**ĐỀ 78**

**HSG TOÁN 9 SÓC TRĂNG 2023-2024**

**Bài 1. (4,0 điểm)** Cho biểu thức P = $\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$:$\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-1$

**a)** Rút gọn biểu thức P .

**b)** Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P $-\sqrt{x}$ nhận giá trị nguyên

**Bài 2. (4,0 điểm)**

**a)** Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $\frac{1}{3}$ $+\frac{1}{6}$ $+\frac{1}{10}$ $+\frac{1}{15}+...+$ $\frac{2}{n^{2}+3n+2}$ = $\frac{2023}{2025}$

**b)** Giá bán lẻ điện sinh hoạt được tập đoàn điện lực Việt Nam chia theo thang giá 6 bậc như sau:

Bậc 1: Cho kWh từ 0 đến 50 .

Bậc 2: Cho kWh từ 51 đến 100, giá mỗi kWh cao hơn bậc 1 là 56 đồng.

Bậc 3: Cho kWh từ 101 đến 200 , giá mỗi kWh cao hơn bậc 2 là 280 đồng.

Bậc 4: Cho kWh từ 201 đến 300 , giá mỗi kWh cao hơn bậc 3 là 522 đồng.

Bậc 5: Cho kWh từ 301 đến 400 , giá mỗi kWh cao hơn bậc 4 là 298 đồng.

Bậc 6: Cho kWh từ 401 trở lên, giá mỗi kWh cao hơn bậc 5 là 93 đồng.

Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng trên tổng số tiền điện sử dụng hàng tháng.

Tháng 01 năm 2022, nhà bác Nam sử dụng hết 375 kWh và phải trả 921 965 đồng.

Hãy tính giá bán mỗi kWh điện ở từng bậc.

**Bài 3. (4,0 điểm)**

**a)** Tìm tất cả các cặp số nguyên x; y thỏa mãn: $x^{2}-2022xy+2021y^{2}=2021$

**b)** Chứng minh rằng nếu số tự nhiên a không chia hết cho 5 thì $a^{8}+3a^{4}-4$ chia hết cho 100

**Bài 4. (4,0 điểm)** Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH và trung tuyến AM . Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các cạnh AB AC.

**a)** Chứng minh HB.HC = HJ.IB + HI.JC

**b)** Biết rằng trung tuyến AM dài hơn đường cao AH là 2 cm và chu vi tam giác ABC bằng 24 dm. Hãy tính diện tích tam giác ABC .

**Bài 5. (4,0 điểm)** Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ABC là tam giác nhọn. Các đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H .

**a)** Chứng minh rằng DE có độ dài không đổi.

**b)** Gọi M là điểm đối xứng với B qua AH , N là điểm đối xứng với C qua AH. Gọi I là giao điểm của MH và AB , K là giao điểm của NH và AC . Tìm vị trí của điểm A để độ dài IK nhỏ nhất.

**---Hết---**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Bài 1. (4,0 điểm)** Cho biểu thức P = $\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$:$\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-1$

**a)** Rút gọn biểu thức P .

**b)** Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P $-\sqrt{x}$ nhận giá trị nguyên

**Lời giải**

**a)** Rút gọn biểu thức P .

Điều kiện để P có nghĩa là $x\geq 0 và x\ne 1$

P = $\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$:$\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-1$

= $\left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1}\right)$:$\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right)-1$ = $\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} $: $\frac{x-2\sqrt{x}+1}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}$ $-1$

= $\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} $: $\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^{2}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}$ $-1$

= $\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} $. $\frac{(x+1)(\sqrt{x}-1)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^{2}}$ $-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

= $\frac{(x+\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}$ = $\frac{x+2}{\sqrt{x}-1}$

**b)** Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P $-\sqrt{x}$ nhận giá trị nguyên

P $-\sqrt{x}$ = $\frac{x+2}{\sqrt{x}-1}$ $-\sqrt{x}$ = $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ = 1 + $\frac{3}{\sqrt{x}-1}$

Ta thấy với $\sqrt{x}$ là số vô tỉ thì $\sqrt{x}-1$ là số vô tỉ suy ra P $-\sqrt{x}$ là số vô tỉ (loại)

Với $\sqrt{x}$ là số nguyên thì $\sqrt{x}-1$ là số nguyên. Khi đó P $-\sqrt{x}$ nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x}-1$ là ước của 3 hay $\sqrt{x}-1$ = $\pm $ 1 hoặc $\sqrt{x}-1$ = $\pm $ 3

Suy ra $x$ = 0 hoặc $x$ = 4 hoặc $x$ = 16

**Bài 2. (4,0 điểm)**

**a)** Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $\frac{1}{3}$ $+\frac{1}{6}$ $+\frac{1}{10}$ $+\frac{1}{15}+...+$ $\frac{2}{n^{2}+3n+2}$ = $\frac{2023}{2025}$

**b)** Giá bán lẻ điện sinh hoạt được tập đoàn điện lực Việt Nam chia theo thang giá 6 bậc như sau:

Bậc 1: Cho kWh từ 0 đến 50 .

Bậc 2: Cho kWh từ 51 đến 100, giá mỗi kWh cao hơn bậc 1 là 56 đồng.

Bậc 3: Cho kWh từ 101 đến 200 , giá mỗi kWh cao hơn bậc 2 là 280 đồng.

Bậc 4: Cho kWh từ 201 đến 300 , giá mỗi kWh cao hơn bậc 3 là 522 đồng.

Bậc 5: Cho kWh từ 301 đến 400 , giá mỗi kWh cao hơn bậc 4 là 298 đồng.

Bậc 6: Cho kWh từ 401 trở lên, giá mỗi kWh cao hơn bậc 5 là 93 đồng.

Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng trên tổng số tiền điện sử dụng hàng tháng.

Tháng 01 năm 2022, nhà bác Nam sử dụng hết 375 kWh và phải trả 921 965 đồng.

Hãy tính giá bán mỗi kWh điện ở từng bậc.

**Lời giải**

**a)** Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $\frac{1}{3}$ $+\frac{1}{6}$ $+\frac{1}{10}$ $+\frac{1}{15}+...+$ $\frac{2}{n^{2}+3n+2}$ = $\frac{2023}{2025}$

**Giải**

Ta có $n^{2}+3n+2$= $\left(n+1\right)\left(n+2\right)$

$\frac{1}{n^{2}+3n+2}$ = $\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$ = $\frac{1}{n+1}$ $-\frac{1}{n+2}$

$\frac{1}{3}$ $+\frac{1}{6}$ $+\frac{1}{10}$ $+\frac{1}{15}+...+$ $\frac{2}{n^{2}+3n+2}$ = $\frac{2}{6}$ $+\frac{2}{12}$ $+\frac{2}{20}+\frac{2}{30}+...+$ $\frac{2}{n^{2}+3n+2}$

= 2$\left(\frac{1}{2.3} +\frac{1}{3.4} +\frac{1}{4.5} +\frac{1}{5.6}+...+ \frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\right)$

= 2$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3} +\frac{1}{3}-\frac{1}{4} +\frac{1}{4}-\frac{1}{5} +\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...+ \frac{1}{n+1} -\frac{1}{n+2}\right)$

= 2$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$ = $\frac{n}{n+2}$

Khi đó $\frac{n}{n+2}$ = $\frac{2023}{2025}$ $⇒n=2023$

**b)** Giá bán lẻ điện sinh hoạt được tập đoàn điện lực Việt Nam chia theo thang giá 6 bậc như sau:

Bậc 1: Cho kWh từ 0 đến 50 .

Bậc 2: Cho kWh từ 51 đến 100, giá mỗi kWh cao hơn bậc 1 là 56 đồng.

Bậc 3: Cho kWh từ 101 đến 200 , giá mỗi kWh cao hơn bậc 2 là 280 đồng.

Bậc 4: Cho kWh từ 201 đến 300 , giá mỗi kWh cao hơn bậc 3 là 522 đồng.

Bậc 5: Cho kWh từ 301 đến 400 , giá mỗi kWh cao hơn bậc 4 là 298 đồng.

Bậc 6: Cho kWh từ 401 trở lên, giá mỗi kWh cao hơn bậc 5 là 93 đồng.

Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng trên tổng số tiền điện sử dụng hàng tháng.

Tháng 01 năm 2022, nhà bác Nam sử dụng hết 375 kWh và phải trả 921 965 đồng.

Hãy tính giá bán mỗi kWh điện ở từng bậc.

**Giải**

Gọi x (đồng) là giá bán mỗi kWh điện ở bậc 1 (x > 0). Khi đó:

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 2 là: x + 56

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 3 là: x + 56 + 280 = x + 336

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 4 là: x + 336 + 522 = x + 858

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 5 là: x + 858 + 298 = x + 1156

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 6 là: x + 1156 + 93 = x + 1249

Số tiền điện nhà Bác Nam phải trả tháng 1 năm 2022 nếu không tính thuế giá trị gia tăng theo thang bậc là:

T = $50x+50(x+56)+100(x+336)+100(x+858)+75(x+1156)$

$=375x+208900$

Mặt khác: $\left(100\%+10\%\right)T=921965⇒T=838150$ (đồng)

Ta có phương trình $375x+208900=838150$ $⇒$ $x=1678$

Vậy:

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 1 là: 1678đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 2 là: 1734đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 3 là: 2014 đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 4 là: 2536 đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 5 là: 2834 đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 6 là: 2927 đồng

**Bài 3. (4,0 điểm)**

**a)** Tìm tất cả các cặp số nguyên x; y thỏa mãn: $x^{2}-2022xy+2021y^{2}=2021$

**b)** Chứng minh rằng nếu số tự nhiên a không chia hết cho 5 thì $a^{8}+3a^{4}-4$ chia hết cho 100

**Lời giải**

**a)** Tìm tất cả các cặp số nguyên x; y thỏa mãn: $x^{2}-2022xy+2021y^{2}=2021$

Ta có:$x^{2}-2022xy+2021y^{2}=2021$

$⇔$ $x^{2}-2022xy+1022121y^{2}-1022121y^{2}=2021$

$⇔$ $\left(x-1011y\right)^{2}-\left(1010y\right)^{2}=2021$

$⇔$ $\left(x-y\right)\left(x-2021y\right)=2021$

Do x nguyên, y nguyên nên $x-y$ nguyên và $x-2021y$ nguyên

Mà 2021 = $1.2021=43.47=(-1).(-2021)=(-43).(-47)$

Do đó có các khả năng sau:

+) $\left\{\begin{array}{c}x-y=1\\x-2021y=2021\end{array}\right.$ $⇔ \left\{\begin{array}{c}x=0\\y=-1\end{array}\right.$

+) $\left\{\begin{array}{c}x-y=2021\\x-2021y=1\end{array}\right.$ $⇔ \left\{\begin{array}{c}x=2022\\y=1\end{array}\right.$

+) $\left\{\begin{array}{c}x-y=-1\\x-2021y=-2021\end{array}\right.$ $⇔ \left\{\begin{array}{c}x=0\\y=1\end{array}\right.$

+) $\left\{\begin{array}{c}x-y=-2021\\x-2021y=-1\end{array}\right.$ $⇔ \left\{\begin{array}{c}x=-2022\\y=-1\end{array}\right.$

+) $\left\{\begin{array}{c}x-y=43\\x-2021y=47\end{array}\right.$ $⇔ \left\{\begin{array}{c}x=\frac{21714}{505}\\y=\frac{-1}{505}\end{array}\right.$ (loại)

+) $\left\{\begin{array}{c}x-y=47\\x-2021y=43\end{array}\right.$ $⇔ \left\{\begin{array}{c}x=\frac{23736}{505}\\y=\frac{1}{505}\end{array}\right.$ (loại)

+) $\left\{\begin{array}{c}x-y=-43\\x-2021y=-47\end{array}\right.$ $⇔ \left\{\begin{array}{c}x=\frac{-21714}{505}\\y=\frac{1}{505}\end{array}\right.$ (loại)

+) $\left\{\begin{array}{c}x-y=43\\x-2021y=47\end{array}\right.$ $⇔ \left\{\begin{array}{c}x=\frac{-21714}{505}\\y=\frac{-1}{505}\end{array}\right.$ (loại)

Vậy các cạ số nguyên cần tìm là: (0; $-1$); (0;1); (2022;1); ($-2022$;1)

**b)** Chứng minh rằng nếu số tự nhiên a không chia hết cho 5 thì $a^{8}+3a^{4}-4$ chia hết cho 100

Ta có: M = $a^{8}+3a^{4}-4$ = $a^{8}+4a^{4}-a^{4}-4=\left(a^{4}-1\right)\left(a^{4}+4\right)$

* Nếu a là số lẻ thì $\left(a^{2}-1\right)\vdots 2$ và $\left(a^{2}+1\right)\vdots 2$ nên M $\vdots 4$

Suy ra M $\vdots 4$ với mọi a

* Vì a không chia hết cho nên a $=5k\pm 1$ hoặc a $=5k\pm 2$, với k là số tự nhiên khác 0.

+) Với a $=5k\pm 1$ thì $\left(a^{2}-1\right)\vdots 5$ và $\left(a^{4}+1\right)\vdots 5$ nên M$ \vdots 25$

+) Với a $=5k\pm 2$ thì $\left(a^{2}+1\right)\vdots 5$ và $\left(a^{4}+1\right)\vdots 5$ nên M$ \vdots 25$

Suy ra M$ \vdots 25$ với mọi số tự nhiên a không chia hết cho 5

Mà BCNN(25,4) = 100. Do đó M chia hết cho 100

**Bài 4. (4,0 điểm)** Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH và trung tuyến AM . Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các cạnh AB AC.

**a)** Chứng minh HB.HC = HJ.IB + HI.JC

**b)** Biết rằng trung tuyến AM dài hơn đường cao AH là 2 cm và chu vi tam giác ABC bằng 24 dm. Hãy tính diện tích tam giác ABC.

**Lời giải**

****

**a)** Chứng minh HB.HC = HJ.IB + HI.JC

Ta có tứ giác AIHJ là hình chữ nhật, suy ra

$IA=HJ; JA=HI$

$AH^{2}=IJ^{2}=HI^{2}+HJ^{2}$

Mặt khác $HB.HC=AH^{2}=HI^{2}+HJ^{2} $

$HB.HC=IA.IB+JA.JC$

$HB.HC=HJ.JB+HI.JC$ (đpcm)

 **b)** Biết rằng trung tuyến AM dài hơn đường cao AH là 2 cm và chu vi tam giác ABC bằng 24 dm. Hãy tính diện tích tam giác ABC.

Gọi AM = x (cm), x > 2 suy ra BC = 2AM = 2x

Ta có: $AB^{2}+AC^{2}=BC^{2}=4x^{2}$ (1)

AH = AM $-2=x-2⇒AB.AC=AH.BC=2x^{2}-4x$

$AB+AC+BC=240⇒AB+AC=240-BC$

$⇒$ $\left(AB+AC\right)^{2}=\left(240-BC\right)^{2}$

$⇒$ $AB^{2}+AC^{2}+2AB.AC=57600-480BC+BC^{2}$

$⇒$ $AB^{2}+AC^{2}+2(2x^{2}-4x)=57600-480.2x+4x^{2}$

$⇒$ $AB^{2}+AC^{2}=-952x+57600$ (2)

Từ (1) và (2) ta có phương trình $4x^{2}=-952x+57600$

$$⇔4x^{2}+952x-57600=0$$

$$⇔\left[\begin{array}{c}x=50 (tm)\\x=-288(l)\end{array}\right.$$

Suy ra BC = 100, AH = 48

Vậy diện tích tam giác ABC là S = $\frac{1}{2}$.AH.BC = $\frac{1}{2}$.48.100 = 2400 ($cm^{2})$

**Bài 5. (4,0 điểm)** Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ABC là tam giác nhọn. Các đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H .

**a)** Chứng minh rằng DE có độ dài không đổi.

**b)** Gọi M là điểm đối xứng với B qua AH , N là điểm đối xứng với C qua AH. Gọi I là giao điểm của MH và AB , K là giao điểm của NH và AC . Tìm vị trí của điểm A để độ dài IK nhỏ nhất.

**Lời giải**

****

 **a)** Chứng minh rằng DE có độ dài không đổi.

Ta có $\hat{BEC}=$ $\hat{BDC}$ = 90⁰, suy ra tứ giác BEDC là tứ giác nội tiếp

$⇒$ $\hat{BCE}=$ $\hat{BDE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BE)

Mặt khác $\left\{\begin{array}{c}\hat{ADE}+ \hat{BDE} = 90⁰\\\hat{ABC}+ \hat{BCE} = 90⁰\\\hat{BDE}= \hat{BCE} \end{array}\right.$ $⇒$ $\hat{ABC}=$ $\hat{ADE}$ Suy ra $△$ADE $\~$ $△$ABC (g-g)

$⇒$ $\frac{DE}{BC}$ $=\frac{AD}{AB}$ $=cosA$ $⇒$ DE = BC. cos A (không đổi).

Do đó DE có độ dài không đổi.

**b)**



 Gọi M là điểm đối xứng với B qua AH , N là điểm đối xứng với C qua AH. Gọi I là giao điểm của MH và AB , K là giao điểm của NH và AC . Tìm vị trí của điểm A để độ dài IK nhỏ nhất.

Ta có: $\hat{H\_{1}}=\hat{H\_{2}}$ $⇒$ $\hat{EHI}$ = $\hat{DHK}⇒△$EHI $\~$ $△$DHK (g-g) $⇒$ $\frac{EH}{DH}$ $=\frac{HJ}{HK}$

Mặt khác $\left\{\begin{array}{c}\hat{EHD}= \hat{EHJ}+\hat{IHD} \\\hat{IHK}= \hat{DHK} +\hat{IHD}\\\hat{EHI}= \hat{DHK} \end{array}\right.$ $⇒$ $\hat{EHD}=$ $\hat{IHK}$

$⇒$ $△$HIK $\~$ $△$HED (c-g-c) $⇒$ $\frac{IK}{ED}$ $=\frac{HI}{HE}$ $\geq $ 1$⇒$ $IK\geq ED$ (không đổi)

IK nhỏ nhất khi và chỉ khi IK= ED

⇔ I trùng với E và K trùng với D

⇔ A là điểm chính giữa của cung lớn BC .

**---Hết---**