ số $\frac{FM}{FE}$.

6/ Ta thực hiện các bước sau đây.

Bước 1: Gọi R là một điểm thuộc mặt đáy sao cho tứ giác ARCD là hình bình hành.

Bước 2: Nối S với R. Khi đó ta có. $CD \parallel AR$ nên $CD \parallel (SAR)$. Do đó $d(SA, CD) = d(CD, (SAR)) = d(G, (SAR))$ (Với G là một điểm bất kì nằm trên đường thẳng CD, ta chọn điểm G sao cho thuận lợi trong việc tính $d(G, (SAR))$). Lúc này bài toán quay về bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng (như các câu đã xét ở trên).



Lưu ý:

* Trong trường hợp tổng quát. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b. Ta thực hiện các bước sau đây.

Bước 1: Tìm $mp(P)$ chứa đường thẳng b và cắt đường thẳng a tại điểm A

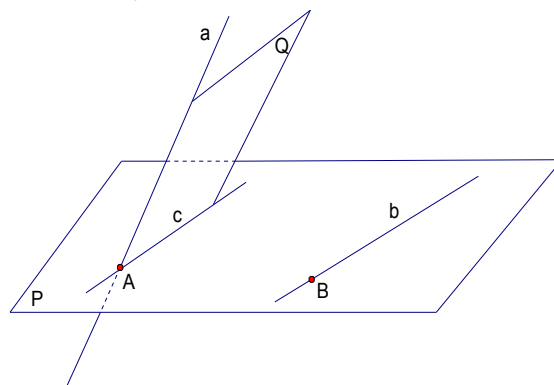
Bước 2: Qua A ta dựng đường thẳng c song song với đường thẳng b.

Bước 3: Dựng $mp(Q)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau a và c. Khi đó.

$$b \parallel (Q) \Rightarrow d(a, b) = d(b, (Q)) = d(B, (Q))$$

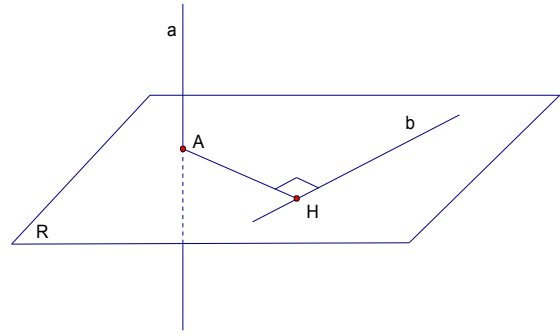
(Với B là một điểm bất kì nằm trên đường thẳng b, ta chọn điểm B sao cho thuận lợi trong việc tính $d(B, (Q))$)

* Nếu tìm được mặt phẳng (R) chứa đường thẳng b và vuông góc với đường thẳng a, và mặt phẳng (R) cắt đường thẳng a tại điểm A.



Khi đó để tính $d(a,b)$ thì ngoài cách làm như trên ta còn có thể làm như sau.

Từ điểm A ta kẻ $AH \perp b (H \in b)$
 $\Rightarrow d(a,b) = AH$. Tính đoạn AH để suy ra khoảng cách cần tìm.



Qua bài toán tổng quát trên ta thấy:

Khi giải một bài tập cụ thể về tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng thì điều quan trọng là xác định xem điểm đó thuộc hay không thuộc mặt đáy của hình chóp và sau đó chỉ việc giải theo thuật toán như trên.

Bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau sẽ quy về bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng thông qua một bước dựng hình.

b. Bài tập minh họa.

Bài 1. (Đề thi đại học khối B năm 2013). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) . [3]

Giải

* Tính thể tích của khối chóp $SABCD$

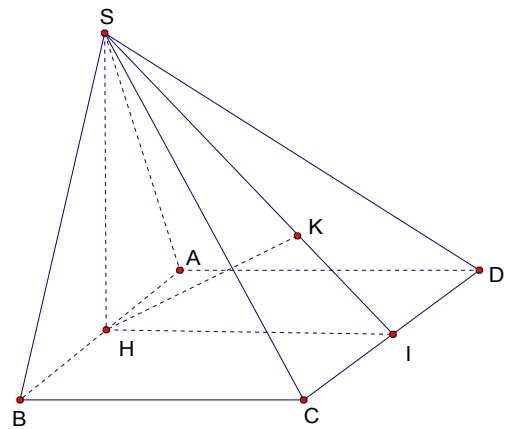
Gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên

Mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow H$ là trung điểm của AB.

Tam giác SAB là tam giác đều cạnh a nên

$$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

* Tính $d(A, (SCD))$



Phân tích đề bài: Điểm cần tính khoảng cách đến $mp(SCD)$ là điểm A thuộc mặt đáy của hình chóp. Điểm hình chiếu của đỉnh S ở đây là trung điểm H của AB vì vậy ta sẽ giải bài tập này theo các bước như câu 2 của bài toán tổng quát.

+ Tính $d(H, (SCD))$

Dựng $HI \perp CD$ tại I $\Rightarrow CD \perp (SHI)$

Dựng $HK \perp SI$ tại K $\Rightarrow HK \perp (SCD) \Rightarrow HK = d(H, (SCD))$

Tam giác SHI vuông tại H nên ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow d(H, (SCD)) = HK = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

+ Tính $d(A, (SCD))$

Vì $AH \parallel CD$ nên $AH \parallel (SCD)$

$$\text{Vậy } d(A, (SCD)) = d(H, (SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

Bài 2. (Đề thi đại học khối A và A1 năm 2014). Cho hình chóp $S.ABCD$ có

đáy là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên

$mp(ABCD)$ trùng với trung điểm của AB . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ A đến $mp(SBD)$. [3]

Giải

* Tính thể tích của khối chóp.

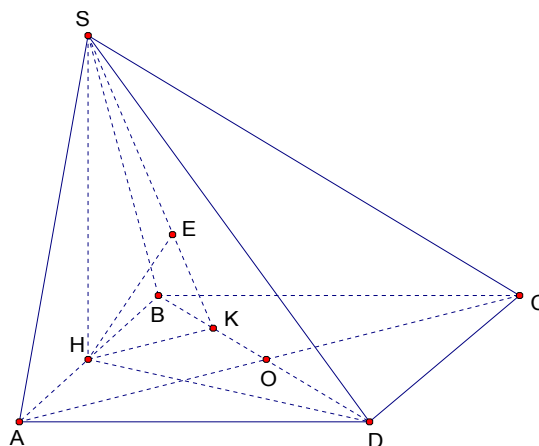
Gọi H là trung điểm của AB .

Ta có SH là đường cao của hình chóp $SABCD$.

$$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp DH$$

Áp dụng định lý Pitago cho $\triangle SHD$ vuông tại H .

$$\begin{aligned} SH &= \sqrt{SD^2 - DH^2} = \sqrt{SD^2 - (AH^2 + AD^2)} \\ &= \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} + a^2\right)} = a \end{aligned}$$



Thể tích hình chóp $SABCD$ là: $V = \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} a^2 \cdot a = \frac{a^3}{3}$

* Tính khoảng cách từ A đến (SBD)

Phân tích đề bài: Điểm cần tính khoảng đến $mp(SBD)$ là điểm A thuộc mặt đáy, điểm hình chiếu của đỉnh S ở đây là trung điểm H của AB .

+ Tính $d(H, (SBD))$

Gọi O là giao điểm của AC và BD

Dựng $HK \perp BD$ tại $K \Rightarrow HK \parallel AC \Rightarrow BD \perp (SHK)$

Dựng $HE \perp SK$ tại $E \Rightarrow HE \perp (SBD) \Rightarrow HE = d(H, (SBD))$

$$HK \parallel AC \Rightarrow HK = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{4} AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SHK ta có

$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HE = \frac{a}{3}. \text{ Do đó: } d(H, (SBD)) = \frac{a}{3}$$

+ Tính $d(A, (SBD))$

AH cắt (SBD) ở B do đó

$$\frac{d(A, (SBD))}{d(H, (SBD))} = \frac{AB}{HB} = 2 \text{ (Vì } H \text{ là trung điểm của } AB)$$

$$\text{Vậy } d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD)) = \frac{2a}{3}$$

Bài 3. (Đề thi Đại học khối D-2007). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $BA = CB = a$, $AD = 2a$. Cạnh SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD khoảng cách từ điểm H đến mp(SCD) theo a. [3]

Giải

* Tính thể tích của khối chóp S.ABCD

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (a + 2a) a \cdot a \sqrt{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$$

* Tính khoảng cách từ điểm H đến mp(SCD).

Phân tích đề bài: Điểm cần tính khoảng đến mp(SCD) là điểm H không thuộc mặt đáy của hình chóp. Điểm hình chiếu của đỉnh S ở đây là điểm A, vì vậy ta sẽ giải bài tập này theo các bước như câu 3 của bài toán tổng quát.

Ta tính $d(H, (SCD))$ thông qua $d(B, (SCD))$ (điểm B thuộc mặt đáy)

+ Tính $d(A, (SCD))$

Gọi I là trung điểm của AD ta có

$CI = AD \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C hay $AC \perp CD \Rightarrow (SAC) \perp (SCD)$.

Dựng $AK \perp SC$ tại K $\Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AK$

Ta có: $AC = AB + BC = 2a$

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AK = a \Rightarrow d(A, (SCD)) = a$$

+ Tính $d(B, (SCD))$

AB cắt CD tại F $\Rightarrow B$ là trung điểm của AF

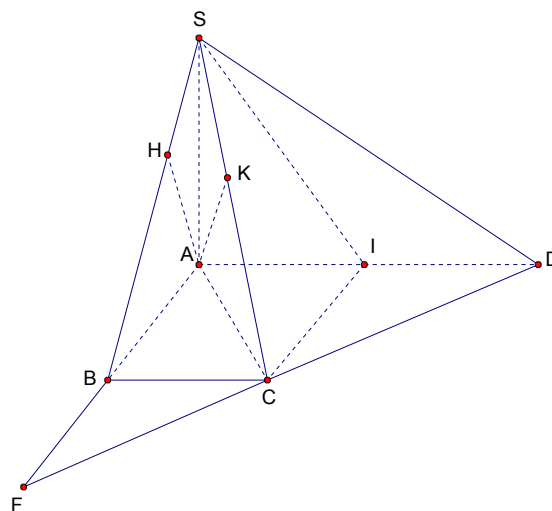
$$\frac{d(B, (SCD))}{d(A, (SCD))} = \frac{BF}{AF} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = \frac{a}{2}$$

+ Tính $d(H, (SCD))$

HB cắt (SCD) tại S do đó.

$$\frac{d(H, (SCD))}{d(B, (SCD))} = \frac{SH}{SB} = \frac{SH \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(H, (SCD)) = \frac{2}{3} d(B, (SCD)) = \frac{a}{3}$$

$$\text{Vậy } d(H, (SCD)) = \frac{a}{3}$$



Bài 4. (Đề thi học kì 2- khối 11 Trường THPT Triệu Sơn 6 – năm 2016)

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh A, $AB = a$. Gọi I là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc H của S lên (ABC) thỏa mãn

$\vec{IA} = -2\vec{IH}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và SB.

a/Tính theo a khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAH).

b/Tính theo a khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (SAH).

Giải

a/ **Phân tích đề bài:** Mặt phẳng (SAH) đi qua điểm hình chiếu H, Điểm cần tính khoảng đến mp(SAH) là điểm M thuộc mặt đáy của hình chóp. Vì vậy ta sẽ giải bài tập này theo các bước như câu 4 của bài toán tổng quát.

Dựng $MK \perp AH$ tại K. Vì $SH \perp$

MK nên $MK \perp (SAH) \Rightarrow$

$$d(M, (SAH)) = MK$$

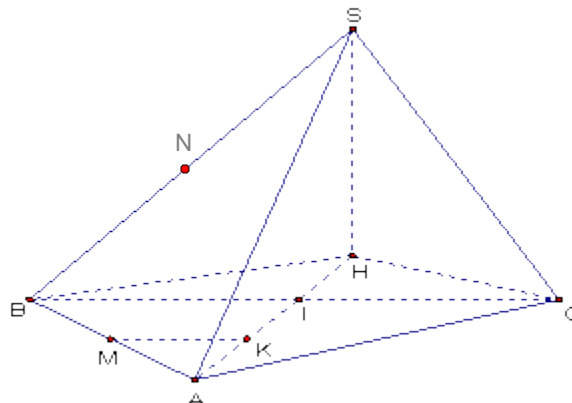
ΔABC vuông cân tại A nên $AI \perp$

BC. Do đó $MK \parallel BI$ và $MK = \frac{1}{2} BI$

$$BC = AB + AC = 4a \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow$$

$$BI = a$$

$$\text{Vậy } d(M, (SAH)) = MK = \frac{1}{2} BI = \frac{a}{2}$$



b/ **Phân tích đề bài:** Mặt phẳng (SAH) đi qua điểm hình chiếu H, Điểm cần tính khoảng đến mp(SAH) là điểm N không thuộc mặt đáy của hình chóp. Vì vậy ta sẽ giải bài tập này theo các bước như câu 5 của bài toán tổng quát. Ta sẽ tính $d(N, (SAH))$ thông qua khoảng cách từ một điểm thuộc mặt đáy (ta chọn điểm B) đến (SAH).

+ Tính $d(B, (SAH))$

$$BC = AB + AC = 4a \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow BI = a$$

$$BI \perp AH \Rightarrow BI \perp (SAH) \text{ do đó } d(B, (SAH)) = BI = a$$

$$+ \text{ Tính } d(N, (SAH)) : \text{ Ta có NB cắt (SAH) tại S } \Rightarrow \frac{d(N, (SAH))}{d(N, (SAH))} = \frac{NS}{BS} = \frac{1}{2} \text{ (Vì N là}$$

$$\text{trung điểm của SB)} \Rightarrow d(N, (SAH)) = \frac{1}{2} d(B, (SAH)) = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy } d(N, (SAH)) = \frac{a}{2}$$

Bài 5. (Đề thi THPT quốc gia năm 2015). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ACBD) bằng 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC. [4]

Giải

* Tính thể tích của khối chóp S.ABCD

Do $\angle SCA = 45^\circ$ nên tam giác

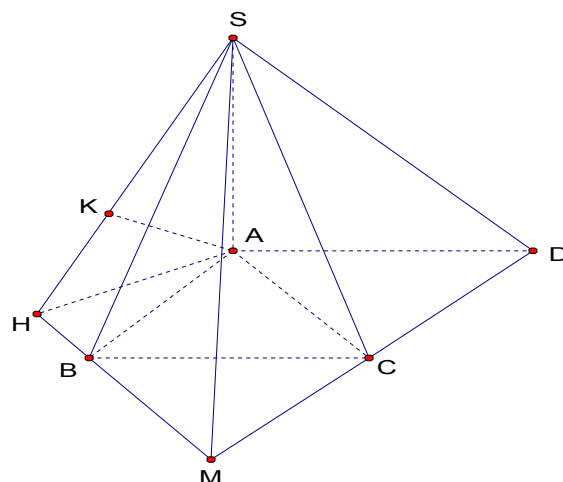
SAC vuông cân tại A nên

$$AS = AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Do đó : } V = \frac{1}{3} a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

* Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC.

Phân tích đề bài: Đây là bài tập tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (AC là đoạn thẳng nằm trong mặt phẳng đáy), vì vậy ta sẽ giải



bài tập này theo các bước như câu 6 của bài toán tổng quát.

+ Gọi M là một điểm thuộc (ABCD) sao cho ABMC là hình bình hành.

Vì AC // BM nên AC // (SBM)

suy ra $d(AC, SB) = d(A, (SBM))$

+ Tính $d(A, (SBM))$

Dựng AH vuông góc với BM tại H, Dựng AK vuông góc SH tại K

Suy ra, AK vuông góc (SBM) $\Rightarrow d(A, (SBM)) = AK$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{2a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Vậy } d(AC, SB) = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Bài 6: (Đề thi đại học khối D năm 2014): Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC. [3]

Giải

* Tính thể tích của khối chóp

S.ABC

Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow SH \perp$

BC $\Rightarrow SH \perp mp(ABC)$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

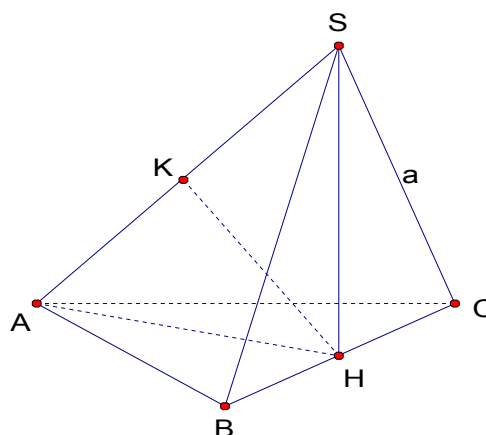
* Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Phân tích đề bài: Trong trường hợp này có một mặt phẳng chứa SA và vuông góc với BC đó là (SHA). Do đó ta có thể giải như sau.

Ta có $(SHA) \perp BC$, $SA \subset (SHA)$

Kẻ HK $\perp SA$ tại K

$HK \subset (SHA) \Rightarrow HK \perp BC$



$\Rightarrow$ HK là khoảng cách giữa SA và BC Δ SHA vuông góc tại H nên:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $d(SA, BC) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Bài 7. (Đề thi đại học khối B năm 2014). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$. [3]

Giải

Gọi H trung điểm AB thì $A'H \perp (ABC)$

* Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên (ABC) là HC .

Vậy góc giữa $A'C$ và (ABC)

là $\angle A'CH = 60^\circ$

ΔABC là tam giác đều cạnh a nên

$$HC = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Delta A'HC \text{ vuông} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{A'H}{HC} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A'H = \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$V_{LT} = A'H \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$$

* Tính $d(B, (ACC'A'))$.

Phân tích đề bài: Đây là bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Điểm cần tính khoảng đến $mp(ACC'A')$ (cũng là $mp(A'AC)$) là điểm B thuộc mặt đáy của lăng trụ. Vì vậy ta có thể nhìn nhận bài toán này như bài toán tính khoảng cách từ điểm B thuộc mặt đáy đến mặt phẳng $(A'AC)$ đối với hình chóp $A'ACB$ đỉnh là A' , Điểm hình chiếu của đỉnh A' là H . Do đó ta sẽ giải bài toán này như sau.

+ Tính $d(H, (A'AC))$

Dựng $HI \perp AC$ tại I , Dựng $HK \perp A'I$ tại K

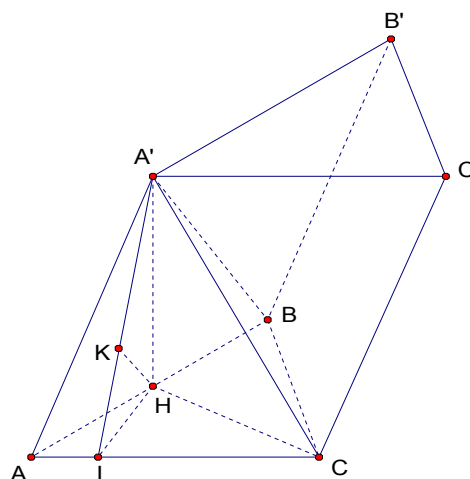
Do $AC \perp (A'IH) \Rightarrow AC \perp HK \Rightarrow HK \perp (A'AC)$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $A'HI$ ta có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow d(H, (A'AC)) = HK = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$$

+ Tính $d(B, (A'AC))$



BH cắt $(A'AC)$ ở A do đó $\frac{d(B, (A'AC))}{d(H, (A'AC))} = \frac{BA}{HA} = 2$ (Vì H là trung điểm của AB)

$$\text{Vậy } d(B, (A'AC)) = 2d(H, (A'AC)) = \frac{3a}{\sqrt{13}}$$

c. Bài tập tương tự.

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, $AB=AD=a$, $CD=2a$, $SA=a$, hai mp (SCD) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm G đến mp(SBC) theo a.

Bài 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB=2a$, $BC=a$, $\angle ABC = 30^\circ$ và thể tích lăng trụ bằng a. Tính khoảng cách từ điểm A đến mp($A'BC$) theo a.

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, tam giác SAB đều và nằm trên mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp S.ABCD biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB bằng a.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a$, $AD=2a$, các mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết góc tạo bởi (SAB) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD theo a.

Bài 5. (Đề thi đại học khối A năm 2012). Cho hình chóp S.ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là H nằm trên AB sao cho $AH=2HB$. Góc giữa SC và (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có $SA=a$ và SA vuông góc với mặt đáy. Biết ABCD là thang vuông tại A và B, $AB=a$, $BC=2a$ và SC vuông góc với BD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM theo a với M là trung điểm của BC.

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm.

Để thấy rõ vai trò, ý nghĩa và sự tác động khác nhau lên quá trình lĩnh hội kiến thức, sự phát triển năng lực tư duy sáng tạo, hình thành kỹ năng của học sinh khi giáo viên không sử dụng và sử dụng đề tài, tôi đã tiến hành kiểm nghiệm như sau:

Tôi tiến hành kiểm tra 1 tiết (thời gian 45 phút) cho 2 lớp 11C1 và 11A1 (Lớp 11C1 năm học 2015-2016 và lớp 11A1 năm học 2016-2017).

Đề bài:

Câu 1.(5đ). Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, cạnh huyền bằng $3a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, SG vuông góc mp(ABC), $SB = \dots$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mp(SAC) theo a.

Câu 2.(5đ). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB=BC=a$, cạnh bên $A'A=a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và AM theo a.

Tôi so sánh kết quả thực nghiệm của lớp 11A1 năm học 2016 – 2017 với kết quả của lớp 11C1 năm học 2015 – 2016 khi chưa áp dụng đề tài với cùng một bài kiểm tra. Đây là hai lớp ban KHTN có khả năng tiếp thu tương đương nhau. Kết quả: Các em lớp 11A1 đạt kết quả tốt hơn nhiều so với các em học sinh lớp 11C1. Cụ thể:

Điểm \ Lớp	0	1-2	3	4	5	6	7	8	9	10
11C1 Số:36	4 11%	6 17%	8 22%	8 22%	6 17%	4 11%				
11A1 Số:34			2 6%	3 9%	4 12%	6 18%	7 20%	5 14%	4 12%	3 9%

Từ kết quả kiểm tra tại lớp, phần làm bài của học sinh khi học bồi dưỡng ôn thi đại học, tôi nhận thấy việc đưa đề tài vào giảng dạy là thiết thực, phát huy hiệu quả cao. Từ đó nâng cao chất lượng thi học sinh giỏi, thi đại học và cao đẳng.

3. Kết luận và đề xuất.

3.1. Kết luận.

Chuyên đề đã rút ra được một phương pháp tính khoảng cách trong hình học không gian.

Với mục đích nâng cao năng lực tư duy, tính sáng tạo trong giải toán của học sinh THPT. Hy vọng với kết quả nhỏ này sẽ bổ sung được phần nào kiến thức cơ bản cho học sinh, giúp các em nhận thức đầy đủ và rèn luyện tốt kỹ năng giải các bài toán khoảng cách trong hình học không gian.

Với kinh nghiệm nghề nghiệp chưa nhiều, song với tinh thần cầu tiến, học hỏi nên tôi đã cố gắng trình bày bài viết của mình với tất cả những gì có thể, chắc chuyên đề còn nhiều thiếu sót nên tôi rất mong được sự góp ý của các đồng nghiệp để chuyên đề này có thể hoàn thiện hơn. Tôi xin chân thành cảm ơn!

Trên đây là ***“bài toán tổng quát tính khoảng cách trong hình học không gian”***. Sau khi thực hiện đề tài này, tôi thấy có một số vấn đề cần rút ra như sau.

Thứ nhất là qua cách định hướng các em tự hệ thống hoá được các phương pháp để giải quyết cho cùng một bài tập, đồng thời các em nhận xét, áp dụng cách giải thích hợp cho từng kiểu bài toán.

Thứ hai là nâng cao tính sáng tạo trong học tập, bước đầu giúp các em có phong cách nghiên cứu khoa học. Đặc biệt biết áp dụng vào giải các bài toán khác.

3.2. Ý kiến đề xuất.

Mặc dù sách giáo khoa đề cập đến dạng toán này khá sơ sài nhưng trong các đề thi tuyển sinh vào đại học hay thi THPT quốc gia thì bài toán dạng này thuộc loại bài toán khó. Nhằm giúp cho học sinh có kỹ năng giải toán tính khoảng cách trong không gian, có kiến thức vững vàng và đạt kết quả cao trong các kì thi. Giáo viên nên mạnh dạn giới thiệu đề tài này cho học sinh từ khi các em chuẩn bị vào lớp 12. Rất mong các thầy cô giáo quan tâm, dựa vào trình độ của khối lớp để có thể đưa ra các dạng bài tập từ cấp độ thấp đến cấp độ cao mang tính vừa sức, giúp cho các em quen dần với phương pháp này, góp phần nâng cao chất lượng dạy và học.

+ Đề nghị các cấp lãnh đạo tạo điều kiện giúp đỡ học sinh và giáo viên có nhiều hơn nữa tài liệu sách tham khảo đổi mới và phòng thư viện để nghiên cứu học tập nâng cao kiến thức chuyên môn nghiệp vụ .

+ Nhà trường cần tổ chức các bồi trao đổi phương pháp giảng dạy. Có tủ sách lưu lại các tài liệu chuyên đề bồi dưỡng ôn tập của giáo viên hàng năm để làm cơ sở nghiên cứu phát triển chuyên đề.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	Thanh Hoá, ngày 15 tháng 4 năm 2017 Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. Người viết Nguyễn Tăng Thi
--------------------------------	---

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa hình học 11 chương trình cơ bản, nhóm tác giả (Trần Văn Hạo, Nguyễn Mộng Hy, Khu Quốc Anh, Nguyễn Hà Thanh, Phan Văn Viện), nhà xuất bản giáo dục, xuất bản năm 2007.
2. Sách giáo khoa Toán 9, nhóm tác giả (Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, Nguyễn Hữu Thảo), nhà xuất bản giáo dục, xuất bản năm 2011.
3. Đề thi đại học các năm gần đây trên mạng internet.
4. Đề thi THPT quốc gia trên mạng internet.

DANH MỤC

**SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM ĐÃ ĐƯỢC HỘI ĐỒNG SÁNG KIẾN KINH
NGHIỆM NGÀNH GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN, TỈNH VÀ CÁC
CẤP CAO HƠN XẾP LOẠI TỪ C TRỞ LÊN**

Họ và tên tác giả: Nguyễn Tăng Thi

Chức vụ và đơn vị công tác: Giáo viên trường THPT Triệu Sơn 6

TT	Tên đề tài SKKN	Cấp đánh giá xếp loại (Ngành GD cấp huyện/tỉnh; Tỉnh...)	Kết quả đánh giá xếp loại (A, B, hoặc C)	Năm học đánh giá xếp loại
1.	Hướng dẫn học sinh định hướng phương pháp giải bài toán tìm GTLN, GTNN của một biểu thức nhiều biến	Sở GD&ĐT Thanh Hóa	C	2014-2015
