

**CHƯƠNG 1. TUYỂN CHỌN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 12
TỪ NĂM 2010-2015**

ĐỀ SỐ 1

**SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
HÀ TĨNH**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2010-2011
MÔN: TOÁN 12**

$$2(x-6)=3\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}$$

Câu 1. a) Giải phương trình:

b) Các số a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+2b+5c=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm.

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + x + 2y = 0 \\ x^4 - 8x^2y + 3x^2 + 4y^2 = 0 \end{cases}$$

Câu 2. Giải hệ phương trình:

Câu 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho các điểm $A(1;3), B(-5;-3)$. Xác định tọa độ điểm M trên đường thẳng $d: x-2y+1=0$ sao cho $|2MA+MB|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4. Tam giác ABC có các góc thỏa mãn hệ thức: $\cot A + \cot C = \alpha \cot B$.

a) Xác định góc giữa hai đường trung tuyến AA_1 & CC_1 của tam giác ABC khi $\alpha = \frac{1}{2}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của góc B khi $\alpha = 2$.

Câu 5. Ba số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}.$$

HẾT

ĐỀ SỐ 2
SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
THANH HÓA

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2010-2011
MÔN: TOÁN 12

Câu 1. (4,0 điểm)

$$y = x^3 - (m+1)x^2 - (4-m^2)x - 1 - 2m \quad (C_m)$$

Cho hàm số

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị khi $m = -1$.

b) Tìm các giá trị của m để (C_m) có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Câu 2. (6,0 điểm)

a) Giải phương trình $\cos 2x + \cos 3x - \sin x - \cos 4x = \sin 6x$.

b) Giải bất phương trình: $\sqrt{6}(x^2 - 3x + 1) + \sqrt{x^4 + x^2 + 1} \leq 0$.

c) Tìm số thực a để phương trình $9^x + 9 = a3^x \cos(\pi x)$ có nghiệm thực duy nhất.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} dx$$

Câu 3. (2,0 điểm) Tính tích phân:

Câu 4. (6,0 điểm)

a) Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Đặt $AM = x, AN = y$. Tìm x, y để diện tích toàn phần của tứ diện $DAMN$ nhỏ nhất.

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: x - y + 5 = 0$ và hai elip $(E_1): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, (E_2): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ có cùng tiêu điểm. Biết (E_2) đi qua $M \in \Delta$. Tìm M sao cho (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất.

- c) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(0; 2; 0)$ và hai đường thẳng
- $$\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}; \Delta_2: \begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = -1 - 2s \\ z = s \end{cases} \quad (t, s \in \mathbb{R})$$
- . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M song song với trục Ox , sao cho (P) cắt $\Delta_1; \Delta_2$ lần lượt tại $A, B: AB = 1$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 6 \\ ab + bc + ca = 3 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = a^6 + b^6 + c^6$.

ĐỀ SỐ 3

**SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
QUẢNG BÌNH**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2010-2011
MÔN: TOÁN 12**

Câu 1. (3,0 điểm) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \cos^3 x - \sin^3 x$.

Câu 2. (4,0 điểm) Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$ sao cho $AB = CD = EF = R$. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của $BC, DE, FA; P, Q$ lần lượt là trung điểm của DC, AD .

- a) Xác định phép biến hình biến AC thành BD và tính góc giữa AC & BD . Chứng minh rằng tam giác IPQ đều.
- b) Chứng minh rằng tam giác IJK đều.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\cos 2x + (3 - 2m)\cos x + m = 0$.

$$8 \left(2^{\sin^2 x + \frac{1}{2}} + 2^{\cos^2 x + \frac{1}{2}} \right) = 32 - 49\pi^2 + 56\pi x - 16x^2$$

b) Giải phương trình: .

Câu 4. (4,0 điểm)

a) Biển số xe là dãy kí tự gồm hai chữ cái đứng trước và bốn chữ số đứng sau. Các chữ cái lấy từ chữ cái A, B, C, ..., Z; các chữ số được chọn từ 10 chữ số $0, 1, 2, \dots, 9$. Hỏi có bao nhiêu biển số xe

có hai chữ số đầu (sau hai chữ cái) khác nhau, đồng thời có đúng hai chữ số chẵn và hai chữ số chẵn đó giống nhau?

b) Cho biểu thức $f(x) = (1 + x + x^2)^{15}$. Khai triển $f(x)$ thành đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{29}x^{29} + a_{30}x^{30}$. Tính $A = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{29} + a_{30}$ và a_{10} .

Câu 5. (4,0 điểm) Cho tứ diện $SABC$ có các cặp cạnh đối đôi một bằng nhau. Cho $BC = a, CA = b, AB = c$.

a) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ theo a, b, c .

b) Tính thể tích tứ diện $SABC$ theo a, b, c .

Câu 6. (1,0 điểm) An, Bình và Tâm mỗi người có hai nghề nghiệp khác nhau và khác với hai người còn lại. Các nghề của họ là *nhà văn, kiến trúc sư, giáo viên, bác sĩ, luật sư và họa sĩ*. Mỗi nhân vật trong các câu dưới đây là một người riêng biệt:

1. Người giáo viên và nhà văn đi chơi tennis với An.
2. Người bác sĩ đặt họa sĩ vẽ một bức họa.
3. Người bác sĩ có cuộc hẹn với người giáo viên.
4. Người họa sĩ có họ với người kiến trúc sư.
5. Tâm thắng bình và người họa sĩ khi chơi cờ.
6. Bình sống ở bên cạnh nhà của nhà văn.

Hãy tìm nghề nghiệp của mỗi người?

ĐỀ SỐ 4

SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
NGHỆ AN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2010-2011
MÔN: TOÁN 12

Câu 1.

a) Giải phương trình $x - 1 + \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} = x^2 + \sqrt{2}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\sqrt{(m+2)x - m} \geq |x+1|$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$.

Câu 2. Giải hệ phương trình:

Câu 3.

$$\begin{cases} y^3 + y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \\ \sqrt{1-x^2} - \sqrt{y} = \sqrt{2-y} - 1 \end{cases}$$

a) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1$. Chứng minh rằng:
 $2x - |y| \geq \sqrt{15}$.

b) Cho a, b, c là ba số thực không đồng thời bằng 0, thỏa mãn $(a+b+c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$. Tìm

$$P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

GTLN, GTNN của biểu thức

Câu 4. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm $G(1;2)$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Biết đường tròn đi qua ba trung điểm của ba đoạn thẳng HA, HB, HC có phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Câu 5.

a) Cho tứ diện $ABCD$, gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) & (ABD) . Gọi S_C, S_D theo thứ tự

là diện tích của tam giác ABC, ABD . Chứng minh: $V = \frac{2S_C S_D \sin \alpha}{3AB} (V = V_{ABCD})$.

b) Cho tứ diện $SABC$ có $SA = SB = SC = a$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua trọng tâm của tứ diện, cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại $A', B', C' (\neq S)$. Tìm GTLN của:

$$P = \frac{1}{SA' \cdot SB'} + \frac{1}{SB' \cdot SC'} + \frac{1}{SC' \cdot SA'}$$

HẾT

ĐỀ SỐ 5

**SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
NGHỆ AN**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2010-2011
MÔN: TOÁN 12
(Ngày thứ nhất)**

Câu 1. (4,0 điểm)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x+1) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho dãy số (x_n) với $x_1 = a, x_{n+1} = x_n(x_n - 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm điều kiện cần và đủ của a để dãy trên có giới hạn hữu hạn.

Câu 3. (4,0 điểm)

Cho tam giác nhọn có phân giác trong AD ($D \in BC$). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC . Gọi H là giao điểm của BF & CE . Chứng minh rằng AH vuông góc với BC .

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC có diện tích S , $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c-a)a^2}{b+c} + \frac{(c+a-b)b^2}{c+a} + \frac{(a+b-c)c^2}{a+b} \geq 2\sqrt{3}S$$

Câu 5. (4,0 điểm)

Câu 6. Cho số nguyên dương $n \geq 2$ và tập $M = \{1; 2; 3; \dots; n\}$. Với mỗi tập con A khác rỗng của M , ta kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập A , $\min A$ và $\max A$ tương ứng là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của tập A .

Tính $\sum_{A \subset M, A \neq \emptyset} (\min A + \max A - |A|)$ theo n .

HẾT

ĐỀ SỐ 6

SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
NGHỆ AN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2010-2011
MÔN: TOÁN 12
(Ngày thứ hai)

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho P, Q là các số nguyên dương thỏa mãn P, Q và $P \cdot Q$ đều không là số chính phương. Chứng minh rằng nếu $(a; b)$ là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình $x^2 - PQy^2 = 1$ và (c, d) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình $x^2 - PQy^2 = -1$ thì ta có:

$$\begin{cases} c^2 + PQd^2 = a \\ 2cd = b \end{cases}$$

(Lưu ý: Nghiệm nguyên dương $(\alpha; \beta)$ được gọi là lớn hơn nghiệm nguyên dương $(\alpha'; \beta')$ nếu $\alpha > \alpha' > 0, \beta > \beta' > 0$)

Câu 2. (4,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

i) $f(x^2 + y^2 + 2f(xy)) = f^2(x + y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

ii) $\forall x, y \in (2010; +\infty): x \neq y$ thì $f(x) \neq f(y)$.

Câu 3. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC và M, N là hai điểm di động trên đường thẳng BC sao cho $MN = BC$. Đường thẳng d_1 đi qua M và vuông góc với AC , đường thẳng d_2 đi qua N và vuông góc với AB . Gọi K là giao điểm của d_1 & d_2 . Chứng minh rằng trung điểm I của đoạn AK luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $9(a^4 + b^4 + c^4) - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 = 0$. Tính giá trị nhỏ nhất của

biểu thức:
$$F = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b}.$$

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Ta chia tam giác ABC thành n tam giác nhọn. Hỏi giá trị nhỏ nhất của n là bao nhiêu?

HẾT

ĐỀ SỐ 7

**SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
PHÚ THỌ**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2010-2011
MÔN: TOÁN 12**

Câu 1. (3,0 điểm)

Giải phương trình: $((6\sin x - 2)\sin 3x + 1)^3 = 162\sin x - 27$.

Câu 2. (3,0 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(x+2) = 3(y^2 - x) + 3 \\ y^2(y+2) = 3(z^2 - y) + 3 \\ z^2(z+2) = 3(x^2 - z) + 3 \end{cases}.$$

Câu 3. (4,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^2 + u_n + 4), n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng dãy (u_n) tăng nhưng không bị chặn trên.

b) Đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 3}, n = 1, 2, \dots$, tính $\lim v_n$.

Câu 4. (5,0 điểm)

Hình chóp n giác đều có góc tạo bởi giữa mặt bên và mặt đáy bằng α , góc tạo bởi giữa cạnh bên và mặt đáy là

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \leq \tan^2 \frac{\pi}{2n}.$$

β . Chứng minh rằng

Câu 5. (3,0 điểm)

Xét $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $3x - 6\sqrt{2x+4} = 4\sqrt{3y+18} - y$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu

thức: $P = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1$.

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho đa thức $f(x)$ có bậc là 2010 thỏa mãn $f(n) = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots, 2011$. Tính $f(2012)$.

HẾT

ĐỀ SỐ 8

**SỞ GD VÀ ĐT THÀNH PHỐ
HỒ CHÍ MINH**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2010-2011
MÔN: TOÁN 12**

Câu 1. (2,0 điểm)

Giải phương trình: $2 \sin 2x - \cos 2x = 7 \sin x + 2 \cos x - 4$.

Câu 2. (6,0 điểm)

a) Chứng minh $ad + bc \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}$ với a, b, c, d là các số thực.

b) Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \geq \frac{3}{a + b + c} + \frac{2}{abc}$$

c) Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x + y + z - xyz$.

Câu 3. (2,0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Câu 4. (2,0 điểm)

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^3 = 8y - 17x \end{cases}$$

Giải hệ phương trình:

Câu 5. (2,0 điểm)

Định m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{1-x} - \sqrt{x} + m\sqrt{x-x^2} = 2$

Câu 6. (4,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . SA vuông góc với $(ABCD)$, $SA = a$. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AC & SD .

Câu 7. (2,0 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = 2x^2 - xy + 2y^2$ với x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 3$.

HẾT

ĐỀ SỐ 9**SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
BẮC NINH****KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2010-2011
MÔN: TOÁN 12****Câu 1. (5,0 điểm)**

- a) Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị là (T) . Giả sử A, B, C là ba điểm thẳng hàng trên (T) , tiếp tuyến của (T) tại các điểm A, B, C lần lượt cắt (T) tại các điểm A', B', C' (tương ứng khác A, B, C). Chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng.
- b) Cho hàm số $y = x^{2n+1} + 2011x + 2012$ (1), chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì đồ thị hàm số (1) luôn cắt trục hoành tại đúng một điểm.

Câu 2. (5,0 điểm)

- a) Giải phương trình: $\log_2 x + \log_4 x + \log_6 x = \log_3 x + \log_5 x + \log_7 x \quad (x \in \mathbb{R})$.

- b) Giải phương trình: $(5x - 6)^2 - \frac{1}{\sqrt{5x - 7}} = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x - 1}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Câu 3. (3,0 điểm)

Kí hiệu C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử $(0 \leq k \leq n; k, n \in \mathbb{Z})$, tính tổng sau:

$$S = C_{2010}^0 + 2C_{2010}^1 + 3C_{2010}^2 + \dots + 2010C_{2010}^{2009} + 2011C_{2010}^{2010}$$

Câu 4. (5,0 điểm)

- a) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AD = 4a$ ($a > 0$), các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{6}$. Tìm cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) khi thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là lớn nhất.
- b) Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BAC} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 120^\circ$. Gọi E là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABD . Chứng minh rằng tam giác ACE vuông.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho hai số thực $x, y : x^2 + y^2 \leq \pi$. Chứng minh rằng $\cos x + \cos y \leq 1 + \cos(xy)$.

HẾT

ĐỀ SỐ 10
(Đề HSG lớp 12, Lâm Đồng)

Câu 1. (3.0 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ (1). Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 2y - 9 = 0$.

Câu 2. (3.0 điểm)

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x + \cos x)}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x} dx$$

Tính tích phân

Câu 3. (2.0 điểm)

Cho biểu thức $P(x) = (1 + 4x + 3x^2)^{10}$. Xác định hệ số của x^3 trong khai triển $P(x)$ thành lũy thừa của x.

Câu 4. (3.0 điểm)

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC biết tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(4;0)$; phương trình hai đường thẳng lần lượt chứa đường cao và đường trung tuyến xuất phát đỉnh A của ΔABC là $d_1: x + y - 2 = 0$ và $d_2: x + 2y - 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng chứa các cạnh của ΔABC .

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC có $AB = c; BC = a; CA = b$. Chứng minh rằng:

$$\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$$

Câu 5. (3.0 điểm)

a) Giải phương trình $2\sin 2x + \cos 2x + 2 = \sqrt{2}(\sin 2x \cdot \cos x + \sin x + 2\cos x)$.

b) Cho $x, y, z \in [0;1]$. Chứng minh rằng $(2^x + 2^y + 2^z)(2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z}) \leq \frac{81}{8}$.

Câu 6. (3.0 điểm)

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ biết khoảng cách từ A đến (SBC) bằng b; góc giữa mặt bên và mặt đáy hình chóp bằng α . Tìm α để thể tích khối chóp S.ABCD đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 7. (3.0 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2^x - 2^y = y - x \\ (x^2 - 3y)\sqrt{2y^2 3x - 2} \geq 0 \end{cases}$$

..... Hết

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ SỐ 01

Câu 1. a) Ta có: $2(x-6)=3\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}$ (1)

Điều kiện: $x \geq 5$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2(x-6)=\sqrt{x+3}-3\sqrt{x-5} \Leftrightarrow 2(6-x)(\sqrt{x+3}+3\sqrt{x-5})=48-8x$

$$\Leftrightarrow (6-x)(\sqrt{x+3}+3\sqrt{x-5})=4(6-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x=0 & (1) \\ \sqrt{x+3}+3\sqrt{x-5}=4 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow x=6$ thỏa mãn điều kiện

$$(2) \Leftrightarrow 3\sqrt{(x+3)(x-5)}=29-5x \Leftrightarrow \begin{cases} 29-5x \geq 0 \\ x^2-17x+61=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{29}{5} \\ x = \frac{17 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{17-3\sqrt{5}}{2}$$

Từ

Vậy nghiệm của phương trình $x=6, x=\frac{17-3\sqrt{5}}{2}$.

b) Ta có: $ax^2+bx+c=0$ (1)

Trường hợp 1: $a=0$ suy ra $2b+5c=0$. Phương trình (1) trở thành $bx+c=0$ (2)

+) Nếu $b=0 \Rightarrow c=0$: Phương trình (2) có nghiệm (vô định)

+) Nếu $b \neq 0$: Phương trình (2) có nghiệm (duy nhất)

Trường hợp 2: $a \neq 0$. Ta có $b=-\frac{a+5c}{2}$

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow 4\Delta=4b^2-16ac=(a+5c)^2-16ac=a^2-6ac+25c^2=(a-3c)^2+(4c)^2 \geq 0$$

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm.

$$\begin{cases} x^2-4xy+x+2y=0 & (1) \\ x^4-8x^2y+3x^2+4y^2=0 & (2) \end{cases}$$

Câu 2. Ta có:

$$x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Trường hợp 1: là nghiệm của hệ.

Trường hợp 2: $x \neq 0$: Chia hai vế của (1) cho x , (2) cho x^2

$$\begin{cases} x-4y+1+\frac{2y}{x}=0 \\ x^2-8y+3+\frac{4y^2}{x^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{2y}{x}=4y-1 \\ x^2+\frac{4y^2}{x^2}=8y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{2y}{x} \geq 0, y \geq \frac{3}{8} \\ \left(x+\frac{2y}{x}\right)^2=(4y-1)^2 \\ \left(x+\frac{2y}{x}\right)^2=12y-3 \end{cases}$$

$$(4y - 1)^2 = 12y - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Suy ra

$$\text{Với } y = 1 \text{ ta có } x + \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Vậy hệ có 3 nghiệm } (0; 0), (1; 1), (2; 1).$$

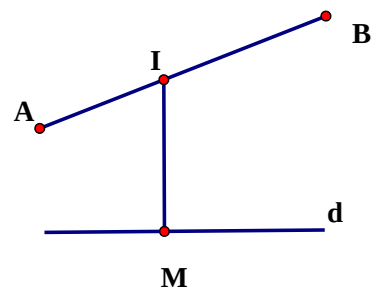
Câu 3. Gọi $I(x_0; y_0)$ là điểm thỏa mãn: $2IA + IB = 0$

$$\Leftrightarrow 2\vec{IA} = \vec{BI} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 - x_0) = x_0 + 5 \\ 2(3 - y_0) = y_0 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Vậy $I(-1; 1)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |2MA + MB| &= |2(MI + IA) + MI + IB| \\ &= |3MI + 2IA + IB| = 3|MI| = 3MI \end{aligned}$$

Như vậy $|2MA + MB|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất. Suy ra M hình chiếu của I trên d .



là

Phương trình tham số của d $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \end{cases}$.

Gọi tọa độ $M(2t_0 - 1; t_0) \Rightarrow IM = (2t_0; t_0 - 1)$

$$\text{Ta có } IM \cdot u_d = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2t_0 + t_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{5}. \text{ Vậy } M\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right).$$

$$\text{Câu 4. a) Ta có: } \cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4s}; \cot B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4s}; \cot C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{4s}$$

$$\text{Khi } \alpha = \frac{1}{2}. \text{ Ta có } \cot A + \cot C = \frac{1}{2} \cot B$$

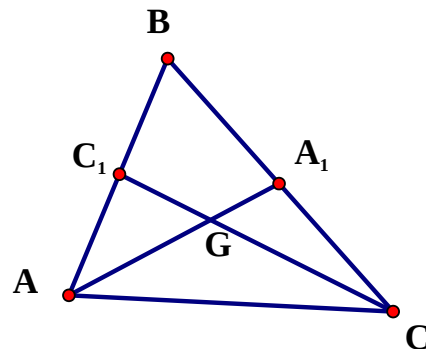
$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4s} + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{4s} = \frac{1}{2} \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4s} \Leftrightarrow 5b^2 = a^2 + c^2$$

$$\text{Ta có: } AG^2 = \frac{4}{9} AA_1^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right);$$

$$CG^2 = \frac{4}{9} CC_1^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \right);$$

$$\Rightarrow AG^2 + CG^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{a^2 + c^2}{2} + b^2 \right) = b^2 \Rightarrow AA_1 \perp CC_1.$$

Vậy góc giữa AA_1 và CC_1 bằng 90° .



$$b) \cot A + \cot C = 2 \cot B \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4s} + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{4s} = 2 \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4s} \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2b^2$$

$$\text{Ta có: } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2}{4ac} \geq \frac{2ac}{4ac} = \frac{1}{2} \Rightarrow B \leq 60^\circ.$$

Dấu = xảy ra khi tam giác ABC đều.

$$\text{Câu 5. } P = \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ac + 2a^2}}$$

$$\text{Ta có: } 5a^2 + 2ab + 2b^2 = (2a + b)^2 + (a - b)^2 \geq (2a + b)^2$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} \leq \frac{1}{2a + b} + \frac{1}{9} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} \leq \frac{1}{2b + c} + \frac{1}{9} \left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ac + 2a^2}} \leq \frac{1}{2c + a} + \frac{1}{9} \left(\frac{2}{c} + \frac{1}{a} \right) \quad (3)$$

$$\text{Cộng theo vế của (1), (2) và (3) suy ra } P \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \sqrt{3} \Rightarrow P \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

ĐỀ SỐ 02

Câu 1. a) Với $m = -1$, ta được hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.

Sự biến thiên: $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

$y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1) \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.

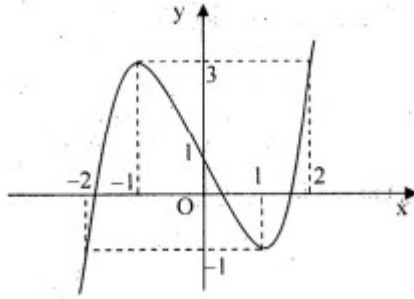
Điểm cực đại của đồ thị $(-1; 3)$, điểm cực tiểu của đồ thị $(1; -1)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Đồ thị đi qua điểm $(-2; -1)$ và $(2; 3)$.

Điểm uốn $I(0; 1)$ là tâm đối xứng



b) Ta có $y' = 3x^2 - 2(m+1)x - 4 + m^2$, là tam thức bậc hai của x.

y' có biệt số $\Delta' = -2m^2 + 2m + 13$.

+) Nếu $\Delta' \leq 0$ thì $y' \geq 0, \forall x$, suy ra yêu cầu của bài toán không thỏa mãn.

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}; \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} \right)$$

+) Nếu $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

Dấu của y' :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+

Chọn $x_0 \in (x_1; x_2) \Rightarrow y'(x_0) < 0$.

Yêu cầu của bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi tồn tại x sao cho $y'(x) \cdot y'(x_0) = -1$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2(m+1)x - 4 + \frac{1}{y'(x_0)} = 0$$

Phương trình (1) có nghiệm.

$$m \in \left(\frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}; \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} \right)$$

Vậy giá trị cần tìm của m là

Câu 2. a) $(\cos 2x - \cos 4x) - \sin x + (\cos 3x - 2\sin 3x \cdot \cos 3x) = 0$

$$\Leftrightarrow (2\sin x \cdot \sin 3x - \sin x) - (2\sin 3x \cos 3x - \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow (2\sin 3x - 1)(\sin x - \cos 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = \frac{1}{2} \\ \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

b) Tập xác định: $\mathbb{R}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 6(2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)) + \sqrt{6(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} \leq 0$

$$\Leftrightarrow 12 \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + \sqrt{\frac{6(x^2 - x + 1)}{x^2 + x + 1}} - 6 \leq 0 \quad (\forall x^2 + x + 1 > 0, \forall x)$$

Đặt: $t = \sqrt{\frac{6(x^2 - x + 1)}{x^2 + x + 1}} (t > 0)$, ta được $2t^2 + t - 6 \leq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq \frac{3}{2}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{6(x^2 - x + 1)}{x^2 + x + 1} \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow 5x^2 - 11x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{11 - \sqrt{21}}{10}; \frac{11 + \sqrt{21}}{10} \right)$$

c) $9^x + 9 = a \cdot 3^x \cos(\pi x) \Leftrightarrow 3^x + 3^{2-x} = a \cdot \cos(\pi x) \quad (2)$

Nhận xét: Nếu x_0 là nghiệm của (2) thì $2 - x_0$ cũng là nghiệm của (2), suy ra điều kiện cần để (2) có nghiệm duy nhất là $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$

+) Với $x_0 = 1$, thì từ (2) suy ra $a = -6$.

+) với $a = -6$, thì phương trình (2) trở thành $3^x + 3^{2-x} = -6 \cos(\pi x) \quad (3)$

Ta có $VT(3) \geq 6, VP(3) \leq 6$.

Từ (3) $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x + 3^{2-x} = 6 \\ -6 \cos(\pi x) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $a = -6$.

Câu 3. Ta có $\sin x = \frac{1}{4}(\sin x + \sqrt{3} \cos x) - \frac{\sqrt{3}}{4}(\sin x - \sqrt{3} \cos x)$

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2} dx - \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} dx$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right)} dx + \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{1}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16} \tan \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

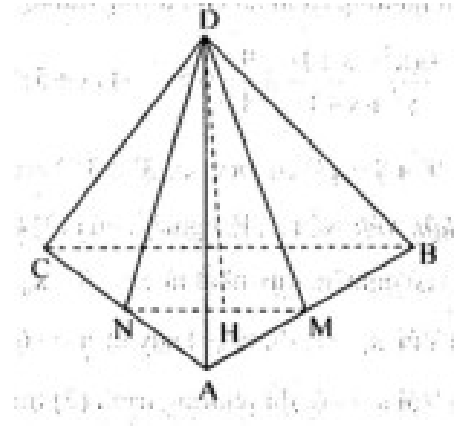
Câu 4: Kẻ $DH \perp MN$, do mặt phẳng (DMN) vuông góc với (ABC) nên DH vuông góc với (ABC). Mà ABCD là tứ diện đều, nên suy ra H là tâm của tam giác đều ABC

Ta có
$$S_{AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} xy$$

$$S_{AMN} = S_{AMH} + S_{ANH} = \frac{1}{2} AM \cdot AH \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} AN \cdot AH \cdot \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} (x + y)$$

Suy ra:
$$\frac{\sqrt{3}}{4} xy = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{3} (x + y) \Rightarrow x + y = 3xy \quad (0 \leq x, y \leq 1)$$



Diện tích toàn phần của tứ diện DAMN :

$$S = S_{AMD} + S_{AND} + S_{DMN} + S_{AMN} = \frac{1}{2} AD \cdot AM \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} AD \cdot AN \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} DH \cdot MN + \frac{1}{2} AN \cdot AM \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \sqrt{3}xy + \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{3xy(3xy - 1)}$$

Từ
$$3xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{xy} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow xy \geq \frac{4}{9}$$

Suy ra
$$\min S = \frac{\sqrt{3}(4 + \sqrt{2})}{9} \text{ khi } x = y = \frac{2}{3}$$

b) Hai elip có các tiêu điểm $F_1(-3;0), F_2(3;0)$. Điểm $M \in (E_2) \Rightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$. Vậy (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất khi và chỉ khi $ME_1 + ME_2$ nhỏ nhất

Gọi $N(x;y)$ là điểm đối xứng của F_1 qua Δ , suy ra $N(-5;2)$

Ta có $MF_1 + MF_2 = NM + MF_2 \geq NF_2$ (không đổi)

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $M = NF_2 \cap \Delta$

$$M : \begin{cases} x + 4y - 3 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-17}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow M \left(\frac{-17}{5}; \frac{8}{5} \right)$$

Tọa độ điểm

c) Giả sử đã xác định được mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$A \in \Delta_1 \Rightarrow A(1 + 2t; 2 - 2t; -1 + t); B \in \Delta_2 \Rightarrow B(3 + 2s; -1 - 2s; s)$$

Suy ra
$$AB = (2 + 2(s - t); -3 - 2(s - t); 1 + (s - t))$$

$$\Rightarrow AB^2 = 9(s-t)^2 + 22(s-t) + 14 = 1 \Rightarrow \begin{cases} s-t = -1 \\ s-t = \frac{-13}{9} \end{cases}$$

Với $s-t = -1 \Rightarrow AB = (0; -1; 0) \Rightarrow (P)$ có một vtpt $n_1 = [AB; i] = (0; 0; 1) \Rightarrow (P): z = 0$ (loại do (P) chứa Ox)

Với $s-t = \frac{-13}{9} \Rightarrow AB = \left(\frac{-8}{9}; \frac{-1}{9}; \frac{-4}{9}\right) \Rightarrow (P)$ có một vtpt $n_1 = [AB; i] = \left(0; \frac{-4}{9}; \frac{1}{9}\right) \Rightarrow (P): 4y - z - 8 = 0$ (tm)

Câu 5: Từ giả thiết suy ra: $a+b+c=0$, ta có a,b,c là ba nghiệm thực của phương trình

$$\Leftrightarrow x^3 - (x-a)(x-b)(x-c) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x - abc = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = abc + 1 \quad (3)$$

Từ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm thực a,b,c khi và chỉ khi

$$-1 \leq abc + 1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq abc \leq 2$$

+ $abc = -2$, khi trong ba số a,b,c có hai số bằng 1 và một số bằng -2

+ $abc = 2$ khi trong ba số a,b,c có hai số bằng -1 và một số bằng 2

$$P = a^6 + b^6 + c^6 \Rightarrow P - 3(abc)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 216 - 18.9 = 54$$

$$P = 3(abc)^2 + 54$$

$\text{Max} P = 66$ khi có hai số bằng -1 và một số bằng 2, hoặc có hai số bằng 1 và một số bằng -2

2 trang cuối, Đình Xuân Thạch

12-16

$$\text{Do đó: } 8 \left(2^{\sin^2 x + \frac{1}{2}} + 2^{\cos^2 x + \frac{1}{2}} \right) = 32 - 49\pi^2 + 56\pi x - 16x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 8 \left(2^{\sin^2 x + \frac{1}{2}} + 2^{\cos^2 x + \frac{1}{2}} \right) = 32 \\ 32 - 49\pi^2 + 56\pi x - 16x^2 = 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ x = \frac{7\pi}{4} = \pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{4}; (k=3)$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{7\pi}{4}$.

Câu 4: a) Đầu tiên chọn 2 chữ cái: Có 2^6 cách chọn chữ cái đầu tiên, sau đó chọn chữ cái thứ hai trong 26 chữ cái (có lặp). Số cách chọn là $n = 26.26 = 676$.

Chọn 2 chữ số chẵn giống nhau: có 5 cách chọn trong các số 0, 2, 4, 6, 8. Sau đó sắp hai số chẵn giống nhau vào 2 trong 2 vị trí $a_1 a_2 a_3 a_4$: chỉ có 5 vị trí $a_1 a_3, a_1 a_4, a_2 a_3, a_2 a_4, a_3 a_4$ vì nếu xếp vào vị trí $a_1 a_2$ thì trái giả thiết là hai chữ số đầu khác nhau.

• **Trường hợp 1:** số chẵn đã sắp vào các vị trí $a_1a_3, a_1a_4, a_2a_3, a_2a_4$: có 4.5 cách sắp 2 chữ số chẵn giống nhau vào 4 vị trí đó, sau đó có 5×5 cách sắp 2 chữ số lẻ vào hai vị trí còn lại. Do đó số cách chọn là: $n_2 = 4.5.5.5 = 500$.

• **Trường hợp 2:** số chẵn đã sắp vào vị trí a_3a_4 : Có 5 cách sắp 2 chữ số chẵn giống nhau vào vị trí đó, còn lại vị trí a_1a_2 để sắp xếp vào 2 số lẻ khác nhau. Do đó số cách chọn là $n_3 = 5.A_5^2 = 100$.

Theo quy tắc cộng, ta có $n_4 = n_2 + n_3 = 600$ cách chọn 2 chữ số chẵn giống nhau, sau đó chọn 2 chữ số lẻ vào hai vị trí còn lại.

Theo quy tắc nhân, số cách biến số xe thỏa mãn yêu cầu của bài toán là:

$$n = n_1 n_4 = 676.600 = 405600.$$

b) Ta có: $A = f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{29} + a_{30} = (1 - 1 + (-1)^2)^{15} = 1$

$$f(x) = [(1+x) + x^2]^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (1+x)^k x^{2(15-k)} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \left(\sum_{j=0}^k C_k^j x^j \right) x^{30-2k}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \left(\sum_{j=0}^k C_k^j x^j x^{30-2k} \right) = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \left(\sum_{j=0}^k C_k^j x^{j+30-2k} \right)$$

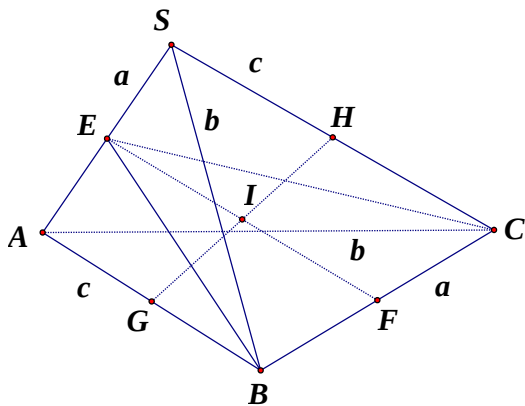
Hệ số a_{10} là tổng các hệ số của các đơn thức có số mũ thỏa mãn:

$$j + 30 - 2k = 10 \Leftrightarrow j = 2(k - 10) \quad (k \geq 10)$$

Do đó $(k, j) = (10; 0), (11; 2), (12; 4), (13; 6), (14; 8), (15; 10)$

$$\text{Suy ra } a_{10} = C_{15}^{10} C_{10}^0 + C_{15}^{11} C_{11}^2 + C_{15}^{12} C_{12}^4 + C_{15}^{13} C_{13}^6 + C_{15}^{14} C_{14}^8 + C_{15}^{15} C_{15}^{10} = 531531.$$

Câu 5: a)



Tứ diện $S.ABC$ có các cặp cạnh đối đôi một bằng nhau, nên các mặt là các tam giác bằng nhau (c.g.c). Gọi E và F là trung điểm của SA và BC , ta có:

$$BE = CE = FA = FS = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$\Rightarrow$ Các tam giác BEC và AFS cân tại E và F , nên EF là trung tuyến vừa là đường cao.

$\Rightarrow EF$ là đường vuông góc chung của SA và BC cũng là trung trực của SA và BC .

Tương tự, đoạn thẳng nối 2 trung điểm G và H của AB và SC cũng là trung trực của AB và SC .

Ta có: $EH \parallel \frac{1}{2}AC$,

$\Rightarrow EF \parallel GH$ do đó $GEHF$ là hình bình hành, suy ra EF và GH cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.

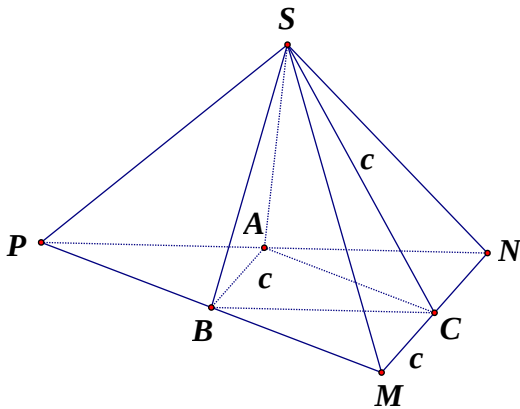
Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.

Bán kính của mặt cầu là $R = IA = IB = IC$

Ta có: $EF = \sqrt{EB^2 - BF^2} = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$

$$R = IA = \sqrt{IE^2 + EA^2} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{8} + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$$

b)



Trong mặt phẳng (ABC) , vẽ các đường thẳng: MN đi qua C và song song với AB , NP qua A và song song với BC , PM qua B và song song với AC . Ta có các tứ giác $ABMC$, $ABCN$, $ACBP$ là các hình bình hành.

Suy ra $MN = 2SC = 2c$; $NP = 2SA = 2a$; $PM = 2SB = 2b$

và A, B, C là trung điểm của NP, PM, MN NP, PM, MN.

Do đó: các tam giác MSN , NSP , PSM là các tam giác vuông tại S và $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} S_{\triangle MNP}$;

$PM \perp SM, PM \perp SN \Rightarrow PM \perp mp(MSN) \Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{4} V_{SMNP}$.

Xét tứ diện $SMNP$ có góc tam diện đỉnh S là tam diện vuông, ta có:

$$\begin{cases} SM^2 + SN^2 = MN^2 = 4c^2 \\ SN^2 + SP^2 = NP^2 = 4a^2 \\ SP^2 + SM^2 = PM^2 = 4b^2 \end{cases} \Rightarrow 2(SM^2 + SN^2 + SP^2) = 4(a^2 + b^2 + c^2)$$

Suy ra $SM^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2)$; $SN^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2)$; $SP^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2)$.

$$V_{SMNP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (SM \cdot SN) \cdot SP = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}$$

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{4} \cdot V_{SMNP} = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}$.

Câu 6.

• **An**

Bước 1: Câu 5 cho biết An là họa sĩ

Bước 2: Câu 1 cho biết An không phải là giáo viên; nhà văn.

Bước 3: Câu 2 cho biết An không phải là bác sĩ.

Bước 4: Câu 4 cho biết An không phải là kiến trúc sư. Chỉ còn là nghề luật sư

Suy ra An là họa sĩ và luật sư.

• **Bình**

Còn lại 4 nghề: Nhà văn, giáo viên, kiến trúc sư, bác sĩ.

Bước 1: Câu 6 cho biết Bình không phải nhà văn.

Bước 2: Câu 1 cho biết Bình là giáo viên.

Bước 3: Câu 3 cho biết Bình không phải là bác sĩ.

Như vậy, Bình là giáo viên và kiến trúc sư.

• **Tâm**

Còn lại 2 nghề bác sĩ và nhà văn là nghề của Tâm.

ĐỀ SỐ 04

Câu 1. a) Điều kiện: $-1 \leq x \leq 2$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow x^2 - x - \sqrt{x-1} - \sqrt{2-x} = -1 - \sqrt{2}$ (1)

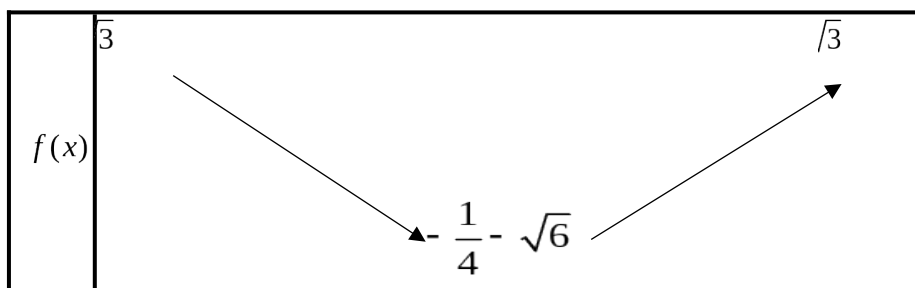
Xét $f(x) = x^2 - x - \sqrt{x+1} - \sqrt{2-x}$ với $x \in [-1; 2]$

$$f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (2x-1) \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}\sqrt{2-x}(\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x})} \right], f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên:

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
$f'(x)$	-	0	+



Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có đúng 2 nghiệm

Dễ nhận thấy $x = 0$; $x = 1$ là 2 nghiệm của phương trình (1).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{0; 1\}$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với: $(m+2)x - m \geq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow m(x-1) \geq x^2 + 1$ (*)

Nhận thấy $x = 0$ không nghiệm đúng bất phương trình (*)

+) Với $x \in [-2; 1)$. Ta có bất phương trình (*) $\Leftrightarrow m \leq \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ (1)

+) Với $x \in (1; 2]$. Ta có bất phương trình (*) $\Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ (2)

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ với $x \in [-2; 1) \cup (1; 2]$

Có $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$ (loại)

Bảng biến thiên:

x	-2	$1 - \sqrt{2}$	1	2
y'	+	0	-	-
y	$-\frac{5}{3}$	$2 - 2\sqrt{2}$	$-\infty$	5

Bất phương trình (*) có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2] \Leftrightarrow$ hoặc bất phương trình (1) có nghiệm

thuộc $[-2; 1)$ hoặc bất phương trình (2) có nghiệm thuộc $(1; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 - 2\sqrt{2} \\ m \geq 5 \end{cases}$

Vậy $m \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{2}] \cup [5; +\infty)$ là tất cả các giá trị cần tìm

Câu 2. Điều kiện xác định của hệ phương trình là: $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} (*)$

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} y^3 + y = (x+1)^3 + (x+1) & (1) \\ \sqrt{1-x^2} + 1 = \sqrt{y} + \sqrt{2-y} & (2) \end{cases}$

Từ (*) ta có $\begin{cases} x+1 \in [0; 2] \\ y \in [0; 2] \end{cases}$ Xét $f(t) = t^3 + t$ $f(t) = 3t^3 + 1 > 0 \forall t$

Hàm số $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên đoạn $[0; 2]$ nên phương trình (1) $\Leftrightarrow y = x+1$, thế vào phương trình (2) ta được: $\sqrt{1-x^2} + 1 = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=1$ (thỏa mãn(*))

Câu 3.a) Điều kiện: $\begin{cases} x > -2y \\ x > 2y \end{cases} \Rightarrow x > 2|y| \Rightarrow x > 0$

Ta có: $\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1 \Leftrightarrow \log_4(x^2 - 4y^2) = 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4y^2 + 4}$ (do $x > 0$) $\Rightarrow 2x - |y| = 2\sqrt{4|y|^2 + 4} - |y|$

Đặt $t = |y|, t \geq 0$

Xét: $f(t) = 2\sqrt{4t^2 + 4} - t$ với $t \geq 0 \Rightarrow f(t) = \frac{8t}{\sqrt{4t^2 + 4}} - 1 = \frac{8t - \sqrt{4t^2 + 4}}{\sqrt{4t^2 + 4}}$

$f(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{15}}$ (do $t \geq 0$)

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	4	$\sqrt{15}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq \sqrt{15} \Rightarrow 2x - |y| \geq \sqrt{15}$ (ĐPCM)

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{8}{\sqrt{15}}; y = \pm \frac{1}{\sqrt{15}}$

b) Từ giả thiết và $ab+bc+ca = \frac{1}{2}[(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2] \Rightarrow ab+bc+ca = \frac{1}{4}(a+b+c)^2$

Do đó
$$P = \frac{4(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)^3} = \frac{1}{16} \left[\left(\frac{4a}{a+b+c} \right)^3 + \left(\frac{4b}{a+b+c} \right)^3 + \left(\frac{4c}{a+b+c} \right)^3 \right]$$

Đặt $x = \frac{4a}{a+b+c}; y = \frac{4b}{a+b+c}; z = \frac{4c}{a+b+c}$

Thì
$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+yz+xz=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=4-x \\ yz=x^2-4x+4 \end{cases}$$

Vì $(y+z)^2 \geq 4yz$ nên $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$

Ta có
$$P = \frac{1}{16}(x^3+y^3+z^3) = \frac{1}{16}[x^3+(y+z)^3-3yz(y+z)] \Rightarrow P = \frac{1}{16}(3x^3-12x^2+12x+16)$$

Xét: $f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 12x + 16$ với: $x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]$

$$\Rightarrow f'(x) = 9x^2 - 24x + 12 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases} \text{ thoả mãn } x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]$$

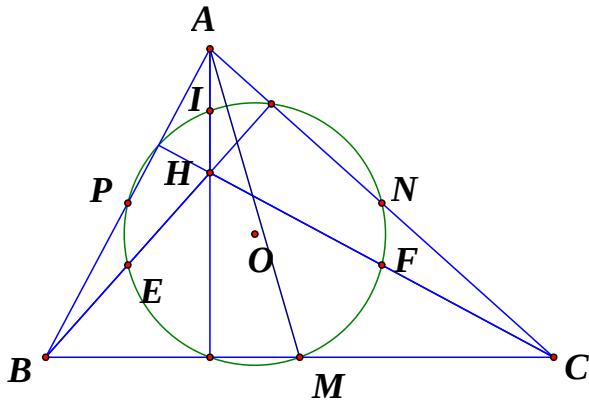
Có $f(0)=16, f(2)=16, f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{176}{9}, f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{176}{9}$

$$\Rightarrow \text{Trên } \left[0; \frac{8}{3}\right]: \min f(x) = 16, \max f(x) = \frac{176}{9}$$

$$\Rightarrow \min P = 1, \text{ chẳng hạn khi: } a=0, b=c \neq 0$$

$$\max P = \frac{11}{9}, \text{ chẳng hạn khi: } a=b, c=4a, a \neq 0.$$

Câu 4.



Gọi trung điểm của HA, HB, HC, BC, CA, AB lần lượt là: I, E, F, M, N, P

Ta có: $EH \perp AC \Rightarrow EH \perp IF$

Mà $MF \parallel EH \Rightarrow MF \perp IF \Rightarrow \angle IFM = 90^\circ$

Tương tự $\Rightarrow \angle IFM = 90^\circ$ nên M thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle IEF$

Tương tự ta có N, P cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle IEF$

Dễ thấy: $\triangle ABC$ là ảnh của $\triangle MNP$ qua phép vị tự tâm G tỉ số $k = -2$

$\Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là ảnh của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP$

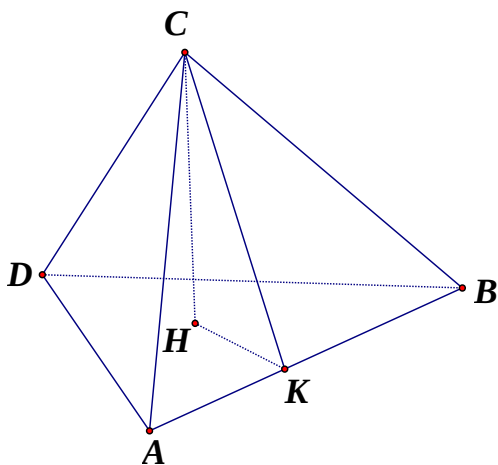
Ta có đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP$ có phương trình: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

Có tâm $K(1; -2)$, $R = 1$. Gọi K_1, R_1 là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ thì:

$GK_1 = -2GK, R_1 = 2R, \Rightarrow K_1(1; 10), R_1 = 2$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là: $(x - 1)^2 + (y - 10)^2 = 4$

Câu 5.a)



Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (ABD) .

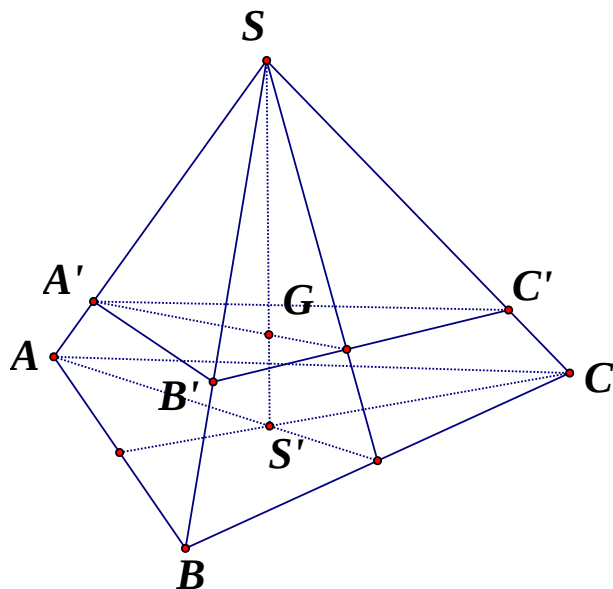
Kẻ $CK \perp AB$ tại $K \Rightarrow HK \perp AB \Rightarrow$ Góc giữa (ABC) và (ABD) là $\angle HKC = \alpha$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} CH \cdot S_{\Delta ABD} = \frac{1}{3} S_D \cdot CK \cdot \sin \alpha$$

$$\text{Mà: } S_C = \frac{1}{2} CK \cdot AB$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} S_D \frac{2S_C}{AB} \sin \alpha \Rightarrow V = \frac{2S_C \cdot S_D \cdot \sin \alpha}{3AB} \quad (\text{ĐPCM})$$

b)



Gọi S' là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow SG$ đi qua S' và: $\frac{SG}{SS'} = \frac{3}{4}$

Gọi V, V' lần lượt là thể tích các khối tứ diện $SABC, SA'B'C'$

Ta có: $dt(\Delta S'AB) = dt(\Delta S'BC) = dt(\Delta S'CA)$

$$\Rightarrow V_{SS'AB} = V_{SS'BC} = V_{SS'CA} = \frac{V}{3} \quad \text{mà} \quad \frac{V_{SGA'B'}}{V_{SS'AB}} = \frac{SG \cdot SA' \cdot SB'}{SS' \cdot SA \cdot SB}$$

$$\Rightarrow V_{SGA'B'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot V$$

Câu 1:

Tương tự: $V_{SGB'C'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot V; V_{SGA'C'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot V$

$$\text{Mà: } V' = V_{SGA'B'} + V_{SGB'C'} + V_{SGA'C'} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{4} \left(\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} + \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{SA' \cdot SB' \cdot SC'}{SA \cdot SB \cdot SC} = \frac{1}{4} \left(\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} + \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \right) \Rightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} = \frac{4}{a}$$

Câu 2:

(do $SA = SB = SC = a$)

$$Q = \frac{1}{SA' \cdot SB'} + \frac{1}{SB' \cdot SC'} + \frac{1}{SC' \cdot SA'} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} \right)^2 = \frac{16}{3a^2}$$

$$\Rightarrow \min Q = \frac{16}{3a^2} \text{ khi } SA' = SB' = SC' = \frac{3a}{4}$$

$\Leftrightarrow$ (P) qua G và song song với mặt phẳng (ABC)

ĐỀ SỐ 05

Câu 1. Hệ phương trình đã cho tương ứng với:

$$\begin{cases} 5x^2 + 5y^2 = 1 \\ 4x^2 + 3x + 3xy + y = \frac{57}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 5y^2 = 1 \\ 2x^2 - 2y^2 + 3xy + 3x + y = \frac{47}{25} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 5y^2 = 1 \\ (2x - y)(x + 2y) + (x + 2y) + (2x - y) = \frac{47}{25} \end{cases}$$

Đặt $a = 2x - y$, $b = x + 2y$

$$\text{Hệ đã cho trở thành: } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ab + a + b = \frac{47}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + b)^2 - 2ab = 1 \\ 2ab + 2(a + b) = \frac{94}{25} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = (a + b)^2 - 1 \\ (a + b + 1)^2 = \frac{144}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{7}{5} \\ ab = \frac{12}{25} \end{cases} \text{ (VN)}$$

$$\Leftrightarrow (a; b) = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right) \text{ hoặc } \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5} \right)$$

$$\Rightarrow (x; y) = \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5} \right) \text{ hoặc } \left(\frac{11}{25}; \frac{2}{25} \right) (TM)$$

Câu 2. Nếu $a < -1$ hoặc $a > 2$, khi đó $2 < x_2 < x_3 < \dots$

Giả sử tồn tại $\lim x_n = c$, ta có $c = c^2 - c \Leftrightarrow c = 0$ hoặc $c = 2$ (mâu thuẫn)

Suy ra $-1 \leq a \leq 2$.

(*) Ta chứng minh nếu tồn tại k sao cho $0 \leq x_k \leq 1$ thì dãy hội tụ. Thật vậy:

$$0 \leq x_k \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq x_{k+1} \leq 0, 0 \leq x_{k+2} \leq 1, -\frac{1}{4} \leq x_{k+3} \leq 0, 0 \leq x_{k+4} \leq 1, \dots$$

Dãy (x_{k+2i}) đơn điệu giảm vì $x_{k+2i+2} - x_{k+2i} = x_{k+2i}^3 (x_{k+2i} - 2) \leq 0$

Vì vậy tồn tại $\lim x_{k+2i+1} = c$, ta có $c = c + c^3(c - 2) \Leftrightarrow c = 0$ (vì $c \leq 1$).

Mặt khác: $\lim x_{k+2i+1} = \lim [(x_{k+2i})^2 - x_{k+2i}] = 0$. Vậy tồn tại $\lim x_n = 0$

(**) Ta chứng minh nếu tồn tại k sao cho $0 \leq x_k \leq 2$ thì dãy hội tụ.

Thật vậy: $0 \leq x_k \leq 2 \Rightarrow x_{k+1} \leq x_k \leq 2$. Nếu $x_{k+2} \leq x_{k+1} \leq 2$

Nếu $x_{k+1} \geq 0$, $\forall k$ thì dãy (x_{k+1}) đơn điệu giảm và bị chặn dưới do đó hội tụ.

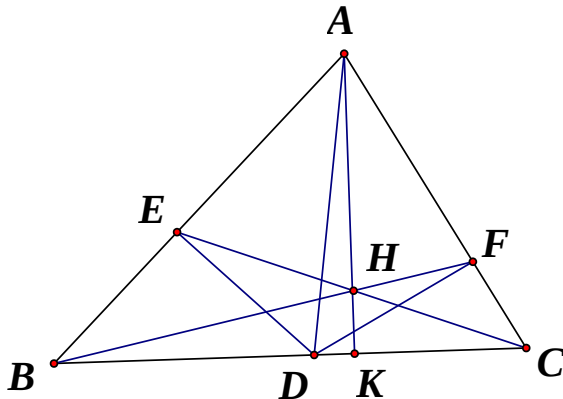
Nếu $x_{k+1} < 0$ thì $0 < x_{k+1-1} < 1$. Theo chứng minh (*) dãy (x_n) hội tụ.

Từ đó, $0 \leq a \leq 2$ thì $0 \leq x_1 \leq 2$, suy ra dãy có giới hạn.

Nếu $-1 < a \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x_2 \leq 2$, suy ra dãy có giới hạn.

Vậy điều kiện cần và đủ để dãy có giới hạn là $-1 \leq a \leq 2$

Câu 3.



Gọi K là hình chiếu của A trên BC.

Vì K, E, F theo thứ tự thuộc các đoạn BC, AB, AC nên :

$$\frac{KB}{KC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{EA}{EB} = - \frac{KB}{KC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{EA}{EB}$$

Từ giả thiết ta có $EA = FA$; $ED = FD$, do đó:

$$\frac{KB}{KC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{EA}{EB} = - \frac{KB}{KA} \cdot \frac{KA}{KC} \cdot \frac{FC}{FD} \cdot \frac{ED}{EB} = - \cot B \cdot \tan C \cdot \cot C \cdot \tan B = -1$$

Vậy theo định lý Ceva, với chú ý AK, BF, CE không thể đôi một song song, ta có AK, BF, CE đồng quy.

Điều đó có nghĩa là AK đi qua H. Vậy $AH \perp BC$

Câu 4. Trước hết ta chứng minh các bổ đề sau:

Bổ đề 1: Với a, b, c là ba cạnh của một tam giác có diện tích S thì:

$$2(ab+bc+ac) - a^2 - b^2 - c^2 \geq 4S\sqrt{3}$$

Chứng minh: Vận dụng kết quả $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+xz)$

$$[(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a)]^2 \geq 3p(p-a)(p-b)(p-c)$$

Ta có:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

(với)

$$\Rightarrow (p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) \geq S\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2(ab+bc+ca) - a^2 - b^2 - c^2 \geq 4S\sqrt{3}$$

Bổ đề 2: Với a, b, c là ba cạnh của một tam giác có diện tích S và x, y, z là các số thực dương.

$$\frac{xa^2}{y+z} + \frac{yb^2}{z+x} + \frac{zc^2}{x+y} \geq 2S\sqrt{3}.$$

Ta luôn có:

$$\left(\frac{a^2}{y+z} + \frac{b^2}{z+x} + \frac{c^2}{x+y} \right) [(y+z) + (z+x) + (x+y)] \geq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{2xa^2}{y+z} + \frac{2yb^2}{z+x} + \frac{2zc^2}{x+y} \geq 2(ab+bc+ac) - a^2 - b^2 - c^2$$

$$\frac{xa^2}{y+z} + \frac{yb^2}{z+c} + \frac{zc^2}{x+y} \geq 2S\sqrt{3}$$

Áp dụng Bổ đề 2 ta có

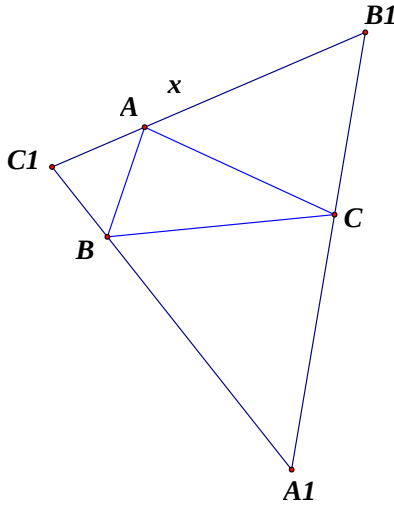
Trở lại bài toán:

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp của các góc A, B, C của ΔABC .

$$\Delta A_1BC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Ta có

$$\Rightarrow \frac{dt(A_1BC)}{dt(A_1B_1C_1)} = \left(\frac{a}{x} \right)^2 \Rightarrow \frac{ar_a}{2S'} = \left(\frac{a}{x} \right)^2$$



Trong đó $B_1C_1 = x$, $S' = dt(A_1B_1C_1)$ và r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A

$$\Rightarrow \frac{(b+c-a)a^2}{b+c} = \frac{r_a(b+c-a)x^2}{S'(b+c)} = \frac{r_a(p-a)ax^2}{S'(b+c)} \Rightarrow \frac{(b+c-a)a^2}{b+c} = \frac{S}{S'} \cdot \frac{ax^2}{b+c}$$

$$\frac{(c+a-b)b^2}{c+a} = \frac{S}{S'} \cdot \frac{by^2}{c+a} \quad \frac{(a+b-c)b^2}{a+b} = \frac{S}{S'} \cdot \frac{cz^2}{a+b} \text{ với } C_1A_1 = y, A_1B_1 = z$$

Tương tự ,

$$\Rightarrow \frac{(b+c-a)a^2}{b+c} + \frac{(c+a-b)b^2}{c+a} + \frac{(a+b-c)b^2}{a+b} = \frac{S}{S'} \left[\frac{ax^2}{b+c} + \frac{by^2}{c+a} + \frac{cz^2}{a+b} \right]$$

Áp dụng Bô đề 2, đối với tam giác $A_1B_1C_1$ ta có

$$\frac{ax^2}{b+c} + \frac{by^2}{c+a} + \frac{cz^2}{a+b} \geq 2S'\sqrt{3} \Rightarrow \frac{(b+c-a)a^2}{b+c} + \frac{(c+a-b)b^2}{a+c} + \frac{(a+b-c)c^2}{a+b} \geq 2S\sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Câu 5. Với mỗi $1 \leq k \leq n$ đặt $E_k = \{A \subset M \mid |A| = k\}$ và $x_k = \sum_{A \in E_k} (\min A + \max A - |A|)$

Khi đó $T = \sum_{k=1}^n x_k$. Với mỗi $A = \{a_1; a_2; \dots; a_k\} \in E_k$ đặt $A^* = \{n+1-a_1; n+1-a_2; \dots; n+1-a_k\}$.

Ta có: $A^* \in E_k$, $(A^*)^* = A \Rightarrow E_k = \{A \subset M \mid |A| = k\} = \{A^* \mid A \subset M, |A| = k\}$

Ta có:

$$\Rightarrow 2x_k = \sum_{A \in E_k} (\min A + \max A + \min A^* + \max A^* - 2|A|)$$

Giả sử $\min A = a_1$, $\max A = a_k$. Khi đó $\min A^* = n+1-a_k$, $\max A^* = n+1-a_1$.

$$\min A + \max A + \min A^* + \max A^* - 2|A| = 2(n+1) - 2k$$

Do đó

$$\Rightarrow 2x_k = \sum_{A \in E_k} 2(n+1-k) = 2(n+1-k)C_n^k \Rightarrow x_k = (n+1-k)C_n^k \Rightarrow T = \sum_{k=1}^n (n+1-k)C_n^k$$

$$x(x+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n+1-k} \Rightarrow (x+1)^n + nx(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^n (n+1-k)C_n^k x^{n-k}$$

Ta có:

$$2^n + n.2^{n-1} = \sum_{k=0}^n (n+1-k)C_n^k = n+1 - T.$$

Thay $x=1$, ta có $\Rightarrow T = 2^n + n.2^{n-1} - n - 1.$

ĐỀ SỐ 04

Câu 1. a) Điều kiện: $-1 \leq x \leq 2$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow x^2 - x - \sqrt{x-1} - \sqrt{2-x} = -1 - \sqrt{2}$ (1)

Xét $f(x) = x^2 - x - \sqrt{x+1} - \sqrt{2-x}$ với $x \in [-1; 2]$

$$f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (2x-1) \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}\sqrt{2-x}(\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x})} \right], f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên:

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$2 - \sqrt{3}$	$-\frac{1}{4} - \sqrt{6}$	$2 - \sqrt{3}$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có đúng 2 nghiệm

Dễ nhận thấy $x = 0; x = 1$ là 2 nghiệm của phương trình (1).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{0; 1\}$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với: $(m+2)x - m \geq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow m(x-1) \geq x^2 + 1$ (*)

Nhận thấy $x = 0$ không nghiệm đúng bất phương trình (*)

+) Với $x \in [-2; 1)$. Ta có bất phương trình (*) $\Leftrightarrow m \leq \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ (1)

+) Với $x \in (1; 2]$. Ta có bất phương trình (*) $\Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ (2)

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ với $x \in [-2; 1) \cup (1; 2]$

Có $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$ (loại)

Bảng biến thiên:

x	-2	$1 - \sqrt{2}$	1	2
y'	+	0	-	-
y	$-\frac{5}{3}$	$2 - 2\sqrt{2}$	$-\infty$	$+\infty$

Bất phương trình (*) có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2] \Leftrightarrow$ hoặc bất phương trình (1) có nghiệm

thuộc $[-2; 1)$ hoặc bất phương trình (2) có nghiệm thuộc $(1; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 - 2\sqrt{2} \\ m \geq 5 \end{cases}$

Vậy $m \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{2}] \cup [5; +\infty)$ là tất cả các giá trị cần tìm

Câu 2. Điều kiện xác định của hệ phương trình là: $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} (*)$

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} y^3 + y = (x + 1)^3 + (x + 1) & (1) \\ \sqrt{1 - x^2} + 1 = \sqrt{y} + \sqrt{2 - y} & (2) \end{cases}$

Từ (*) ta có $\begin{cases} x + 1 \in [0; 2] \\ y \in [0; 2] \end{cases}$ Xét $f(t) = t^3 + t$ $f(t) = 3t^3 + 1 > 0 \forall t$

Hàm số $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên đoạn $[0; 2]$ nên phương trình (1) $\Leftrightarrow y = x + 1$, thế vào phương trình (2) ta được: $\sqrt{1 - x^2} + 1 = \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x} \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$ (thỏa mãn(*))

Câu 3.a) Điều kiện: $\begin{cases} x > -2y \\ x > 2y \end{cases} \Rightarrow x > 2|y| \Rightarrow x > 0$

Ta có: $\log_4(x + 2y) + \log_4(x - 2y) = 1 \Leftrightarrow \log_4(x^2 - 4y^2) = 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4y^2 + 4}$ (do $x > 0$) $\Rightarrow 2x - |y| = 2\sqrt{4|y|^2 + 4} - |y|$

Đặt $t = |y|, t \geq 0$

Xét: $f(t) = 2\sqrt{4t^2 + 4} - t$ với $t \geq 0 \Rightarrow f(t) = \frac{8t}{\sqrt{4t^2 + 4}} - 1 = \frac{8t - \sqrt{4t^2 + 4}}{\sqrt{4t^2 + 4}}$

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{15}} \text{ (do } t \geq 0 \text{)}$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	4	$\sqrt{15}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq \sqrt{15} \Rightarrow 2x - |y| \geq \sqrt{15}$ (ĐPCM)

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{8}{\sqrt{15}}; y = \pm \frac{1}{\sqrt{15}}$

b) Từ giả thiết và $ab + bc + ca = \frac{1}{2}[(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2] \Rightarrow ab + bc + ca = \frac{1}{4}(a+b+c)^2$

Do đó
$$P = \frac{4(a^3 + b^3 + c^3)}{(a+b+c)^3} = \frac{1}{16} \left[\left(\frac{4a}{a+b+c} \right)^3 + \left(\frac{4b}{a+b+c} \right)^3 + \left(\frac{4c}{a+b+c} \right)^3 \right]$$

Đặt $x = \frac{4a}{a+b+c}; y = \frac{4b}{a+b+c}; z = \frac{4c}{a+b+c}$

Thì
$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+yz+xz=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=4-x \\ yz=x^2-4x+4 \end{cases}$$

Vì $(y+z)^2 \geq 4yz$ nên $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$

Ta có
$$P = \frac{1}{16}(x^3 + y^3 + z^3) = \frac{1}{16}[x^3 + (y+z)^3 - 3yz(y+z)] \Rightarrow P = \frac{1}{16}(3x^3 - 12x^2 + 12x + 16)$$

Xét: $f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 12x + 16$ với: $x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]$

$$\Rightarrow f'(x) = 9x^2 - 24x + 12 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ thoả mãn } x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]$$

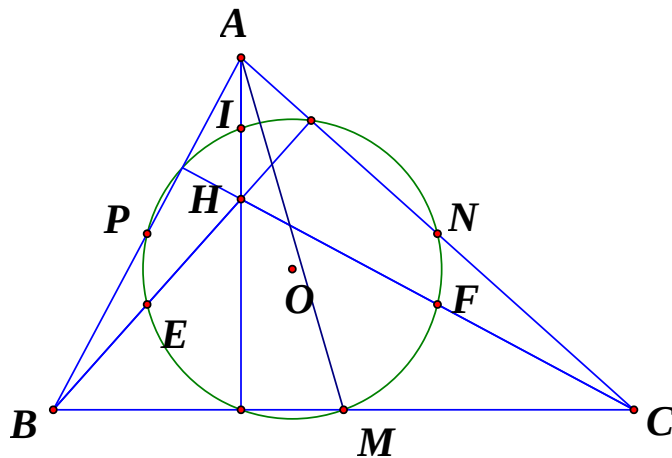
Có $f(0) = 16, f(2) = 16, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{176}{9}, f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{176}{9}$

$$\Rightarrow \text{Trên } \left[0; \frac{8}{3}\right]: \min f(x) = 16, \max f(x) = \frac{176}{9}$$

$$\Rightarrow \min P = 1, \text{ chẳng hạn khi: } a = 0, b = c \neq 0$$

$$\max P = \frac{11}{9}, \text{ chẳng hạn khi: } a = b, c = 4a, a \neq 0$$

Câu 4.



Gọi trung điểm của HA, HB, HC, BC, CA, AB lần lượt là: I, E, F, M, N, P

Ta có: $EH \perp AC \Rightarrow EH \perp IF$

Mà $MF \parallel EH \Rightarrow MF \perp IF \Rightarrow \angle IFM = 90^\circ$

Tương tự $\Rightarrow \angle IFM = 90^\circ$ nên M thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle IEF$

Tương tự ta có N, P cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle IEF$

Dễ thấy: $\triangle ABC$ là ảnh của $\triangle MNP$ qua phép vị tự tâm G tỉ số $k = -2$

$\Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là ảnh của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP$

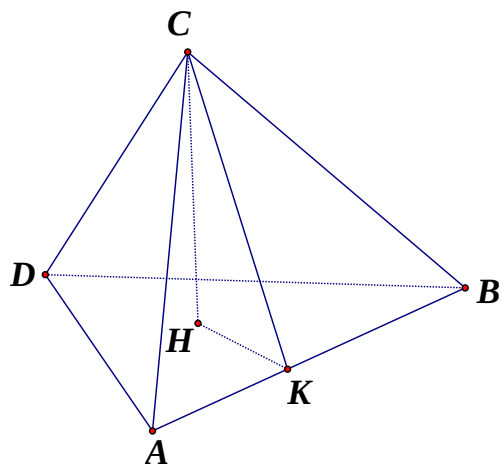
Ta có đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP$ có phương trình: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

Có tâm $K(1; -2)$, $R = 1$. Gọi K_1, R_1 là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ thì:

$$GK_1 = -2GK, R_1 = 2R, \Rightarrow K_1(1; 10), R_1 = 2$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là: $(x - 1)^2 + (y - 10)^2 = 4$

Câu 5.a)



Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (ABD).

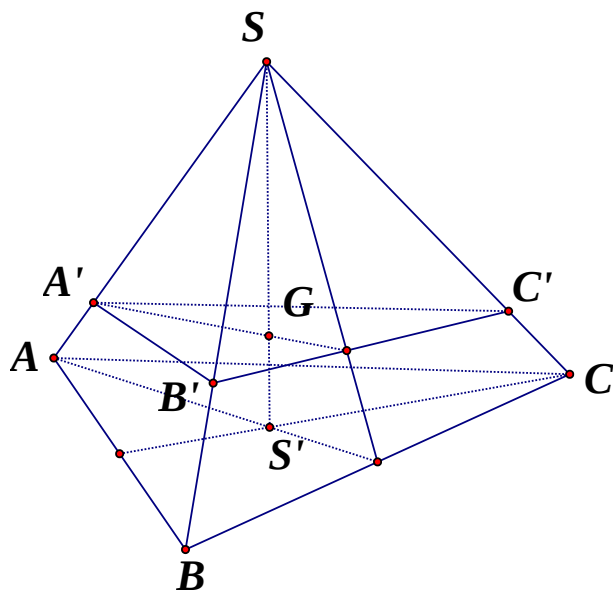
Kẻ $CK \perp AB$ tại K $\Rightarrow HK \perp AB \Rightarrow$ Góc giữa (ABC) và (ABD) là $\angle KH = \alpha$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} CH \cdot S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} S_D \cdot CK \cdot \sin \alpha$$

Mà: $S_C = \frac{1}{2} CK \cdot AB$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} S_D \frac{2S_C}{AB} \sin \alpha \Rightarrow V = \frac{2S_C \cdot S_D \cdot \sin \alpha}{3AB} \quad (\text{ĐPCM})$$

b)



Gọi S' là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow SG$ đi qua S' và: $\frac{SG}{SS'} = \frac{3}{4}$

Gọi V, V' lần lượt là thể tích các khối tứ diện $SABC, SA'B'C'$

Ta có: $dt(\Delta S' AB) = dt(\Delta S' BC) = dt(\Delta S' CA)$

$$\Rightarrow V_{SS'AB} = V_{SS'BC} = V_{SS'CA} = \frac{V}{3} \text{ mà } \frac{V_{SGA'B'}}{V_{SS'AB}} = \frac{SG.SA'.SB'}{SS'.SA.SB'}$$

$$\Rightarrow V_{SGA'B'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot V$$

Tương tự: $V_{SGB'C'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot V; V_{SGA'C'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot V$

Mà: $V' = V_{SGA'B'} + V_{SGB'C'} + V_{SGA'C'} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{4} \left(\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} + \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \right)$

$$\Rightarrow \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC} = \frac{1}{4} \left(\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} + \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \right) \Rightarrow \frac{SA'}{SA'} + \frac{SB'}{SB'} + \frac{SC'}{SC'} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} = \frac{4}{a}$$

(do $SA = SB = SC = a$)

$$Q = \frac{1}{SA'.SB'} + \frac{1}{SB'.SC'} + \frac{1}{SC'.SA'} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} \right)^2 = \frac{16}{3a^2}$$

$$\Rightarrow \min Q = \frac{16}{3a^2} \text{ khi } SA' = SB' = SC' = \frac{3a}{4}$$

$\Leftrightarrow$ (P) qua G và song song với mặt phẳng (ABC)

ĐỀ SỐ 05

Câu 1. Hệ phương trình đã cho tương ứng với:

$$\begin{cases} 5x^2 + 5y^2 = 1 \\ 4x^2 + 3x + 3xy + y = \frac{57}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 5y^2 = 1 \\ 2x^2 - 2y^2 + 3xy + 3x + y = \frac{47}{25} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 5y^2 = 1 \\ (2x - y)(x + 2y) + (x + 2y) + (2x - y) = \frac{47}{25} \end{cases}$$

Đặt $a = 2x - y$, $b = x + 2y$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ab + a + b = \frac{47}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + b)^2 - 2ab = 1 \\ 2ab + 2(a + b) = \frac{94}{25} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = (a+b)^2 - 1 \\ (a+b+1)^2 = \frac{144}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \frac{7}{5} \\ ab = \frac{12}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = -\frac{17}{5} \\ ab = \frac{132}{25} \end{cases} (VN)$$

$$\Leftrightarrow (a;b) = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right) \text{ hoặc } \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$$

$$\Rightarrow (x;y) = \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right) \text{ hoặc } \left(\frac{11}{25}; \frac{2}{25}\right) (TM)$$

Câu 2. Nếu $a < -1$ hoặc $a > 2$, khi đó $2 < x_2 < x_3 < \dots$

Giả sử tồn tại $\lim x_n = c$, ta có $c = c^2 - c \Leftrightarrow c = 0$ hoặc $c = 2$ (mâu thuẫn)

Suy ra $-1 \leq a \leq 2$.

(*) Ta chứng minh nếu tồn tại k sao cho $0 \leq x_k \leq 1$ thì dãy hội tụ. Thật vậy:

$$0 \leq x_k \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq x_{k+1} \leq 0, 0 \leq x_{k+2} \leq 1, -\frac{1}{4} \leq x_{k+3} \leq 0, 0 \leq x_{k+4} \leq 1, \dots$$

Dãy (x_{k+2i}) đơn điệu giảm vì $x_{k+2i+2} - x_{k+2i} = x_{k+2i}^3 (x_{k+2i} - 2) \leq 0$

Vì vậy tồn tại $\lim x_{k+2i+1} = c$, ta có $c = c + c^3 (c - 2) \Leftrightarrow c = 0$ (vì $c \leq 1$).

Mặt khác: $\lim x_{k+2i+1} = \lim \left[(x_{k+2i})^2 - x_{k+2i} \right] = 0$. Vậy tồn tại $\lim x_n = 0$

(**) Ta chứng minh nếu tồn tại k sao cho $0 \leq x_k \leq 2$ thì dãy hội tụ.

Thật vậy: $0 \leq x_k \leq 2 \Rightarrow x_{k+1} \leq x_k \leq 2$. Nếu $x_{k+2} \leq x_{k+1} \leq 2$

Nếu $x_{k+1} \geq 0$, $\forall k$ thì dãy (x_{k+1}) đơn điệu giảm và bị chặn dưới do đó hội tụ.

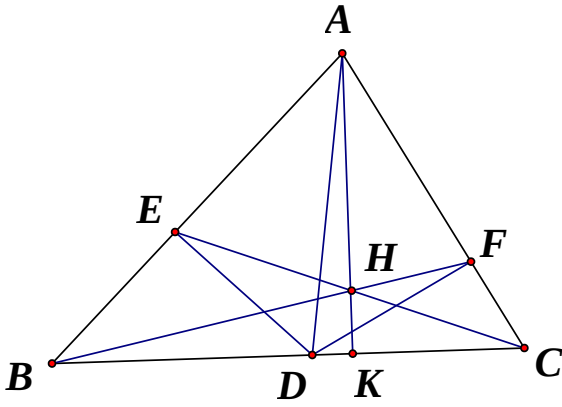
Nếu $x_{k+1} < 0$ thì $0 < x_{k+1-1} < 1$. Theo chứng minh (*) dãy (x_n) hội tụ.

Từ đó, $0 \leq a \leq 2$ thì $0 \leq x_1 \leq 2$, suy ra dãy có giới hạn.

Nếu $-1 < a \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x_2 \leq 2$, suy ra dãy có giới hạn.

Vậy điều kiện cần và đủ để dãy có giới hạn là $-1 \leq a \leq 2$

Câu 3.



Gọi K là hình chiếu của A trên BC.

Vì K, E, F theo thứ tự thuộc các đoạn BC, AB, AC nên :

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = - \frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}$$

Từ giả thiết ta có EA = FA; ED = FD, do đó:

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = - \frac{\overline{KB}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{KA}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FD}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{EB}} = - \cot B \cdot \tan C \cdot \cot C \cdot \tan B = -1$$

Vậy theo định lý Ceva, với chú ý AK, BF, CE không thể đôi một song song, ta có AK, BF, CE đồng quy.

Điều đó có nghĩa là AK đi qua H. Vậy AH ⊥ BC

Câu 4. Trước hết ta chứng minh các bổ đề sau:

Bổ đề 1: Với a, b, c là ba cạnh của một tam giác có diện tích S thì:

$$2(ab + bc + ac) - a^2 - b^2 - c^2 \geq 4S\sqrt{3}$$

Chứng minh: Vận dụng kết quả $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz)$

$$[(p - a)(p - b) + (p - b)(p - c) + (p - c)(p - a)]^2 \geq 3p(p - a)(p - b)(p - c)$$

Ta có:

$$(với \ p = \frac{a+b+c}{2})$$

$$\Rightarrow (p - a)(p - b) + (p - b)(p - c) + (p - c)(p - a) \geq S\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2 \geq 4S\sqrt{3}$$

Bổ đề 2: Với a, b, c là ba cạnh của một tam giác có diện tích S và x, y, z là các số thực dương.

$$\frac{xa^2}{y+z} + \frac{yb^2}{z+x} + \frac{zc^2}{x+y} \geq 2S\sqrt{3}.$$

Ta luôn có:

$$Ta \ có \left(\frac{a^2}{y+z} + \frac{b^2}{z+x} + \frac{c^2}{x+y} \right) [(y+z) + (z+x) + (x+y)] \geq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{2xa^2}{y+z} + \frac{2yb^2}{z+x} + \frac{2zc^2}{x+y} \geq 2(ab+bc+ac) - a^2 - b^2 - c^2$$

$$\frac{xa^2}{y+z} + \frac{yb^2}{z+c} + \frac{zc^2}{x+y} \geq 2S\sqrt{3}$$

Áp dụng Bổ đề 2 ta có

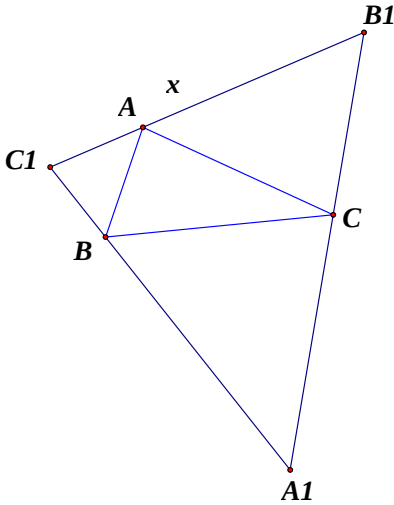
Trở lại bài toán:

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp của các góc A, B, C của ΔABC .

$$\Delta A_1BC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Ta có

$$\Rightarrow \frac{dt(A_1BC)}{dt(A_1B_1C_1)} = \left(\frac{a}{x}\right)^2 \Rightarrow \frac{ar_a}{2S'} = \left(\frac{a}{x}\right)^2$$



Trong đó $B_1C_1 = x, S' = dt(A_1B_1C_1)$ và r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A

$$\Rightarrow \frac{(b+c-a)a^2}{b+c} = \frac{ar_a(b+c-a)x^2}{S'(b+c)} = \frac{r_a(p-a)ax^2}{S'(b+c)} \Rightarrow \frac{(b+c-a)a^2}{b+c} = \frac{S}{S'} \cdot \frac{ax^2}{b+c}$$

$$\frac{(c+a-b)b^2}{c+a} = \frac{S}{S'} \cdot \frac{by^2}{c+a}, \quad \frac{(a+b-c)c^2}{a+b} = \frac{S}{S'} \cdot \frac{cz^2}{a+b} \text{ với } C_1A_1 = y, A_1B_1 = z$$

Tương tự

$$\Rightarrow \frac{(b+c-a)a^2}{b+c} + \frac{(c+a-b)b^2}{c+a} + \frac{(a+b-c)c^2}{a+b} = \frac{S}{S'} \left[\frac{ax^2}{b+c} + \frac{by^2}{c+a} + \frac{cz^2}{a+b} \right]$$

Áp dụng Bổ đề 2, đối với tam giác $A_1B_1C_1$ ta có

$$\frac{ax^2}{b+c} + \frac{by^2}{c+a} + \frac{cz^2}{a+b} \geq 2S'\sqrt{3} \Rightarrow \frac{(b+c-a)a^2}{b+c} + \frac{(c+a-b)b^2}{a+c} + \frac{(a+b-c)c^2}{a+b} \geq 2S\sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Câu 5. Với mỗi $1 \leq k \leq n$ đặt $E_k = \{A \subset M \mid |A| = k\}$ và $x_k = \sum_{A \in E_k} (\min A + \max A - |A|)$

Khi đó $T = \sum_{k=1}^n x_k$. Với mỗi $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\} \in E_k$ đặt $A^* = \{n+1-a_1; n+1-a_2; \dots; n+1-a_n\}$.

Ta có: $A^* \in E_k, (A^*)^* = A \Rightarrow E_k = \{A \subset M \mid |A| = k\} = \{A^* \mid A \subset M, |A| = k\}$

$$\Rightarrow 2x_k = \sum_{A \in E_k} (\min A + \max A + \min A^* + \max A^* - 2|A|)$$

Giả sử $\min A = a_1, \max A = a_k$. Khi đó $\min A^* = n+1-a_k, \max A^* = n+1-a_1$.

Do đó $\min A + \max A + \min A^* + \max A^* - 2|A| = 2(n+1) - 2k$

$$\Rightarrow 2x_k = \sum_{A \in E_k} 2(n+1-k) = 2(n+1-k)C_n^k \Rightarrow x_k = (n+1-k)C_n^k \Rightarrow T = \sum_{k=1}^n (n+1-k)C_n^k$$

$$x(x+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n+1-k} \Rightarrow (x+1)^n + nx(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^n (n+1-k)C_n^k x^{n-k}$$

Ta có:

$$\text{Thay } x=1, \text{ ta có } 2^n + n.2^{n-1} = \sum_{k=0}^n (n+1-k)C_n^k = n+1-T. \text{ Vậy } T = 2^n + n.2^{n-1} - n - 1.$$

ĐỀ SỐ 06

Câu 1. Đặt $k = c^2 + PQd^2; h = 2cd$. Ta có $k^2 - PQh^2 = (c^2 - PQd^2)^2 = 1$. Vậy $(k; h)$ là nghiệm của phương trình $x^2 - PQy^2 = 1$. Do đó $k \geq a; h \geq b$. Ta chứng minh chiều ngược lại.

Từ $a^2 - PQb^2 = 1$ và $c^2 - PQd^2 = -1 \Rightarrow (a^2 - PQb^2)(c^2 - PQd^2) = -1$ hay

$$(ac - PQbd)^2 - PQ(ad - bc)^2 = -1. \text{ Đặt } m = |ac - PQbd|; n = |ad - bc| \text{ ta có } m^2 - PQn^2 = -1.$$

Do m, n nguyên dương nên $m^2 \geq c^2$ hay $(ac - PQbd)^2 \geq c^2 \Leftrightarrow (ac)^2 + (PQbd)^2 - c^2 \geq 2PQabcd$

$$\Leftrightarrow c^2(a^2 - 1) + (PQbd)^2 \geq 2PQabcd \Rightarrow PQb^2c^2 + (PQbd)^2 \geq 2PQabcd \Rightarrow b(c^2 + PQd^2) \geq 2acd$$

$$\Rightarrow bk \geq ah \Rightarrow (bk)^2 \geq (ah)^2 \Rightarrow b^2(1 + PQh^2) \geq h^2(1 + PQb^2).$$

Điều này chứng tỏ $b \geq h \Rightarrow b = h \Rightarrow a = k$.

Câu 2. Thay $x=0$ vào (i) ta có $f(y^2 + 2f(0)) = f^2(y)$ (1)

Thay y bởi $\frac{y}{x}$ vào (i) ta có $f\left(x^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2f(y)\right) = f^2\left(x + \frac{y}{x}\right)$ (2)

Theo (1) ta có $f^2\left(x + \frac{y}{x}\right) = f\left(\left(x + \frac{y}{x}\right)^2 + 2f(0)\right)$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $f\left(x^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2f(y)\right) = f\left(\left(x + \frac{y}{x}\right)^2 + 2f(0)\right) \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R}$ (4)

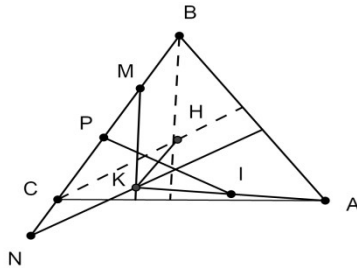
Với mỗi $y_0 \in \mathbb{R}$, chọn $x \in \mathbb{R}$ sao cho
$$\begin{cases} x^2 + \frac{y_0^2}{x^2} + 2f(y_0) > 2010 \\ \left(x + \frac{y_0}{x}\right)^2 + 2f(0) > 2010 \end{cases} \quad (**)$$

Áp dụng (ii) vào (4) ta có $x^2 + \left(\frac{y_0}{x}\right)^2 + 2f(y) = \left(x + \frac{y_0}{x}\right)^2 + 2f(0) \Leftrightarrow f(y_0) = y_0 + f(0)$ (5)

Thay (5) vào (1) ta có $f(0) = 0 \Rightarrow f(y_0) = y_0, \forall y_0 \in \mathbb{R}$.

Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào thử lại thấy thỏa mãn.

Câu 3.



Từ giả thiết ta có $MN = BC \Leftrightarrow BM = CN$ trong đó P là trung điểm của BN cũng là trung điểm của MC .

Gọi H, O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Xét phép tịnh tiến theo $\vec{BM}$ biến B thành M, C thành N, BH thành d_1, CH thành d_2 . Vì $BH \cap CH = H, d_1 \cap d_2 = K$ nên T_{BM} biến H thành $K \Rightarrow HK = BM = CN$.

Vì P, I tương ứng là trung điểm của MC và KA nên:

$$2PI = MA + CK = MC + CA + CK = MK + CA = BH + CA$$

$$\Rightarrow 2PI = OH - OB + OA - OC = (OA + OB + OC) - OB + OA - OC \quad (\text{Do } OH = OA + OB + OC)$$

Nên suy ra: $PI = OA$.

Vậy I là ảnh của P qua T_{OA} mà $P \in BC$ nên I nằm trên đường thẳng d cố định là ảnh của đường thẳng BC qua T_{OA} .

Câu 4. Áp dụng BĐT AM-GM, ta có:

$$\frac{a^2}{b+2c} + \frac{(b+2c)a^2}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+2c} \cdot \frac{(b+2c)a^2}{9}} = \frac{2a^2}{3}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{b^2}{c+2a} + \frac{(c+2a)b^2}{9} \geq \frac{2b^2}{3}, \quad \frac{c^2}{a+2b} + \frac{(a+2b)c^2}{9} \geq \frac{2c^2}{3}.$$

$$\Rightarrow F = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b} \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}[a^2(b+2c) + b^2(c+2a) + c^2(a+2b)] \quad (*)$$

Lại áp dụng AM-GM, ta có:

$$a^2c + b^2a + c^2b \leq \frac{a^3 + a^3 + c^3}{3} + \frac{b^3 + b^3 + a^3}{3} + \frac{c^3 + c^3 + b^3}{3} = a^3 + b^3 + c^3 \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ suy ra: } F \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$F \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Đặt $t = \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$ từ giả thiết ta có:

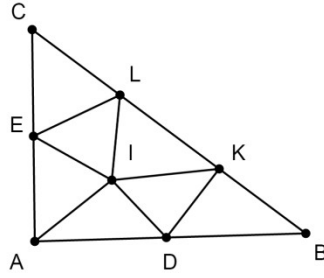
$$25(a^2 + b^2 + c^2) - 48 = 9(a^4 + b^4 + c^4) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 \leq 0 \Rightarrow 3 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{16}{3}$$

$$\text{Do đó: } F \geq \frac{2}{9}t^2 - \frac{1}{27}t^3 = f(t) \text{ với } t \in [3; 4] \quad (***) \text{ . Mà } \min_{t \in [3; 4]} f(t) = f(3) = 1 \quad (***)$$

Từ (***) và (****) suy ra $F \geq 1$. Vậy $\min F = 1$ xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 5.



Ta chia các đỉnh của n tam giác nhọn thành ba tập hợp.

Tập X gồm ba đỉnh là ba đỉnh của tam giác ABC .

Tập Y gồm b đỉnh hoặc nằm trên cạnh của tam giác ABC (khác A, B, C) hoặc nằm trên cạnh của các tam giác nhọn nhưng không phải là đầu mút của các cạnh đó.

Tập Z gồm c đỉnh còn lại.

Số các góc của n tam giác nhọn là $3n$ và tổng số đo của các góc là $n\pi$.

Nhận xét:

+) Các đỉnh thuộc X có A phải lặp lại ít nhất 2 lần, B và C ít nhất 1 lần.

+) Các đỉnh thuộc Y phải lặp lại ít nhất 3 lần vì $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

+) Các đỉnh thuộc Z phải lặp lại ít nhất 5 lần vì $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.

Ta có
$$\begin{cases} 3n \geq 4 + 3b + 5c \\ n\pi = \pi + b\pi + 2c\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n \geq 4 + 3b + 5c \\ n = 1 + b + 2c \end{cases} \Rightarrow 3(1 + b + 2c) \geq 4 + 3b + 5c \Rightarrow c \geq 1$$

Gọi M là một điểm thuộc Z , suy ra có ít nhất 5 tam giác chung đỉnh M . Do đó $n \geq 5$.

Nếu
$$n = 5 \Rightarrow \begin{cases} 15 \geq 4 + 3b + 5c \\ 5 = 1 + b + 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0, c = 2 \\ b = 2, c = 1 \end{cases}$$

+) $b = 0, c = 2$ suy ra chỉ có 2 loại đỉnh là X, Z . Vì $\begin{cases} 15 = 5 + 5.2 \\ 5 = 1 + 2.2 \end{cases}$ nên loại đỉnh X lặp tối đa 5 lần, suy ra chỉ có tối đa hai đỉnh thuộc tập X lặp lại ít nhất 2 lần. Do đó M chỉ được nối với hai đỉnh của ΔABC và đỉnh còn lại của tập hợp Z , suy ra M chỉ có chung 3 góc (mâu thuẫn).

+) $b = 2, c = 1$ suy ra có 3 loại đỉnh X, Y và duy nhất đỉnh M thuộc loại Z .

Vì $\begin{cases} 15 = 4 + 3.2 + 5.1 \\ 5 = 1 + 2 + 2.1 \end{cases}$ nên loại đỉnh X lặp 4 lần, suy ra chỉ có đỉnh A lặp 2 lần. Do đó M chỉ được nối với đỉnh A, hai đỉnh thuộc tập hợp Y, suy ra M chỉ có chung 3 góc (mâu thuẫn).

Từ đó $n > 5$. Nếu $n = 6 \Rightarrow \begin{cases} b = 1, c = 2 \\ b = 3, c = 1 \end{cases}$.

+) $b = 1, c = 2$ suy ra có 3 loại đỉnh là X, Y, Z vì $\begin{cases} 18 = 5 + 3.1 + 5.2 \\ 6 = 1 + 3 + 2 \end{cases}$

Do đó loại đỉnh X lặp lại tối đa 5 lần, suy ra chỉ có tối đa 2 đỉnh thuộc X lặp ít nhất 2 lần. Suy ra M chỉ được nối với hai đỉnh của ΔABC và một đỉnh thuộc tập Y, đỉnh còn lại thuộc tập Z, hay M chỉ có chung 4 góc (mâu thuẫn).

+) $b = 3, c = 1$ suy ra có ba loại đỉnh là X, Y và duy nhất đỉnh M thuộc tập Z.

Vì $\begin{cases} 18 = 4 + 3.3 + 5.1 \\ 6 = 1 + 3 + 2 \end{cases}$ nên loại đỉnh thuộc tập X lặp tối đa 4 lần. Do đó chỉ có tối đa đỉnh A được lặp lại. Suy ra M được nối với đỉnh A và 3 đỉnh thuộc tập Y, hay M chỉ có chung 4 góc (mâu thuẫn). Từ đó $n > 6$.

Với $n = 7$ ta có thể chia như sau:

Lấy D, E là trung điểm của AB, AC và K, L nằm trên cạnh BC sao cho $BK = BD, CE = CL$ và I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC . Ta có 7 tam giác nhọn $BKD, CEL, AID, AIE, EIL, LIK, KID$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 7.

ĐỀ SỐ 07

Câu 1. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left[6 \sin x - 2(3 \sin x - 4 \sin^3 x + 1) \right]^3 = 27(6 \sin x - 1) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (8 \sin^3 x + 1)^3 = 27(6 \sin x - 1) \Leftrightarrow 8 \sin^3 x + 1 = 3\sqrt[3]{6 \sin x - 1}$$

Đặt $2 \sin x = t, (|t| \leq 2)$. Phương trình trở thành $t^3 + 1 = 3\sqrt[3]{3t - 1}$.

Đặt $u = \sqrt[3]{3t - 1}$. Ta có hệ: $\begin{cases} u^3 + 1 = 3t \\ t^3 + 1 = 3u \end{cases} \Rightarrow t = u$.

Với $t = u$ ta có phương trình $t^3 - 3t + 1 = 0$. Khi đó, theo cách đặt ta có:

$$8\sin^3 x - 6\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 2. Điều kiện $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\text{Hệ trở thành: } \begin{cases} x^3 + 2x^2 + 3x = 3y^2 + 3 & (1) \\ y^3 + 2y^2 + 3y = 3z^2 + 3 & (2) \\ z^3 + 2z^2 + 2z = 3z^2 + 3 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } f(t) = t^3 + 2t^2 + 3t, t \in \mathbb{R} \text{ và } g(t) = 3t^2 + 3, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 3t^2 + 4t + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \text{ và } g'(t) = 6t \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nên f, g là hai hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giả sử (x, y, z) là nghiệm của hệ, không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y$.

Từ (1) và (2) ta có $g(y) \geq g(z) \Rightarrow y \geq z$, nên từ (2) và (3) ta có $g(z) \geq g(x) \Rightarrow z \geq x$.

Từ đó ta có $x = y = z$. Thay vào hệ phương trình ta được hệ có 3 nghiệm

$$(1; 1; 1), \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\text{Câu 3. a) Ta có } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}(u_n^2 + u_n + 4) - \frac{5}{5}u_n = \frac{1}{5}(u_n - 2)^2 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy (u_n) là dãy tăng. Từ đó suy ra $u_n \geq u_1 = 3, \forall n = 1, 2, \dots$

Mặt khác nếu dãy (u_n) bị chặn trên thì nó sẽ có giới hạn.

Cộng từng vế tương ứng của 3 bất đẳng thức trên ta được.

$$\text{Giả sử } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \quad (a \geq 3)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5}(u_n^2 + u_n + 4) \Rightarrow a = \frac{1}{5}(a^2 + a + 4) \Leftrightarrow a = 2.$$

Điều này không thể xảy ra vì $a \geq 3$. Vậy dãy (u_n) không bị chặn trên.

b) Theo a, $u_{k+1} = \frac{1}{5}(u_k^2 + u_k + 4) \Leftrightarrow 5(u_{k+1} - 2) = (u_k - 2)(u_k + 3)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{k+1} - 2} = \frac{5}{(u_k - 2)(u_k + 3)} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{k+1} - 2} = \frac{1}{u_k - 2} - \frac{1}{u_{k+1} - 2}$$

Do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1 - 2} - \frac{1}{u_{n+1} - 2} \right) = 1.$

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1.$

Câu 4. Gọi hình chóp n -giác là: $S.A_1A_2...A_n$. Xét hình chóp trong đó O là tâm của đa giác đáy.

M là trung điểm của cạnh A_1A_2 . Khi đó, $SO \perp (OA_1M), OM \perp A_1A_2$.

Góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là $\angle SMO = \alpha$.

Góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là $\angle SA_1O = \alpha$.

Ta có $\angle A_1OM = \varphi = \frac{\pi}{n}$. Đặt $OA_1 = a, OM = b, OS = h$.

Gọi OG là phân giác trong của góc $\angle A_1OM$

Khi đó: $\sin^2 \alpha = \frac{h^2}{h^2 + b^2}; \sin^2 \beta = \frac{h^2}{h^2 + a^2}; \tan \frac{\varphi}{2} = \tan \frac{\pi}{2n} = \frac{ME}{b}$.

Do $\frac{ME}{b} = \frac{A_1E}{a}$ nên $\frac{ME}{b} = \frac{ME + A_1E}{a + b} = \frac{MA_1}{a + b} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{(a + b)^2}$

$$\Leftrightarrow (h^2 + a^2)(h^2 + b^2) \geq h^2(a + b)^2 \Leftrightarrow (ab - h^2)^2 \geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ab = h^2 \Leftrightarrow SO^2 = OA_1 \cdot OM$.

Câu 5. Điều kiện $x \geq -2, y \geq -6$.

$$3x - 6\sqrt{2x - 4} = 4\sqrt{3y + 18} - 2y \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \left(\sqrt{\frac{x}{2} + 1} + \sqrt{\frac{y}{3} + 2} \right)$$

Đặt $\begin{cases} \frac{x}{2} = X \\ \frac{y}{3} = Y \end{cases} \quad (X \geq -1, Y \geq -2)$

Gọi T là tập giá trị của $P_1 = X + Y$ ta có $a \in P_1 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$ sao cho hệ phương trình ẩn (X, Y) sau có nghiệm

$$\begin{cases} X + Y = a \\ 2(\sqrt{X+1} + \sqrt{Y+2}) = a \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{X+1} = u \\ \sqrt{Y+2} = v \end{cases} (u, v \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} X = u^2 - 1 \\ Y = v^2 - 2 \end{cases}$

Hệ trở thành $\begin{cases} u^2 + v^2 = a + 3 \\ u + v = \frac{a}{2} \end{cases} \quad (2)$

Ta tìm a để (2) có nghiệm $(u; v)$ với $u, v \geq 0$

Phương trình ẩn t : $8t^2 - 4at + a^2 - 4a - 12 = 0$ có hai nghiệm không âm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8a - 24 \leq 0 \\ a \geq 0 \\ a^2 - 4a - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 6 \leq a \leq 4 + 2\sqrt{10}$$

Do đó $\max P = 4 + 2\sqrt{10}$ và $\min P = 6$

Và vì $P = P_1 - 1$ nên $\max P = 3 + 2\sqrt{10}$ khi $u = v = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = u^2 - 1 \\ \frac{y}{3} = v^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 2\sqrt{10} \\ y = \frac{3(3 + 2\sqrt{10})}{2} \end{cases}$

$$\min P = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 3 \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = -6 \end{cases}$$

Câu 6. Xét phương trình $f(x) - \frac{1}{x} = 0$.

Do $f(n) = \frac{1}{n}$ với $n = 1, 2, 3, \dots, 2011$ nên phương trình $f(x) = \frac{1}{x}$ có các nghiệm $1; 2; \dots; 2011$

Xét $g(x) = xf(x) - 1$ (1)

Do $\deg f = 2010$ nên $\deg g = 2011$ và $g(x)$ có 2011 nghiệm $1; 2; 3; \dots; 2011$ nên

$$g(x) = a(x-1)(x-2)\dots(x-2011) \quad (2)$$

Từ (1) ta có: $g(0) = -1$.

Từ (2) ta có $-1 = g(0) = a(-1)^{2011} \cdot 2011!$

Suy ra: $a = \frac{1}{2011!}(x-1)(x-2)\dots(x-2011)$

$$\Rightarrow 2012 f(2012) - 1 = g(2012) = \frac{1}{2011!}(2012-1)(2012-2)\dots(2012-2011) = 1$$

$$\Rightarrow 2012 f(2012) = 2 \Rightarrow f(2012) = \frac{1}{1006}$$

ĐỀ SỐ 08

Câu 1. $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$

$$\Leftrightarrow 4\sin x \cos x - (1 - 2\sin^2 x) - 7\sin x - 2\cos x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin^2 x - 7\sin x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x \sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

Câu 2.

a) Nếu $ad + bc < 0$: Bất đẳng thức đúng

Nếu $ad + bc \geq 0$: Bất đẳng thức tương đương với: $(ad + bc)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

$$\Leftrightarrow a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$$\Leftrightarrow 2abcd \leq a^2c^2 + b^2d^2 \Leftrightarrow (ac - bd)^2 \geq 0$$

(đúng)

Ta có
$$a + b + c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c} \Rightarrow a + b + c \geq 3$$

$$(a + b + c)^2 = \frac{1}{3}(a + b + c)^2 + \frac{2}{3}(a + b + c)^2 \geq 3 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$$

$$\geq 3 + \frac{2}{3}\left[3\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{cb} + \frac{1}{ac}\right)\right] = 3 + 2\frac{a + b + c}{abc}$$

$$\Rightarrow a + b + c \geq \frac{3}{a + b + c} + \frac{2}{abc} \text{ (dpcm)}$$

$$c) A = x(1 - yz) + (y + z) \leq \sqrt{x^2 + (y + z)^2} \cdot \sqrt{(1 - yz)^2 + 1} = \sqrt{2 + 2yz} \cdot \sqrt{2 - 2yz + y^2z^2} = B$$

Đặt
$$t = yz \leq \frac{y^2 + z^2}{2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = 1 \Rightarrow t^3 \leq t^2$$

Do đó:
$$B = \sqrt{(2t + 2)(2 - 2t + t^2)} = \sqrt{2(t^3 - t^2 + 2)} \leq 2 \Rightarrow A \leq 2$$

Khi $x = 0, y = z = 1$ thì $A = 2$

Vậy $\max A = 2$.

Câu 3.

Ta có
$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ n^4 + n^3 + 1 = m^2 \end{cases} (m \in \mathbb{N}^*) (1)$$

Ta có:
$$m^2 = n^4 + n^3 + 1 > n^4 \Rightarrow m = n^2 + k (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow n^4 + n^3 + 1 = (n^2 + k)^2 \Rightarrow n^2(n - 2k) = k^2 - 1 \geq 0$$

Nếu $k^2 - 1 > 0$ thì $n - 2k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k^2 - 1 \geq n^2 \Rightarrow k^2 \geq n^2 \Rightarrow n < k$ mâu thuẫn với $n - 2k \in \mathbb{N}^*$ vậy phải có:
 $k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$ và $n^2(n - 2) = 0 \Leftrightarrow n = 2$ ($m = 5$)

Vậy có duy nhất một số nguyên dương n thỏa $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương, đó là $n = 2$.

Câu 4.

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases}$$

Ta lấy (1) + 3.(2) ta được $x^3 + 3xy^2 + 3x^2 - 24xy + 3y^2 = -49 + 24y - 51x$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 3x + 1 + 3y^2(x + 1) - 24y(x + 1) + 48(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1) \left[(x + 1)^2 + 3(y - 4)^2 \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Thay $x = -1$ vào (1) ta được: $-1 - 3y^2 = -49 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$.

Vậy hệ có hai nghiệm $(-1; 4)$ và $(-1; -4)$.

Câu 5.

Đặt $t = \sqrt{1 - x} - \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x - x^2} = \frac{1 - t^2}{2} \quad (-1 \leq t \leq 1).$

Phương trình trở thành: $t + m \frac{1 - t^2}{2} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{2t - 4}{t^2 - 1}, t \in (-1; 1)$

Xét hàm số: $y = f(t) = \frac{2t - 4}{t^2 - 1}, t \in (-1; 1)$. Lập bảng biến thiên ta có:

Bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \min_{t \in (-1; 1)} f(t) = f(2 - \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}$

Vậy: $m \geq 2 + \sqrt{3}$.

Câu 6.

Gọi M là trung điểm AD, I là giao điểm của BM và AC, J là giao điểm của EM và SD. (E là đỉnh của hình vuông SADE)

$$\text{Ta có: } \frac{IM}{IB} = \frac{AM}{BC} = \frac{1}{2}; \frac{JM}{JE} = \frac{DM}{SE} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{JM}{JE} \Rightarrow IJ // BC \quad \text{và} \quad IJ = \frac{1}{3} BE$$

$$AC \perp (BDE) \Rightarrow AC \perp BE \Rightarrow AC \perp IJ$$

$$SD \perp (BAE) \Rightarrow SD \perp BE \Rightarrow SD \perp IJ$$

$$\Rightarrow BE = a\sqrt{3} \Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AC và BD

Câu 7.

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{2t^2 - t + 2}{t^2 - t + 1} (*)$$

$$\text{Ta có: } f(t) = 3 - \frac{(t-1)^2}{t^2 - t + 1} \leq 3 \quad \text{và} \quad f(t) = \frac{5}{3} + \frac{(t+1)^2}{3(t^2 - t + 1)} \geq \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{5}{3} \leq f(t) \leq 3$$

$$+) \text{ Với } y = 0 \text{ ta có } A = 6$$

$$+) \text{ Với } y \neq 0, \text{ thay } t = \frac{x}{y} \text{ vào } (*) \text{ ta có } \frac{5}{3} \leq \frac{2x^2 - xy + 2y^2}{x^2 - xy + y^2} \leq 3 \Rightarrow 5 \leq A \leq 9.$$

$$\text{Vậy } \max A = 9 \text{ khi } x = y = \pm\sqrt{3} \text{ và } \min A = 5 \text{ khi } x = -1; y = 1 \text{ hoặc } x = 1; y = -1.$$

ĐỀ SỐ 09

Câu 1.

a) Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ là 3 điểm thẳng hàng trên (T) và thuộc đường thẳng $\Delta: y = ax + b$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại A là: } y = (3x_1^2 - 3)(x - x_1) + y_1 \quad (d_1).$$

$$\text{Xét phương trình: } x^3 - 3x + 2 = (3x_1^2 - 3)(x - x_1) + x_1^3 - 3x_1 + 2$$

$$\Leftrightarrow (x - x_1)(x^2 + xx_1 + x_1^2) - 3(x - x_1) - (3x_1^2 - 3)(x - x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_1)^2 (x + 2x_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = -2x_1 \end{cases}$$

Suy ra d_1 cắt (T) tại $A'(x'_1; y'_1)$ với $x'_1 = -2x_1$

$$\begin{aligned} y'_1 &= x_1^3 - 3x_1^2 + 2 = -8x_1^3 + 6x_1^2 + 2 = -8(x_1^3 - 3x_1^2 + 2) - 18x_1 + 18 \\ &= -8y_1 - 18x_1 + 18 = -8(ax_1 + b) - 18x_1 + 18 = (4a + 9)x_1 + 18 - 8b \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự A', B', C' cùng thuộc đường thẳng có phương trình:

$$\Delta': y = (4a + 9)x + 18 - 8b \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

b) Xét hàm số: $f(x) = x^{2n+1} + 2011x + 2012$

$f'(x) = (2n+1)x^{2n} + 2011 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra, phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm. Vì

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{2n+1} + 2011x + 2012) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n+1} \left(1 + \frac{2011}{x^{2n}} + \frac{2012}{x^{2n+1}} \right) = +\infty \Rightarrow \exists b > 0 \text{ để } f(b) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^{2n+1} + 2011x + 2012) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} \left(1 + \frac{2011}{x^{2n}} + \frac{2012}{x^{2n+1}} \right) = -\infty \Rightarrow \exists a < 0 \text{ để } f(a) < 0$$

$\Rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$, suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(a; b)$.

Từ đó suy ra, đồ thị hàm số (1) luôn cắt trục hoành tại đúng một điểm.

Câu 2.

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_6 x = \log_3 x + \log_5 x + \log_7 x \quad (1)$$

a)

Từ (1) phương trình tương đương

$$\log_2 x + \log_4 2 \cdot \log_2 x + \log_6 2 \cdot \log_2 x = \log_3 2 \cdot \log_2 x + \log_5 2 \cdot \log_2 x + \log_7 2 \cdot \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x (1 + \log_4 2 + \log_6 2 - \log_3 2 - \log_5 2 - \log_7 2) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Ta có } 1 - \log_3 2 > 0, \log_4 2 - \log_5 2 > 0, \log_6 2 - \log_7 2 > 0$$

$$1 + \log_4 2 + \log_6 2 - \log_3 2 - \log_5 2 - \log_7 2 > 0$$

Suy ra

$$(2) \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

$$(5x - 6)^2 - \frac{1}{\sqrt{5x - 7}} = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x - 1}} \quad (1)$$

b) Ta có

Điều kiện: $x > \frac{7}{5}$. Xét hàm số: $f(t) = t^2 - \frac{1}{\sqrt{t - 1}}$ với $t > \frac{7}{5}$

$$f'(t) = 2t + \frac{1}{2\sqrt{(t - 1)^3}} > 0, \forall t > \frac{7}{5}.$$

Suy ra, $f(t)$ đồng biến trên $\left(\frac{7}{5}; +\infty\right)$

Từ $(1) \Leftrightarrow f(5x - 6) = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (tm)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{2}$.

Câu 3.

$$S = C_{2010}^0 + 2C_{2010}^1 + 3C_{2010}^2 + \dots + 2010C_{2010}^{2009} + 2011C_{2010}^{2010}.$$

Xét hàm số $f(x) = x(1 + x)^{2010}$

Ta có: $(1 + x)^{2010} = C_{2010}^0 + xC_{2010}^1 + x^2C_{2010}^2 + \dots + x^{2010}C_{2010}^{2010}.$

$$\Rightarrow f(x) = x(1 + x)^{2010} = xC_{2010}^0 + x^2C_{2010}^1 + x^3C_{2010}^2 + \dots + x^{2011}C_{2010}^{2010}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = (xC_{2010}^0 + x^2C_{2010}^1 + x^3C_{2010}^2 + \dots + x^{2011}C_{2010}^{2010})'$$

$$= C_{2010}^0 + 2xC_{2010}^1 + 3x^2C_{2010}^2 + \dots + 2011x^{2010}C_{2010}^{2010}$$

Mặt khác $f'(x) = (1 + x)^{2010} + 2010x(1 + x)^{2009}$

Với $x = 1$ ta được: $S = C_{2010}^0 + 2C_{2010}^1 + 3C_{2010}^2 + \dots + 2010C_{2010}^{2009} + 2011C_{2010}^{2010} = f'(1) = 503.2^{2011}.$

Vậy: $S = 503.2^{2011}.$

Câu 4.

$\Delta SAC, \Delta SBD$

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD, do cân tại S nên

$$SO \perp AC, SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

$$OA = OB = OC = OD \Rightarrow ABCD$$

. Từ giả thiết suy ra là hình

chữ nhật.

Đặt $AB = x, x > 0 \Rightarrow AC = \sqrt{16a^2 + x^2} \Rightarrow AO = \frac{\sqrt{16a^2 + x^2}}{2} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{8a^2 - x^2}}{2}$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3} 4a \cdot x \cdot \frac{\sqrt{8a^2 - x^2}}{2} \leq \frac{a}{3} (x^2 + 8a^2 - x^2) = \frac{8a^3}{3}$$

$$\Rightarrow \max V_{ABCD} = \frac{8a^3}{3} \text{ khi } x = 2a \Rightarrow SO = a.$$

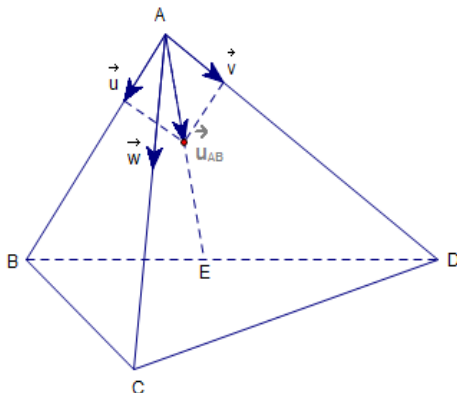
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ $O(0;0;0), S(0;0;a), B(-a;-2a;0), C(-a;2a;0), D(a;2a;0)$.

Tìm được VTPT của (SBC) là $n_1(1;0;-1)$, VTPT của (SCD) là $n_2(0;1;2)$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{10}} \text{ với } \alpha \text{ là góc giữa hai mặt phẳng } (SBC) \text{ và } (SCD).$$

Vậy cosin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) (khi V_{ABCD} lớn nhất) là $\frac{2}{\sqrt{10}}$.

b) Đặt $\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{AB}, \vec{v} = \frac{\vec{AD}}{AD}, \vec{w} = \frac{\vec{AC}}{AC}$



$$\Rightarrow |u| = |v| = |w| = 1$$

AE nhận $u_{AE} = u + v$ làm VTCP.

Ta có: $u_{AE} \cdot w = (u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

$$= |u||v|\cos 60^\circ + |v||w|\cos 120^\circ = 0$$

$\Rightarrow AE \perp AC$ hay $\triangle ACE$ vuông tại A .

Câu 5. Do hàm $y = \cos x$ là hàm chẵn nên ta chỉ cần xét với $x \geq 0, y \geq 0$

Ta có: $0 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \leq 2 \cos \frac{x+y}{2} \quad 1 + \cos(xy) \geq 1 + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

$$2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 1 + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \quad (1)$$

Ta chứng minh

Đặt $\frac{x+y}{2} = t, t \in \left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right], (1)$ trở thành $1 + \cos t^2 - 2 \cos t \geq 0$

$$f(t) = 1 + \cos t^2 - 2 \cos t, t \in \left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$$

Xét hàm số

$$f'(t) = -2t \sin t^2 + 2 \sin t = 2(\sin t - t \sin t^2); f'(1) = f'(0) = 0.$$

$$\forall t \in (0; 1) \text{ ta có } t > t^2 \Rightarrow \sin t > \sin t^2 > t \sin t^2 \Rightarrow f'(t) > 0$$

$$\forall t \in \left(1; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \text{ ta có } t < t^2 \Rightarrow \sin t < \sin t^2 < t \sin t^2 \Rightarrow f'(t) < 0$$

t	0	1	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
f'(t)	0	+	0
f(t)	0	f(1)	f($\sqrt{\frac{\pi}{2}}$)

$$f(0) = 0; f(1) = 1 - \cos 1 > 0; f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1 - 2 \cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) > 1 - 2 \cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{2\pi}}\right) > 1 - 2 \cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{9}}\right) = 0.$$

$$f(t) \geq 0, \forall t \in \left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \Rightarrow 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 1 + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Vậy
Từ đó suy ra $\cos x + \cos y \leq 1 + \cos(xy)$. Dấu “=” xảy ra khi $x = y = 0$.

ĐỀ SỐ 10.

Câu 1.

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6x + m$$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$

$$y(x) = y'(x) \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{2}{3}m - 2 \right)x + \frac{1}{3}m$$

Ta có:

Gọi $M_1(x_1; y_1); M_2(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị, suy ra $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

$$\text{Nên } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$$

Đường thẳng qua hai điểm cực trị M_1, M_2 là $d_1: y = \left(\frac{2}{3}m - 2 \right)x + \frac{1}{3}m$

I là trung điểm $M_1 M_2 \Rightarrow I(1; m - 2)$

$$\text{Do } M_1, M_2 \text{ đối xứng qua (d) nên } \begin{cases} d_1 \perp d \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m - 2 \right) \left(-\frac{1}{2} \right) = -1 \\ I \in d \Leftrightarrow 1 + 2(\pi m - 2) - 9 = 0 \Leftrightarrow m = 6. \end{cases}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x + \cos x) dx}{4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x + \cos x) dx}{4 - \sin^2 x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{4 - \sin^2 x} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{4 - \sin^2 x} = I_1 + I_2$$

Câu 2.

$$+) I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{4 - \sin^2 x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{x dx}{4 - \sin^2 x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{4 - \sin^2 x}$$

$$\text{Trong } \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{x dx}{4 - \sin^2 x} \text{ đặt } x = -t, \text{ đổi cận CM } \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{x dx}{4 - \sin^2 x} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{4 - \sin^2 x} \Rightarrow I_1 = 0$$

$$+) I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{4 - \sin^2 x}, \text{ đặt } t = \sin x, \text{ đổi cận có}$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{dt}{4 - t^2} = \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+t}{2-t} \right| \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \ln 3 \Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln 3$$

Câu 3.

$$P(x) = (1 + 4x + 3x^2)^{10} = (1 + x(4 + 3x))^{10}$$

$$P(x) = C_{10}^0 + C_{10}^1 x(4 + 3x) + C_{10}^2 x^2 (4 + 3x)^2 + \dots + C_{10}^{10} x^{10} (4 + 3x)^{10}$$

$$\text{Hệ số của } x^3 \text{ chỉ xuất hiện trong } C_{10}^2 x^2 (4 + 3x)^2 + C_{10}^3 x^3 (4 + 3x)^3$$

$$\text{Hệ số của } x^3 \text{ trong khai triển là: } 24C_{10}^2 + 64.C_{10}^3 = 8760.$$

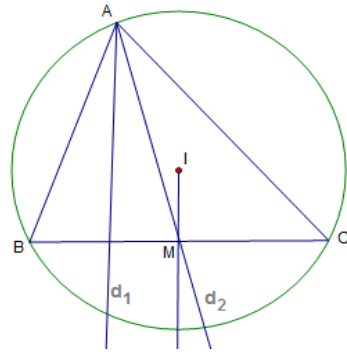
Câu 4. a) Tìm được $A(1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng qua I và song song với d_1 .

Tìm được $\Delta: x + y - 4 = 0$. Gọi $M = \Delta \cap d_2 \Rightarrow M(5; -1)$, M là trung điểm BC .

$\Rightarrow$ đường thẳng BC đi qua M và vuông góc với $d_1 \Rightarrow (BC): x - y - 6 = 0$

Nhận xét: B, C là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn tâm I , bán kính $R = IA = \sqrt{10}$ có phương trình $(x - 4)^2 + y^2 = 10$.

Giải hệ tìm được tọa độ $B(-3; 3)$, $C(7; 1)$



Phương trình $(AB): 2x + y - 3 = 0; (AC): y - 1 = 0$

b) Ta có:
$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{abc}{4Rp} = \frac{2R \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$IA = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{IA^2}{bc} = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$$

Tương tự: $\frac{IB^2}{ac} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}; \frac{IC^2}{ba} = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{A}{2}$

$$\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ac} + \frac{IC^2}{ab} = \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} = 1$$

Câu 5. a) $\cos 2x = (\sqrt{2} \sin 2x \cdot \cos x - \sin 2x) + (\sqrt{2} \sin x - \sin 2x) + (2\sqrt{2} \cos x - 2)$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = \sin 2x(\sqrt{2} \cos x - 1) - \sqrt{2} \sin x(\sqrt{2} \cos x - 1) + 2(\sqrt{2} \cos x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} \cos x + 1)(\sqrt{2} \cos x - 1) = (\sqrt{2} \cos x - 1)[\sin 2x - \sqrt{2} \sin x + 2]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 2\sin x \cos x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$

Từ (2) $\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

b) Đặt $a = 2^x; b = 2^y; c = 2^z$ bất phương trình cần chứng minh:

$$\Leftrightarrow (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq \frac{81}{8}, a, b, c \in [1; 2]$$

Xét tam thức bậc hai: $f(x) = x^2 - 3x + 2$ có hai nghiệm $x = 1; x = 2 \Rightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in [1; 2]$

$$a, b, c \in [1; 2] \Rightarrow \begin{cases} f(a) \leq 0 \\ f(b) \leq 0 \\ f(c) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 3a + 2 \leq 0 \\ b^2 - 3b + 2 \leq 0 \\ c^2 - 3c + 2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{2}{a} \leq 3 \\ b + \frac{2}{b} \leq 3 \\ c + \frac{2}{c} \leq 3 \end{cases}$$

Mà

$$(a+b+c) + \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right) \leq 9$$

Từ đó:

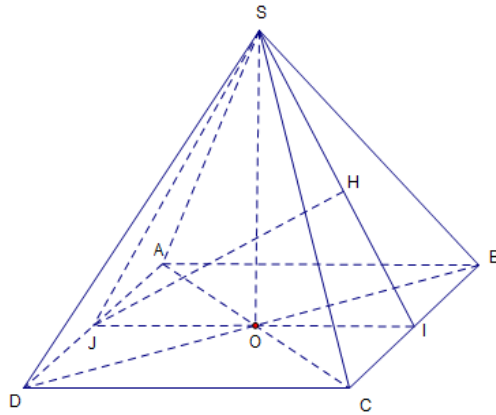
$$9 \geq (a+b+c) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right) \geq 2 \sqrt{(a+b+c) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right)}$$

Áp dụng bất Cauchy:

Câu 6. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AD ta có $\angle SIJ = \alpha$

Ta có: $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = d(J; (SBC))$

Trong tam giác SIJ, vẽ đường cao JH Chứng minh được $JH \perp (SBC)$



Suy ra: $d(J; (SBC)) = JH = b$

Trong tam giác vuông IHJ, ta có: $IJ = \frac{JH}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \alpha}$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AB^2 = IJ^2 = \frac{b^2}{\sin^2 \alpha}$$

Gọi O là tâm của đáy thì: $SO = IO \cdot \tan \alpha = \frac{b}{2 \sin \alpha} \cdot \tan \alpha = \frac{b}{2 \cos \alpha}$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{b^3}{6 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} \Rightarrow V_{S.ABCD} \min \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} \min$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha) \max \text{ (do } 0^\circ < \alpha < 90^\circ) \Leftrightarrow (\cos \alpha (1 - \sin^2 \alpha)) \max$$

Xét hàm $f(x) = x(1 - x^2), (x = \cos \alpha \in (0; 1))$

Lập bảng biến thiên, tìm được $\max_{x \in (0;1)} f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ khi $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy $\min(V_{S.ABCD}) = \frac{b^3 \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}; 0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = y - x \end{cases} \quad (1)$$

Câu 7. Ta có: $\begin{cases} (x^2 - 3y)\sqrt{2y^2 - 3x - 2} \geq 0 \end{cases} \quad (2)$

Xét phương trình (1) $\Leftrightarrow 2^x + x = 2^y + y$. Ta có: $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Vậy $f(t)$ là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$, mà $f(x) = f(y)$ nên $x = y$.

Thay $y = x$ vào bất phương trình (2), ta có: $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2} \vee x > 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \vee x = 2 \vee x \geq 3$$

Câu 1. (5,0 điểm)

Cho hàm số $y = f(x) = -4x^3 + 3x$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $4x^3 - 3x = 4m^3 - 3m$.

Câu 2. (5,0 điểm)

1. Giải phương trình sau trên tập số thực $3^{x^3+x+2} + (x^3 - 3x + 1)3^{2x-x^3} = 3^{4x+1}$

2.a) Chứng minh rằng với mọi $a \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{1}{\cos a} - \frac{1}{\cos 3a} = -4 \frac{\sin^2 a}{\cos a}$.

b) Giải phương trình sau: $\frac{\sin^2 x}{\cos 3x} + \frac{\sin^2 3x}{\cos 9x} + \frac{\sin^2 9x}{\cos 27x} = 0$.

Câu 3. (5 điểm)

a) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy là a ($a > 0$). Biết các mặt bên tạo với mặt đáy góc có số đo bằng $\frac{\pi}{4}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a và số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) .

b) Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Mặt phẳng (P) chứa cạnh BC cắt cạnh AD tại E . Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) có số đo là α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{5\sqrt{2}}{7}$. Gọi thể tích của hai tứ diện $ABCE$ và tứ diện $BCDE$ lần lượt là V_1 và V_2 . Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Câu 4. (3,0 điểm) a) Trong không gian $(Oxyz)$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và điểm $A(4; -2; 0)$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) qua d và cách điểm A một khoảng lớn nhất.

b) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình sau có nghiệm thực:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} - \sqrt{x-3} = m$$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 2012$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{x^2}{x^2 + xy + y^2} \frac{y^2}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^2}{z^2 + zx + x^2}.$$

ĐỀ SỐ 12

(Đề thi HSG khối 12, Thanh Hóa)

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).

b) Gọi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$. Tìm số nghiệm đã cho của phương trình:

$$[f(x)]^3 - 6[f(x)]^2 + 9f(x) - 3 = 0$$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $(1 + \sin x)(1 - 2\sin x) + 2(1 + 2\sin x)\cos x = 0$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^{2x-y} - 2^{x+y} = (x+y)\sqrt{x+y} - (2x-y)\sqrt{2x-y} \\ \sqrt[3]{y} - 2(x-1)^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 lập các số chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được một số lớn hơn 2012.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x) dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}$$

b) Tính tích phân:

Câu 4. (6 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 9$, đường thẳng $ABM \Delta: y = x - 3 + \sqrt{3}$ và điểm $A(3; 0)$. Gọi M là một điểm thay đổi trên (C) và B là điểm sao cho tứ giác $ABMO$ là hình bình hành. Tính diện tích tam giác ABM , biết trọng tâm G của tam giác thuộc Δ và G có tung độ dương.

2) Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình chữ nhật có $AB = a$ và $BC = 2a$, mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, các mặt phẳng (SBC) và (SCD) cùng tạo với đáy một góc bằng nhau. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng $\frac{2a}{\sqrt{6}}$.

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

b) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SA và BD .

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $x > \frac{1}{3}, y > \frac{1}{2}, z > 1$ và $\frac{3}{3x+2} + \frac{2}{2y+1} + \frac{1}{z} \geq 2$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = (3x-1)(2y-1)(z-1)$

ĐỀ SỐ 13

(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Hải Dương)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm M tùy ý thuộc (C) . Tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt hai tiệm cận tại A và B . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Chứng minh tam giác IAB có diện tích không phụ thuộc vị trí điểm M .

b) Tìm m để hàm số $y = 9x + m\sqrt{x^2 + 9}$ có cực đại.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sin^{2012} x + \cos^{2012} x = \frac{1}{2^{1005}}$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = y + \sqrt{y^2 - 1} \\ x^2 + y^2 - xy = 1 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Chứng minh $\tan x + \sin x \geq \frac{9}{2}x + \frac{3}{2}(\sqrt{3} - \pi), \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ từ đó suy ra mọi tam giác nhọn ABC ta có:

$$\tan A + \tan B + \tan C + \sin A + \sin B + \sin C \geq \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

b) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - \sqrt{16-x^2}$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp$ mp đáy.

a) Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với SC , cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ theo a .

b) M và N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc các cạnh BC và DC sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMN$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh:

$$\frac{a^2 + ab + 1}{\sqrt{a^2 + 3ab + c^2}} + \frac{b^2 + bc + 1}{\sqrt{b^2 + 3bc + a^2}} + \frac{c^2 + ac + 1}{\sqrt{c^2 + 3ac + b^2}} \geq \sqrt{5}(a + b + c)$$

ĐỀ SỐ 14

(Đề thi HSG khối 12, Hà Nam)

Câu 1. (4,0 điểm)

- a) Cho hàm số $y = \frac{3x - 2m}{mx + 1}$ với m là tham số. Chứng minh rằng $\forall m \neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y = 3x - 3m$ tại hai điểm phân biệt A, B . Xác định m để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD
- b) Cho hàm số $y = \frac{x^2}{x - 1}$ có đồ thị (C) . Chứng minh rằng các điểm trong mặt phẳng tọa độ mà qua đó kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến vuông góc với nhau đều nằm trên đường tròn tâm $I(1; 2)$ bán kính $R = 2$.

Câu 2. (4,0 điểm)

- a) Giải phương trình sau trên tập số thực: $15x \cdot 5^x = 5^{x+1} + 27x + 23$

- b) Giải bất phương trình sau trên tập số thực: $\log_2 \frac{2x+1}{x^2 - 2x+1} \leq 2x^2 - 6x + 2$

Câu 3. (6,0 điểm)

- a) Cho tứ diện $S.ABC$ có $AB = AC = a$, $BC = \frac{a}{2}$; $SA = a\sqrt{3}$ ($a > 0$). Biết $\angle SAB = 30^\circ$ và $\angle SAC = 30^\circ$.
Tính thể tích tứ diện theo a .
- b) Chứng minh rằng nếu một tứ diện có độ dài 1 cạnh lớn hơn 1, độ dài các cạnh còn lại đều không lớn hơn 1 thì thể tích của khối tứ diện đó không lớn hơn $\frac{1}{8}$.

Câu 4. (4,0 điểm)

Tính các tích phân:

- a) $I = \int_2^3 \frac{\sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x^2 - 4}} dx$

$$b) J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{(\cos x + 1)^{\sin x + 1}}{\sin x + 1} dx$$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 1}} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

ĐỀ SỐ 15

(Đề thi học sinh giỏi lớp 12 Long An – Bảng A)

Câu 1. (5 điểm)

a) Giải phương trình sau: $4\sqrt{x^2 + x + 1} = 1 + 5x + 4x^2 - 2x^3 - x^4$ với $x \in \mathbb{R}$

b) Giải phương trình: $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 1 = 3(\cos x + \sqrt{3}\sin x)$

Câu 2. (5,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC vuông cân tại B , cạnh $AB = 2$. Trong mặt phẳng chứa tam giác ABC lấy điểm M thỏa $MA^2 + MB^2 = MC^2$. Tìm quỹ tích của điểm M .

b) Cho tam giác ABC có hai trung tuyến BM và CN hợp với nhau một góc bằng 60° , $BM = 6, CN = 9$. Tính độ dài trung tuyến còn lại của tam giác ABC .

Câu 3. (4,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{3u_n^2 + 2}$ với $\forall n \geq 1$

a) Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

b) Tính tổng $S = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_{2011}^2$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M = (a + b + c)^3 - (a + b + c) + 6abc$.

Câu 5. (3,0 điểm)

Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm
$$\begin{cases} x^3 + (y + 2)x^2 + 2xy = -2m - 3 \\ x^2 + 3x + y = m \end{cases}$$
 với x, y là các số thực.

ĐỀ SỐ 16

(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Bắc Ninh)

Câu 1. (5,0 điểm)

Cho hàm số $y = 4 - \frac{6}{x}$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng d: $y = 3x + m$ cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $\angle AOB$ nhọn (O là gốc tọa độ).

Câu 2. (6,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2(x^3 + 2x - y - 1) = x^2(y + 1) \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

b) Giải phương trình: $|3^x + 2x - 2x \cdot 3^x| = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC . Gọi x, y, z là ba số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $cy + bz = a; az + cx = b; bx + ay = c$. Chứng minh rằng:

$$x + y + z \leq \frac{3}{2}$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \cdot AC \cdot AD = 54324$ và O là một điểm thay đổi nằm trong tam giác BCD . Các đường thẳng qua O song song với AB, AC, AD lần lượt cắt các mặt $(ACD), (ABD), (ABC)$ tại B', C', D' . Chứng minh rằng: $OB' \cdot OC' \cdot OD' \geq 2012$.

Câu 5. (3,0 điểm)

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1; 4; 2), B(-1; 2; 4)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho tổng $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6. (1,0 điểm)

Từ 2012 số nguyên dương đầu tiên lấy ra 6 số xếp thành dãy số có dạng $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$. Hỏi có bao nhiêu dãy số có dạng trên biết u_1, u_2, u_3 theo thứ tự lập thành 1 cấp số cộng.

ĐỀ SỐ 17

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH MÔN: TOÁN 12 (Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1. (4,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \cos 2x + \tan x = 2$.

b) $\sin^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin x$.

Câu 2. (4,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - x^2 - 10x - 2 = \sqrt[3]{7x^2 + 23x + 12}$.

b) $(3x - 2)\sqrt{2x - 3} = 2x^2 + 3x - 6$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1$$

b) Cho các số thực $a, b, c \in [-1; 2]$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đều bằng a . Gọi M là một điểm trên cạnh CD sao cho $CM = \frac{1}{3}CD$. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AMB$.

Câu 5.(2,0 điểm)

Cho các số thực $x, y, z \in (0;1)$ và $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh:

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 6.(2,0 điểm)

Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2y^2 + 2y^2 + 4 = 7xy \\ x^2 + 2y^2 + 6y = 3xy^2 \end{cases}.$$

-----Hết-----

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) + f(x - y) \geq f(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

a) Hãy chỉ ra một hàm số không phải là hàm hằng và thỏa mãn bất đẳng thức trên.

b) Chứng minh rằng $f(x) \geq 0$ với mọi số thực x .

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho dãy các số dương $(a_n)_{n \geq 1}$ thỏa mãn: $a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geq 0, \sum_{j=1}^k a_j < 1, \forall k \geq 1$.

Chứng minh rằng: $0 \leq a_k - a_{k+1} \leq \frac{2}{k^2}, \forall k \geq 1$.

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Xét ba đường kính A_1A_2 của (O_1) , B_1B_2 của (O_2) , C_1C_2 của (O_3) sao cho các vectơ A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng hướng. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 đồng quy.

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho hai số nguyên dương $a, b: (a, b) = 1$. Gọi p một ước nguyên tố lẻ của $a^{2^k} + b^{2^k}$ (k nguyên dương nào đó). Chứng minh rằng $p \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho số nguyên $n \geq 2$. Chứng minh rằng trong một họ gồm ít nhất $2^{n-1} + 1$ tập hợp con không rỗng phân biệt của tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$ đều tìm được ba tập hợp mà một trong chúng là tập hợp của hai tập hợp còn lại.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:.....Chữ kí của 01 CBCT:.....

Số báo danh:.....

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Giải phương trình sau: $x^2 + 3x\sqrt{x - \frac{4}{x}} = 10x + 4$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $\sqrt{(m+2)x - m} \geq |x+1|$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$.

Câu 2. (3,0 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y - x + 1 + \sqrt{2} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} \\ 2x^3 - y^3 + x^2y^2 = 2xy - 3x^2 + 3y \end{cases}$$

Câu 3. (5,0 điểm)

a) Cho dãy số (a_n) thỏa mãn: $\begin{cases} a_1 = 10 \\ (6 - a_{n+1})(16 + a_n) = 96, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Tính tổng $S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2012}}$.

b) Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $\log_9(x+3y) + \log_9(x-3y) = 1$. Chứng minh rằng: $3|y| - 2x \leq 3\sqrt{3}$.

Câu 4. (5,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , D là trung điểm AB , E là trọng tâm tam giác ACD . Chứng minh IE vuông góc CD .

b) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AC và vuông góc với mp (SCD) , cắt đường thẳng SD tại E . Gọi V và V_1 lần lượt là thể tích các khối chóp $S.ABCD$ và $D.ACE$. Tính số đo góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$ biết $V = 5V_1$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Tính các góc của tam giác ABC biết:
$$\begin{cases} \frac{2^{\cos A}}{2^{\cos B}} + \cos A = \cos B + 1 \\ \frac{2^{\cos B}}{2^{\cos C}} + \cos B = \cos C + 1 \end{cases}$$

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:.....Chữ kí của 01 CBCT:.....

Số báo danh:.....

ĐỀ SỐ 20

**SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
NGHỆ AN**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
MÔN: TOÁN 12 – BẢNG A
(Thời gian làm bài 180 phút)**

Câu 1. (6,0 điểm)

c) Giải phương trình: $2(x-2)(\sqrt[3]{x+5}+2\sqrt{2x-5})=3x-1 \ (x \in \mathbb{R})$.

d) Giải bất phương trình: $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x \geq 0 \ (x \in \mathbb{R})$.

Câu 2. (3,0 điểm)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 12x - y^3 + 6y^2 - 16 = 0 \\ 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} - 5\sqrt{4y-y^2} + m = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=xyz$ và $x>1, y>1, z>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x-1}{y^2} + \frac{y-1}{z^2} + \frac{z-1}{x^2}$$

Câu 4. (6,0 điểm)

c) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD, AC=BD, AD=BC$. Chứng minh rằng khoảng cách từ trọng tâm của tứ diện $ABCD$ đến các mặt phẳng $(ABC), (BCD), (CDA), (DAB)$ bằng nhau.

d) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$; $SA=SB=SC=2a$. Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Chứng minh $V \leq 2a^3$.

Câu 5. (2,5 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ và các điểm $A(7;9), B(0;8)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho biểu thức $P=MA+2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:.....Chữ kí của 01 CBCT:.....

Số báo danh:.....

ĐỀ SỐ 21

**SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
NGHỆ AN**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
MÔN: TOÁN 12 – BẢNG B
(Thời gian làm bài 180 phút)**

Câu 1. (6,0 điểm)

- a) Giải phương trình: $x^3 + \sqrt{x-1} = 9 \quad (x \in \mathbb{R})$.
- b) Giải bất phương trình: $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Câu 2. (3,0 điểm)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 12x - y^3 + 6y^2 - 16 = 0 \\ 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} - 5\sqrt{4y-y^2} + m = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 3. (5,5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$; $SA = SB = SC = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SA ; N là giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (MBC) . Gọi V, V_1 là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.BCNM$.

- a) Tính tỷ số $\frac{V_1}{V}$.
- b) Chứng minh $V \leq 2a^3$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; -1)$. Đường phân giác trong của các góc B và C lần lượt có phương trình $x - 2y + 1 = 0$; $x + y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC .

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$.

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

-----**Hết**-----

Họ và tên thí sinh:.....Chữ kí của 01 CBCT:.....

Số báo danh:.....

B. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ SỐ 11

Câu 1.

Lời giải

a) $f(x) = -4x^3 + 3x$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên: Các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Bảng biến thiên: $f'(x) = -12x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y_{cd} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_{ct} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

+) Đồ thị: Đồ thị hàm số giao với Ox, Oy: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), O(0; 0)$.

b) **Cách 1:** $-4x^3 + 3x = -4m^3 + 3m$ (1) hay $-4x^3 + 3x = f(m)$

Dựa vào đồ thị hàm số: $f(x) = -4x^3 + 3x$

+ Khi $\begin{cases} f(m) < -1 \\ f(m) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \Rightarrow$ (1) có 1 nghiệm.

+ Khi $\begin{cases} f(m) = -1 \\ f(m) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\} \\ m \in \left\{-1; \frac{1}{2}\right\} \end{cases} \Rightarrow$ (1) có 2 nghiệm.

$$+ \text{ Khi } \begin{cases} f(m) < 1 \\ f(m) > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1; 1) \setminus \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow (1) \text{ có 3 nghiệm.}$$

Cách 2: $4x^3 - 3x = 4m^3 - 3m \Leftrightarrow (x - m)(4x^2 + 4mx + 4m^2 - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ 4x^2 + 4mx + 4m^2 - 3 = 0 \end{cases} (2)$$

Đặt $g(x) = 4x^2 + 4mx + 4m^2 - 3 = 0$; $\Delta' = -12m^2 + 12$.

$$g(m) = 12m^2 - 3; \quad g(m) = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

$$+) \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow (2) \text{ vô nghiệm} \Rightarrow (1) \text{ có 1 nghiệm.}$$

$$+) \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ g(m) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow (2) \text{ có nghiệm kép khác } m \Rightarrow (1) \text{ có 2 nghiệm.}$$

$$+) \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(m) = 0 \end{cases} \Rightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng } m \Rightarrow (1) \text{ có 2 nghiệm.}$$

$$m \in (-1; 1) \setminus \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(m) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác } m \Rightarrow (1) \text{ có 3 nghiệm.}$$

Câu 2.

Lời giải

1. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Phương trình $\Leftrightarrow 3^{2x^3 - x + 2} + (2x^3 - x + 2) = 3^{x^3 + 2x + 1} + (x^3 + 2x + 1)$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t \quad (t \in \mathbb{R})$.

$f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó phương trình $(1) \Leftrightarrow f(2x^3 - x + 2) = f(x^3 + 2x + 1)$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - x + 2 = x^3 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0 \quad (2)$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có:

$$g(-2) < 0; g(0) = 1 > 0; g(1) = -1 < 0; g(2) = 3 > 0$$

Do đó $g(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-2; 2)$.

Đặt $x = 2 \cos \alpha$ với $\alpha \in [0; \pi]$. Ta có phương trình (2) trở thành:

$$\cos^3 \alpha - \cos \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3\alpha = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{2\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Do } \alpha \in [0; \pi] \rightarrow \alpha \in \left\{ \frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}; \frac{8\pi}{9} \right\}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x = 2 \cos \frac{2\pi}{9}; x = 2 \cos \frac{4\pi}{9}; x = 2 \cos \frac{8\pi}{9}$.

$$2. a) \text{ Ta có: } \frac{1}{\cos a} - \frac{1}{\cos 3a} = \frac{\cos 3a - \cos a}{\cos a \cdot \cos 3a} = \frac{-2 \sin 2a \cdot \sin a}{\cos a \cdot \cos 3a} = \frac{-4 \sin^2 a}{\cos 3a} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

$$b) \text{ Điều kiện: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos 9x \neq 0 \\ \cos 27x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 27x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{54} + m \frac{\pi}{27}, m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \frac{-1}{4} \left[\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos 3x} + \frac{1}{\cos 3x} - \frac{1}{\cos 9x} + \frac{1}{\cos 9x} - \frac{1}{\cos 27x} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 27x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 27x = x + k2\pi \\ 27x = -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \frac{\pi}{13} \\ x = k \frac{\pi}{14} \end{cases}$$

Trường hợp 1: $x = k \frac{\pi}{13}, k \in \mathbb{Z}$. Học sinh chứng minh thỏa mãn điều kiện $\cos 27x \neq 0$.

Trường hợp 2: $x = k \frac{\pi}{14}, k \in \mathbb{Z}$. Học sinh tìm ra điều kiện $k \neq 7 + 14n, n \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x = k \frac{\pi}{13}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = m \frac{\pi}{14}, m \in \mathbb{Z}; m \neq 7 + 14n, n \in \mathbb{Z}$.

Câu 3.

Lời giải

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD , suy ra $SO \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm của CD , suy ra $(\overline{SCD}); (ABCD) = (\overline{SM}; MO) = \overline{SMO}$

Theo giả thiết suy ra $\overline{SMO} = \frac{\pi}{4}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot dt(ABCD)$

Ta có $dt(ABCD) = a^2$. Trong đó ΔOSM vuông: $OS = OM = \frac{a}{2} \Rightarrow V = \frac{a^3}{6}$

Hiển nhiên độ dài cạnh bên của hình chóp đều $S.ABCD$ là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi I là hình chiếu của O trên SD . Suy ra $SD \perp (ACI)$

Khi đó $(\angle SCD); (ASD)) = (\angle A; IC)$.

Áp dụng định lý cosin trong ΔIAC , ta được $\cos \angle AIC = -\frac{1}{2}$

(ΔIAC là tam giác có IO vừa là đường trung tuyến, vừa là đường cao nên ΔIAC là tam giác cân đỉnh I ,

$$AC = a\sqrt{2}; IC = IA = \sqrt{SA^2 - IS^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\Rightarrow (\angle SCD); (ASD)) = \frac{\pi}{3}.$$

Chú ý: Học sinh có thể sử dụng phương pháp tọa độ để tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SAD)

Chọn hệ trục $(Oxyz)$: $C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $D\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $S\left(0; 0; \frac{a}{2}\right)$.

Véc tơ pháp tuyến của (SCD) là $a(1; -1; \sqrt{2})$

Véc tơ pháp tuyến của (SAD) là $b(1; 1; \sqrt{2})$

Gọi β là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SAD)

$$\text{Ta có } \cos \beta = \left| \cos(a, b) \right| = \frac{\left| \vec{a} \cdot \vec{b} \right|}{\left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right|} = \frac{\left| 1 - 1 - 2 \right|}{\sqrt{1+1+2} \cdot \sqrt{1+1+2}} = \frac{1}{2} \text{ hay } \beta = \frac{\pi}{3}.$$

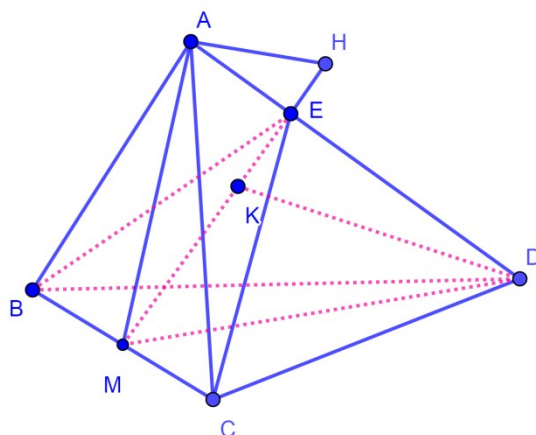
b) Gọi M là trung điểm BC

Khi đó $BC \perp (MAD)$ nên $(P) \perp (AMD)$;

$$(P) \cap (AMD) = ME.$$

Kẻ $AH \perp ME$ thì $AH \perp (BCE)$ (do $AH \subset (AMD)$).

Kẻ $DK \perp ME$ nên $DK \perp (BCE)$ (do $DK \subset (AMD)$).



Hiển nhiên AH song song DK

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{A.BCE}}{V_{D.BCE}} = \frac{AH}{DK}$$

Khi đó

Gọi β là góc giữa (P) và (ABC) $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. Hiển nhiên $\angle BME = \alpha$; $\angle AME = \beta$

$$\text{Vì } AM = DM \text{ nên: } \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{AH}{DK} \Rightarrow \sin \beta = \frac{V_1}{V_2} \cdot \sin \alpha = t \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

$$\text{Trong } \triangle OMA: \cos(\alpha + \beta) = \frac{MO}{MA} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) có: } \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - t^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - t^2 x} \text{ với } x = \sin^2 \alpha$$

$$\text{Thay vào (2) ta có: } \sqrt{1 - t^2 x} \cdot \sqrt{1 - x} - t \cdot x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{(1 - t^2 x)(1 - x)} = t \cdot x + \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{(9t^2 + 6t + 9)}$$

$$\text{Vì } \sin^2 \alpha = x \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{x}{1 - x} = \frac{8}{9t^2 + 6t + 9} \cdot \frac{9t^2 + 6t + 9}{9t^2 + 6t + 1} = \frac{8}{9t^2 + 6t + 1}$$

$$\text{Theo giả thiết suy ra } \frac{8}{9t^2 + 6t + 1} = \frac{50}{49} \Leftrightarrow 9t^2 + 6t + 1 = \frac{196}{25} \Leftrightarrow 9t^2 + 6t - \frac{171}{25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{5} \\ t = -\frac{19}{15} \end{cases}$$

$$\frac{V_{A.BCE}}{V_{D.BCE}} = \frac{3}{5}$$

Câu 4.

Lời giải

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $d \Rightarrow H(3; 2; -3)$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên (Q)

Ta có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (Q) là $h = |\overline{AK}| \leq |\overline{AH}|$

Vậy giá trị lớn nhất của h là $|\overline{AH}|$ khi và chỉ khi $K \equiv H$

Suy ra (Q) qua d và nhận AH làm véc tơ pháp tuyến $(Q): x - 4y + 3z + 14 = 0$

b) Điều kiện: $x \geq 4$

Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} - \sqrt{x-3}, x \in [4; +\infty)$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[4; +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-4}} - \frac{1}{2\sqrt{x-3}} > 0, \forall x \in (4; +\infty)$$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[4; +\infty)$.

$$\text{Mặt khác: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-4} + \sqrt{x-3}} \right) = 0$$

Học sinh lập bảng biến thiên và kết luận.

Phương trình ban đầu có nghiệm thực $\Leftrightarrow m \in [1 - \sqrt{3}; 0)$.

Câu 5.

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Ta có: } \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 - z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 - x^3}{z^2 + zx + x^2} = (x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + zx + x^2} = \frac{y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{x^3}{z^2 + zx + x^2}$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2} \quad (1)$$

Chúng minh được $\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{1}{3}, \forall a, b \in \mathbb{R}$, dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

$$\text{Suy ra: } \frac{(x^2 - xy + y^2)(x + y)}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{1}{3}(x + y), \text{ với } x, y > 0$$

$$\frac{(y^2 - yz + z^2)(y + z)}{y^2 + yz + z^2} \geq \frac{1}{3}(y + z)$$

$$\frac{(z^2 - zx + x^2)(z + x)}{z^2 - zx + x^2} \geq \frac{1}{3}(z + x)$$

$$\text{Do đó } 2A \geq \frac{1}{3}[(x + y) + (y + z) + (z + x)] = \frac{2}{3} \cdot 2012 \Rightarrow A \geq \frac{1012}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{2012}{3}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{2012}{3}$.

Cách 2:

Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= 2012(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 2012(x^2 + y^2 + z^2) - 2012(xy + yz + zx) \quad (a)$

Ta có: $x(x^2 + xy + y^2) + y(y^2 + yz + z^2) + z(z^2 + zx + x^2)$

$= (x^3 + y^3 + z^3) + xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)$

$= (x^3 + y^3 + z^3) + xy(2012 - z) + yz(2012 - x) + zx(2012 - y) = 2012(x^3 + y^3 + z^3)$

Ta có: $A = \frac{x^4}{x(x^2 + xy + y^2)} + \frac{y^4}{y(y^2 + yz + z^2)} + \frac{z^4}{z(z^2 + zx + x^2)}$

$\geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x(x^2 + xy + y^2) + y(y^2 + yz + z^2) + z(z^2 + zx + x^2)}$

$= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{2012(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2).3}{3.2012} \geq \frac{(x + y + z)^2}{3.2012} = \frac{2012}{3}$

Đề 12

Câu 1. a) Ta có: $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Sự biến thiên: Chiều biến thiên: $y' = -x^2 + 4x - 3$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Hàm số nghịch biến trong khoảng: $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$ đồng biến trên khoảng: $(1; 3)$.

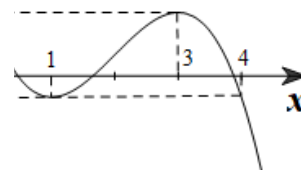
Cực trị: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên:

∞	1	3	$+\infty$
-	0	+	0
-			-
∞		1	$-\infty$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
	$-\frac{1}{3}$		

Đồ thị: Đi qua

$(0; 1)$ và $\left(4; -\frac{1}{3}\right)$



điểm:

Nhận xét: Đồ thị (C) đối xứng qua điểm $I\left(2; \frac{1}{3}\right)$

b) $[f(x)]^3 - 6[f(x)]^2 + 9f(x) - 3 = 0 \quad (1)$

Từ $(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{3}[f(x)]^3 + 2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0$

Đặt $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ ta có:

$(1) \Leftrightarrow g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(m) = 0 \\ m = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(m) = 0 \quad (2) \\ -\frac{m}{3} = g(x) \quad (3) \end{cases}$

Số nghiệm của (1) là số nghiệm của (3) , với m nhận tất cả các giá trị thỏa mãn (2) . Từ đồ thị (C) , suy ra (2) có 3 nghiệm m , thỏa mãn: $0 < m < 1$; $1 < m < 3$ và $3 < m < 4$. Cũng từ (C) ta có:

+) Nếu $0 < m < 1$ hay $-\frac{1}{3} < -\frac{m}{3} < 0$ thì (3) có 3 nghiệm phân biệt.

+) Nếu $1 < m < 3$ hay $-1 < -\frac{m}{3} < -\frac{1}{3}$ thì (3) có đúng 1 nghiệm.

+) Nếu $3 < m < 4$ hay $-\frac{4}{3} < -\frac{m}{3} < -1$ thì (3) có đúng 1 nghiệm.

Rõ ràng các nghiệm của (3) trong 3 trường hợp trên là đôi một khác nhau.

Do đó (1) có đúng 5 nghiệm.

Câu 2. a) $(1 + \sin x)(1 - 2\sin x) + 2(1 + 2\sin x)\cos x = 0 \quad (1)$

Từ $(1) \Leftrightarrow \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)^2 (1 - 2\sin x) + 2(1 + 2\sin x) \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} = 0 \quad (2)$

Hoặc $\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)(1 - 2\sin x) + (2 + 4\sin x) \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right) = 0 \quad (3)$

Từ $(2) \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

Từ $(3) \Leftrightarrow 3\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} + 2\sin x \cos \frac{x}{2} - 6\sin x \sin \frac{x}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 3\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} - 12\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{x}{2} - 4\sin^2\frac{x}{2} + 12\cos^2\frac{x}{2} - 9\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{3x}{2} + 3\cos\frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\alpha}{3} + l\frac{2\pi}{3}, \tan\alpha = -3$$

Vậy (1) có nghiệm: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3} + l\frac{2\pi}{3}, \tan\alpha = -3$ (với $k, l \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{cases} 2^{2x-y} - 2^{x+y} = (x+y)\sqrt{x+y} - (2x-y)\sqrt{2x-y} & (1) \\ \sqrt[3]{y} - 2(x-1)^3 + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

b) Ta có:

Điều kiện: $x+y \geq 0, 2x-y \geq 0 (*)$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow 2^{2x-y} + (2x-y)\sqrt{2x-y} = 2^{x+y} + (x+y)\sqrt{x+y}$

Xét hàm $f(t) = 2^t + t\sqrt{t}$ suy ra: (1) có dạng $f(2x-y) = f(x+y)$

Mặt khác $f(t)$ đồng biến, do đó (1) $\Leftrightarrow 2x-y = x+y$ hay $x=2y$

Thế vào (2), ta được: $\sqrt[3]{y} + 1 = 2(2y-1)^3$ (3)

Đặt $\sqrt[3]{y} = 2t-1$, phương trình (3) trở thành hệ: $\begin{cases} t = (2y-1)^3 \\ y = (2t-1)^3 \end{cases}$

Trừ vế tương ứng các phương trình của hệ, ta có:

$$t=y \text{ (do } 2(2y-1)^2 + 2(2y-1)(2t-1) + 2(2t-1)^2 + 1 > 0)$$

$$\text{Thế vào hệ: } y = (2y-1)^3 \Leftrightarrow 8y^3 - 12y^2 + 5y - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(8y^2 - 4y + 1) = 0$$

$$\Rightarrow y=1 \Rightarrow x=2$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $(x, y) = (2; 1)$.

Câu 3. Lập số chẵn dạng $\overline{abcd}$. Đặt $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

+) Chọn $d=0$, chọn thứ tự a, b, c trong $E \setminus \{0\}$

+) chọn $d \neq 0$ có 2 cách chọn, chọn $a \in E \setminus \{0, d\}$ có 3 cách chọn, chọn b và c thứ tự trong $E \setminus \{d, a\}$ có $A_3^2 = 6$ cách, Dạng này có $2.3.6. = 36$ số.

• Tính số các số chẵn lập được không lớn hơn 2012, có dạng $\overline{1bcd}$;

Chọn d chẵn có 3 cách, chọn b và c thứ tự trong tập $E \setminus \{1; d\}$ có $A_3^2 = 6$ Cách.

Dạng này có: $3.6 = 18$ số. Suy ra số lớn hơn 2012 có $60 - 18 = 42$ số.

Xác suất cần tính: $P = \frac{42}{60} = \frac{7}{10}$.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\sin x + \cos x)}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x)}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$$

b)

Đặt $x = -t$. Ta có:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\sin x + \cos x)}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(-\sin t + \cos t)}{3\sin^2 t + 4\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\sin t + \cos t)}{3\sin^2 t + 4\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\sin x + \cos x)}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx \\ \Rightarrow I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{4 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x + 2} - \frac{1}{\sin x - 2} \right) d(\sin x) \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{\sin x + 2}{\sin x - 2} \right| \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3 \end{aligned}$$

Câu 4. 1. (C) có tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 3$.

Nhận xét: $A \in (C) \Rightarrow OA = OM \Rightarrow ABMO$ là hình thoi $\Rightarrow AM \perp OB$

$$I = AM \cap OB \Rightarrow OG = \frac{4}{3}OI$$

Gọi

Kẻ $GK \parallel AM$, $K \in OA$, ta có:

$$OK = \frac{4}{3}OA \Rightarrow K(4; 0)$$

$GK \parallel AM \Rightarrow GK \perp OB \Rightarrow G$ thuộc đường tròn
kính OK .

Tọa độ $G(x; y)$, $y > 0$ thỏa mãn:

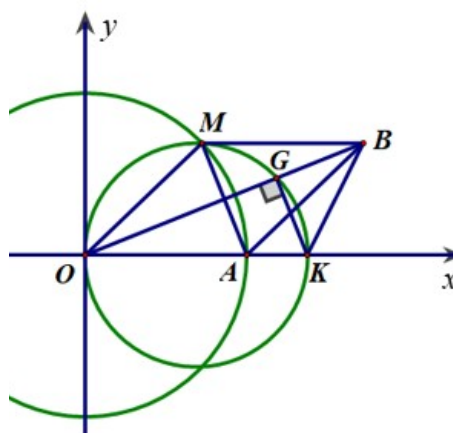
$$\begin{cases} y = x - 3 + \sqrt{3} \\ (x - 2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 - \sqrt{3} \\ (y + 1 - \sqrt{3})^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 - \sqrt{3} \\ 2y^2 + 2(1 - \sqrt{3})y - 2\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow G(3; \sqrt{3}) \quad (\text{do } y > 0)$$

$$S_{\Delta AMB} = S_{\Delta OAM} = 2S_{\Delta OAI} = 2 \cdot \frac{9}{16} S_{OKG} = \frac{9}{8} \cdot \frac{OK \cdot d(G, Ox)}{2} = \frac{9 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

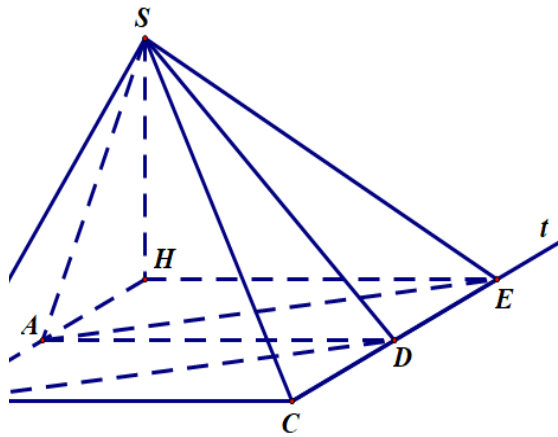
Diện tích:

2. a) Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$,



đường

Suy ra $H \in AB$ (do
 $(SAB) \perp (ABCD)$).
 $CB \perp HB$, suy ra góc giữa hai mặt
 (SBC) và $(ABCD)$ là
Hạ $HE \perp CD$ ($E \in CD$) suy ra góc
mặt phẳng (SCD) và
 $(ABCD)$ là $\widehat{SEH}$. Do đó



phẳng
 $\widehat{SBH}$.
giữa hai

$$\widehat{SBH} = \widehat{SEH} \Rightarrow HB = HE = 2a$$

Ta được $BD \parallel AE \Rightarrow BD \parallel (SAE)$

$$\Rightarrow d(SA; BD) = d(B; (SAE)) = d(H; (SAE)) \quad (\text{do } A \text{ là trung điểm } HB) \Rightarrow d(H; (SAE)) = \frac{2a}{\sqrt{6}}$$

Nhận xét rằng HA, HE, HS đôi một vuông góc, suy ra:

$$\frac{1}{d^2(H; (SAE))} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{HS^2} \Leftrightarrow \frac{3}{2a^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{HS^2} \Leftrightarrow SH = 2a$$

Thể tích: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{4a^2}{3}$.

b) $BD \parallel AE$, suy ra góc giữa hai đường thẳng SA và BD là $\widehat{SAE}$

Áp dụng định lí hàm số coossin cho tam giác SAE , với $AE = SA = \sqrt{SH^2 + HA^2} = a\sqrt{5}$ và
 $SE = SH\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$ ta có:

$$\cos(\widehat{SA, BD}) = \cos \widehat{SAE} = \frac{SA^2 + AE^2 - SE^2}{2 \cdot SA \cdot AE} = \frac{1}{5}.$$

Câu 5. Đặt $3x - 1 = a, 2y - 1 = b, z - 1 = c$. Ta có: a, b, c là các số dương và $A = abc$.

Khi đó: $\frac{3}{3x+2} + \frac{2}{2y+1} + \frac{1}{z} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{3}{a+3} + \frac{2}{b+2} + \frac{1}{c+1} \geq 2$

$$\Leftrightarrow 3 - \left(\frac{a}{a+3} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+1} \right) \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a}{a+3} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+1} \leq 1$$

Suy ra: $\frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+1} \leq 1 - \frac{a}{a+3}$ hay $\frac{3}{a+3} \geq \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+1} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{(b+2)(c+1)}} \quad (1)$

$$\frac{2}{b+2} \geq \frac{2\sqrt{ca}}{\sqrt{(c+1)(a+3)}} \quad (2) \quad \text{và} \quad \frac{1}{c+1} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{(a+3)(b+2)}} \quad (3)$$

Tương tự:

Nhân vế tương ứng của (1), (2) và (3), ta được: $A \leq \frac{3}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a}{a+3} = \frac{b}{b+2} = \frac{c}{c+1} = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3}{2}, b = 1, c = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}, y = 3, z = \frac{3}{2}. \text{ Vậy } \max A = \frac{3}{4}.$$

ĐỀ SỐ 13

$$M \in (C) \Rightarrow M \left(a; \frac{a-2}{a+1} \right), a \neq -1 \Rightarrow y' = \frac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(a) = \frac{3}{(a+1)^2}$$

Câu 1. a)

$$y = \frac{3}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{a-2}{a+1} \quad (\Delta)$$

Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình

Tiệm cận đứng Δ_1 có phương trình $x = -1$

Tiệm cận ngang Δ_2 có phương trình $y = 1 \Rightarrow I(-1; 1)$

$$\Delta \cap \Delta_1 \Rightarrow A \left(-1; \frac{a-5}{a+1} \right), \Delta \cap \Delta_2 = B \Rightarrow B(2a+1; 1)$$

$$S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{1}{2} \left| \frac{a-5}{a+1} - 1 \right| \cdot |2a+2| = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{|a+1|} \cdot 2|a+1| = 6$$

(không phụ thuộc vào a , đpcm)

$$b) y = 9x + m\sqrt{x^2 + 9}$$

$$D = \mathbb{R}, y' = 9 + \frac{mx}{\sqrt{x^2 + 9}}, y'' = \frac{9m}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$$

TXĐ:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 9\sqrt{x^2 + 9} + mx = 0 \Leftrightarrow 9\sqrt{x^2 + 9} = -mx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mx < 0 \\ 81(x^2 + 9) = m^2 x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx < 0 \\ (m^2 - 81)x^2 = 81 \cdot 9 \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{Trường hợp 1. } m^2 \leq 81 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq 9 \Rightarrow |m| \cdot |x| \leq 9|x| < 9\sqrt{x^2 + 9} \quad (\forall x)$$

$$y' = \frac{9\sqrt{x^2 + 9} + mx}{\sqrt{x^2 + 9}} > 0, \forall x \Rightarrow$$

Nên

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị.

$$m > 9 \Rightarrow x_1 = \frac{-27}{\sqrt{m^2 - 81}}$$

Trường hợp 2.

$$y''(x_1) = \frac{9m}{(x^2 + 9)\sqrt{x_1^2 + 9}} > 0 \Rightarrow x_1 \text{ là điểm cực tiểu} \Rightarrow m > 9 \text{ (loại)}$$

$$m < -9 \Rightarrow (I) \Leftrightarrow x_2 = \frac{27}{\sqrt{m^2 - 81}}$$

Trường hợp 3.

$$y''(x_2) = \frac{9m}{(x_2^2 + 9)\sqrt{x_2^2 + 9}} < 0 \Rightarrow x_2 \text{ là điểm cực đại.}$$

Vậy hàm số có cực đại $\Leftrightarrow m < -9$.

Câu 2. a) Ta có:

$$\sin^{2012} x + \cos^{2012} x = \frac{1}{2^{1005}} \quad (1)$$

Đặt $t = \sin^2 x, t \in [0; 1]$ (1) có dạng:

$$t^{1006} + (1-t)^{1006} = \frac{1}{2^{1005}} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^{1006} + (1-t)^{1006}, t \in [0; 1]$

$$f'(x) = 1006 [t^{1005} - (1-t)^{1005}]; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = f(1) = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{1005}} \Rightarrow \min_{[0;1]} f(x) = \frac{1}{2^{1005}}$$

Vậy $(2) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ hay $(1) \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = y + \sqrt{y^2 - 1} & (1) \\ x^2 + y^2 - xy = 1 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $|y| \geq 1. (1) \Leftrightarrow x - y = \sqrt{y^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}$

$$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = y^2 - 1 + x^2 + 1 - 2\sqrt{(y^2 - 1)(x^2 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow xy = \sqrt{(y^2 - 1)(x^2 + 1)} \Rightarrow x^2 y^2 = x^2 y^2 + y^2 - x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = -1$$

Kết hợp với (2) ta được $\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 - xy = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - xy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2x \end{cases}$

Với $x = 0$ từ (2) $\Rightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$

Với $y = 2x$ từ $(2) \Rightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$(x; y) = \left\{ (0; 1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm:

$$\tan x + \sin x - \frac{9}{2}x \geq \frac{3}{2}(\sqrt{3} - \pi), \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$$

Câu 3. a) Ta có:

Xét hàm số $f(x) = \tan x + \sin x - \frac{9}{2}x$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x - \frac{9}{2} = \frac{2\cos^3 x - 9\cos^2 x + 2}{2\cos^2 x} \\ &= \frac{(2\cos x - 1)(\cos^2 x - 4\cos x - 2)}{2\cos^2 x} \end{aligned}$$

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow 0 < \cos x < 1 \Rightarrow (\cos^2 x - 2) - 4\cos x < 0 \Rightarrow f'(x)$ cùng dấu với $1 - 2\cos x$

Bảng biến thiên của $f(x)$

Vậy $f(x) = \tan x + \sin x - \frac{9}{2}x \geq \frac{3}{2}(\sqrt{3} - \pi), \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{\pi}{3}$

$$A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \tan A + \sin A \geq \frac{9}{2}A + \frac{3}{2}(\sqrt{3} - \pi)$$

Áp dụng: ΔABC nhọn nên

Tương tự, cộng lại ta được:

$$\tan A + \tan B + \tan C + \sin A + \sin B + \sin C \geq \frac{9}{2}(A + B + C) + \frac{9}{2}(\sqrt{3} - \pi)$$

Kết hợp với $A + B + C = \pi$, ta có đpcm

	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	-	0	+
	$\swarrow \quad \frac{3}{2}(\sqrt{3} - \pi) \quad \nearrow$		

$$b) y = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - \sqrt{16-x^2}$$

$$\text{TXĐ: } D = [-4; 4]$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}, t \geq 0$$

$$\text{Bình phương ta được } t^2 = 8 + 2\sqrt{(x+4)(4-x)} \geq 8. \text{ Dấu bằng có khi } x = \pm 4$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$t^2 = 8 + 2\sqrt{(x+4)(4-x)} \leq 8 + (x+4) + (4-x) = 16. \text{ Dấu bằng có khi } x = 0$$

$$\text{Do } t \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{2} \leq t \leq 4$$

$$\text{Khi đó } y = f(t) = t - \frac{t^2 - 8}{2} = \frac{1}{2}t^2 + t + 4, t \in [2\sqrt{2}; 4]$$

$$f'(t) = -t + 1, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ (loại)}$$

$$f(2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}, f(4) = 0$$

$$\text{Vậy } \min_{[-4; 4]} y = \min_{[2\sqrt{2}; 4]} f(t) = 0 \text{ khi } x = 0, \max_{[-4; 4]} f(t) = \min_{[2\sqrt{2}; 4]} f(t) = 2\sqrt{2} \text{ khi } x = \pm 4$$

$$\text{Câu 4. a) } BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$$

$$SC \perp (P) \Rightarrow SC \perp AB' \Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB$$

$$\text{Tương tự } AD' \perp SD \Rightarrow V_{S.ABC'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AD'C'}$$

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{SA^2}{SB^2} \cdot \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20} \quad (1)$$

$$\frac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{SA^2}{SD^2} \cdot \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20} \quad (2)$$

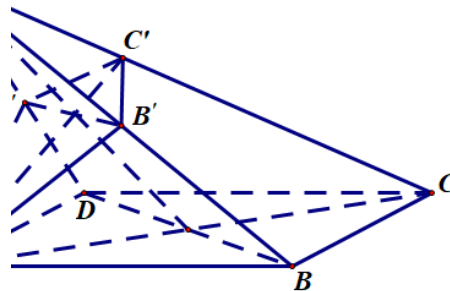
$$\text{Do } V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{\frac{a^3\sqrt{3}}{6}} + \frac{V_{S.AD'C'}}{\frac{a^3\sqrt{3}}{6}} = \frac{9}{20} + \frac{9}{20}$$

$$\Leftrightarrow V_{S.AB'C'D'} = \frac{9}{20} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{20}$$

$$b) V_{S.AMN} = \frac{1}{3} \cdot S_{AMN} \cdot a\sqrt{3}$$



Đặt $BM = x, DN = y; x, y \in [0; a]$

Trên tia đối của tia DC lấy điểm P sao cho
 $DP = BM = x$

$$\triangle ABM = \triangle ADP$$

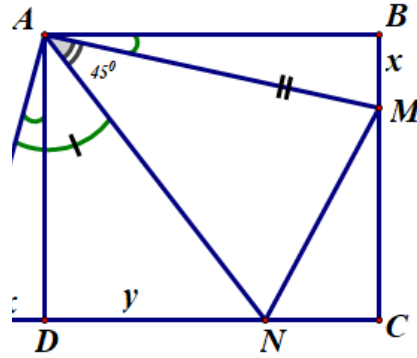
$$\Rightarrow AM = AP, \angle BAM = \angle DAP$$

$$\angle MAN = 45^\circ \Rightarrow \angle BAM + \angle DAN = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle NAP = \angle DAP + \angle DAN = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle MAN = \triangle PAN$$

$$\Rightarrow S_{MAN} = S_{PAN} = \frac{1}{2} AD \cdot PN = \frac{1}{2} a(x+y) (*)$$



Áp dụng định lí Pitago trong $\triangle CMN$ vuông ta được: $MN^2 = MC^2 + CN^2$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay$$

$$\Leftrightarrow xy + a(x+y) = a^2 \Leftrightarrow y = \frac{a^2 - ax}{x+a}$$

$$S_{MAN} = \frac{1}{2} a \left(x + \frac{a^2 - ax}{x+a} \right)$$

Thế vào (*) ta được:

$$f(x) = \frac{a}{2} \left(\frac{x^2 + a^2}{x+a} \right) \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2} \cdot \frac{x^2 + 2ax - a^2}{(x+a)^2}$$

Đặt

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = (\sqrt{2} - 1)a$$

$$f(0) = f(a) = \frac{a^2}{2}; f((\sqrt{2} - 1)a) = a^2(\sqrt{2} - 1)$$

$$\Rightarrow \max_{[0; a]} f(x) = \frac{a^2}{2}; \min_{[0; a]} f(x) = a^2(\sqrt{2} - 1)$$

Vậy $\max V_{S.AMN} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$ khi $\begin{cases} M \equiv B, N \equiv C \\ M \equiv C, N \equiv D \end{cases}$

$\min V_{S.AMN} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)a^3}{3}$ khi $MB = ND = a(\sqrt{2} - 1)$.

Câu 5. $\frac{a^2 + ab + 1}{\sqrt{a^2 + 3ab + c^2}} + \frac{b^2 + bc + 1}{\sqrt{b^2 + 3bc + a^2}} + \frac{c^2 + ca + 1}{\sqrt{c^2 + 3ca + b^2}} \geq \sqrt{5}(a + b + c)$

$\forall x, y > 0$ ta có $x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 \geq 2xy - y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y} \geq 2x - y$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{a^2 + ab + 1}{\sqrt{a^2 + 3ab + c^2}} + \sqrt{\frac{(a^2 + ab + 1)^2}{a^2 + 3ab + c^2}} \geq \sqrt{2(a^2 + ab + 1) - (a^2 + 3ab + c^2)} \\
&= \sqrt{2 + a^2 - c^2 - ab} \geq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2) + a^2 - c^2 - \frac{a^2 + b^2}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{5a^2 + 3b^2 + 2c^2}{2}} = \sqrt{\frac{10(a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2)}{20}} \\
&\geq \frac{\sqrt{(a + a + a + a + a + b + b + b + c + c)}}{2\sqrt{5}} = \frac{5a + 3b + 2c}{2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Tương tự cộng lại ta được:

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2 + ab + 1}{\sqrt{a^2 + 3ab + c^2}} + \frac{b^2 + bc + 1}{\sqrt{b^2 + 3bc + a^2}} + \frac{c^2 + ca + 1}{\sqrt{c^2 + 3ca + b^2}} \geq \sqrt{5}(a + b + c) \\
&\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra

ĐỀ SỐ 14

Câu 1.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị: $3mx^2 - 3m^2x - m = 0, x \neq \frac{-1}{m}$

Vì $m \neq 0$ nên phương trình $\Leftrightarrow 3x^2 - 3mx - 1 = 0$ (*)

Ta có $\Delta = 9m^2 + 12 > 0, \forall m \neq 0$ và $f\left(-\frac{1}{m}\right) = \frac{3}{m^2} + 2 \neq 0, \forall m \neq 0$ (ở đây $f(x)$ là vế trái của (*)) nên d luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B phân biệt với $m \neq 0$

Ta có $A(x_1; 3x_1 - 3m), B(x_2; 3x_2 - 3m)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của (*)

Kẻ đường cao OH của tam giác OAB ta có $OH = d(O, d) = \frac{|-3m|}{\sqrt{10}}$ và

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (3x_2 - 3x_1)^2} = \sqrt{10(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{10(x_2 + x_1)^2 - 40x_2x_1} = \sqrt{10m^2 + \frac{40}{3}}$$

Mặt khác $C(m; 0), D(0; -3m)$ (để ý $m \neq 0$ thì C, D, O phân biệt)

Ta tìm m để $S_{\triangle OAB} = 2S_{\triangle OCD}$ hay $\sqrt{10m^2 + \frac{40}{3}} \cdot \frac{|-3m|}{\sqrt{10}} = 2 \cdot |m| \cdot |3m| \Leftrightarrow m = \pm \frac{2}{3}$

b) Gọi $M(x_0; y_0)$

Đường thẳng d đi qua M, có hệ số góc k có phương trình $y = k(x - x_0) + y_0$, d tiếp xúc với (C) khi hệ sau có

$$\begin{cases} x+1+\frac{1}{x+1} = k(x-x_0)+y_0 & (1) \\ 1-\frac{1}{(x+1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

nghiệm $x \neq -1$:

$$(1) \Leftrightarrow x+1+\frac{1}{x+1} = k(x-1)+k-kx_0+y_0 \quad (3)$$

Thay k ở (2) vào (3) ta được: $x+1+\frac{1}{x+1} = x-1-\frac{1}{x-1}+k-kx_0+y_0$. Suy ra $\frac{1}{x-1} = \frac{k(1-x_0)+y_0-2}{2}$

$$1 - \left[\frac{k(1-x_0)+y_0-2}{2} \right]^2 = k$$

Thay vào (2) được:

$$\Leftrightarrow (x_0-1)^2 k^2 + 2[(1-x_0)(y_0-2)+2]k + (y_0-2)^2 - 4 = 0 \quad (*)$$

Nếu từ M kẻ đến (C) hai tiếp tuyến vuông góc thì phương trình (*) có hai nghiệm k_1, k_2 thỏa mãn $k_1 k_2 = -1$

$$\Rightarrow \frac{(y_0-2)^2-4}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 + (y_0-2)^2 = 4 \Rightarrow$$

M nằm trên đường tròn tâm $I(1;2)$, có bán kính

$$R=2 \text{ (ĐPCM)}$$

Câu 2.

a) Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 5^x(15x-5) = 27x+23$.

Ta phải có $15x-5 \neq 0$ và phương trình trên trở thành $5^x = \frac{27x+23}{15x-5}$

Hàm số $f(x) = 5^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ còn hàm số $g(x) = \frac{27x+23}{15x-5}$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Vậy phương trình có tối đa một nghiệm trên mỗi khoảng.

Mặt khác $f(1) = g(1) = 5$ và $f(-1) = g(-1) = \frac{1}{5}$ Nên phương trình có hai nghiệm là $x = \pm 1$

b) Ta có: $\log_2 \frac{2x+1}{x^2-2x+1} \leq 2x^2-6x+2$

Điều kiện $x \neq 1, x > -\frac{1}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2 \frac{2x+1}{x^2-2x+1} - 1 \leq 2x^2-6x+1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2x+1}{2x^2-4x+2} \leq 2x^2-6x+1$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x+1) - \log_2(2x^2-4x+2) \leq (2x^2-4x+2) - (2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x+1) + (2x+1) \leq \log_2 (2x^2 - 4x + 2) + (2x^2 - 4x + 2)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x+1 \\ v = 2x^2 - 4x + 2 \end{cases} \text{ thì } u, v > 0 \text{ và } u + \log_2 u \leq v + \log_2 v \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t, t \in D = (0; +\infty)$. Có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in D$

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên D.

Khi đó, (1) thành $f(u) \leq f(v)$ và u, v thuộc D và $f(t)$ đồng biến trên D nên $u \leq v$

$$\text{Tức là } 2x+1 \leq 2x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \text{ hoặc } x \geq \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được tập nghiệm của bất phương trình là:

$$T = \left[-\frac{1}{2}; \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{7}}{2}; +\infty \right)$$

Câu 3.

a) Theo định lí cosin trong tam giác SAB ta có:

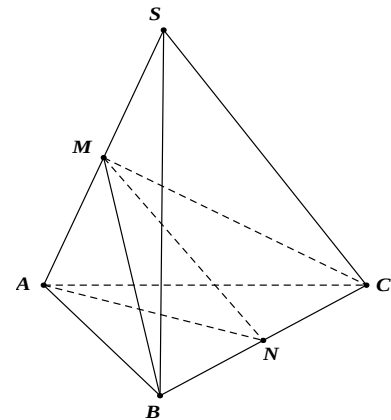
$$SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2SA \cdot AB \cdot \cos 30^\circ = 3a^2 + a^2 - 2a\sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2$$

Vậy $SB = a$. Tương tự ta cũng có $SC = a$

Gọi M là trung điểm SA, do $\triangle SAB$ cân tại B và $\triangle SAC$ cân tại C

Nên $MB \perp SA, MC \perp SA$

$$\text{Ta có } V_{SABC} = V_{SBMC} + V_{ABMC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{MBC}$$



$\triangle SAB = \triangle SAC$ (c.c.c) nên $MB = MC$

$\Rightarrow \triangle MBC$ cân tại M, do đó $MN \perp BC$, ta cũng có $MN \perp SA$ (ở đây N là trung điểm BC)

$$MN^2 = AN^2 - AM^2 = AB^2 - BN^2 - AM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Từ đó

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} MN \cdot BC = \frac{a^3}{16}$$

b) Giả sử tứ diện ABCD có $AB > 1$, các cạnh còn lại đều không lớn hơn 1

Đặt $CD = x, x \in (0; 1]$

Gọi M là trung điểm BC, K là hình chiếu vuông góc của B lên CD và H là hình chiếu vuông góc của A lên

$$(BCD). \text{ Khi đó } V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot AH = \frac{1}{6} x \cdot BK \cdot AH \quad (1)$$

Có

$$BM^2 = \frac{BC^2 + BD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} \leq 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow BM \leq \frac{1}{2}$$

$$AM \leq \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$$

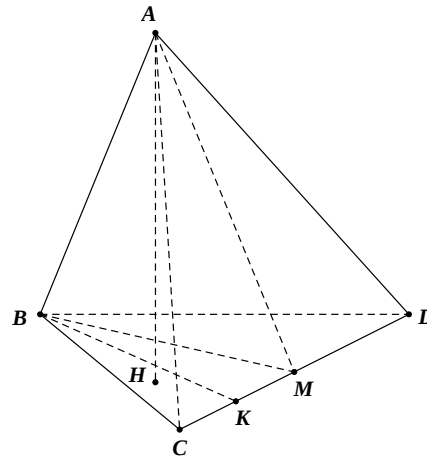
Tương tự

$$BK \leq BM \Rightarrow BK \leq \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} \quad (2)$$

Mà

$$AH \leq AM \Rightarrow AH \leq \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $V_{ABCD} \leq \frac{1}{24}x(4-x^2)$



Mặt khác hàm số $f(x) = \frac{1}{24}x(4-x^2); x \in (0;1]$ đồng biến nên $f(x) \leq f(1) = \frac{1}{8}$

Nên $V_{ABCD} \leq \frac{1}{8}$ (đpcm)

(Dấu “=” xảy ra khi $\triangle ACD, \triangle BCD$ là hai tam giác đều có cạnh bằng 1 và H, K trùng với M. Khi đó

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1$$

Câu 4.

$$I = \int_2^3 \frac{\sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x^2-4}} dx = \int_2^3 \frac{\sqrt{x+2}(x - \sqrt{x^2+4})}{x^2 - (x^2-4)} dx$$

a) Ta có

$$= \frac{1}{4} \int_2^3 x\sqrt{x+2} dx - \frac{1}{4} \int_2^3 \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x^2-4} dx = \frac{1}{4} I_1 - \frac{1}{4} I_2$$

Tính I_1 : $I_1 = \int_2^3 (x+2-2)\sqrt{x+2} dx = \int_2^3 (x+2)^{\frac{3}{2}} dx - 2 \int_2^3 (x+2)^{\frac{1}{2}} dx$

$$= \frac{2}{5} (x+2)^{\frac{5}{2}} \Big|_2^3 - 2 \cdot \frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^3 = \frac{10\sqrt{5}}{3} - \frac{32}{15}$$

Tính I_2 : $I_2 = \int_2^3 (x+2)\sqrt{x-2} dx$

Đặt $t = \sqrt{x-2}$ ta có $dx = 2tdt$ và $I_2 = \int_0^2 (t^2+4)t \cdot 2tdt$

Do đó $I_2 = \frac{2t^5}{5} \Big|_0^2 + \frac{8t^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{46}{15}$. Vậy $I = \frac{1}{4} I_1 - \frac{1}{4} I_2 = \frac{25\sqrt{5} - 39}{30}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1 + \sin x) \ln(\cos x + 1) - \ln(1 + \sin x)] dx$$

b) Có

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \ln(1 + \cos x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x) dx = A + B - C$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) dx$$

Xét

$$x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow A = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(1 + \sin t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x) dx = C$$

Đặt . Vậy $I = B$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \ln(1 + \cos x) dx$$

Xét

$$. \text{Đặt } u = 1 + \cos x \text{ thì } B = \int_1^2 \ln u du$$

$$B = u \ln u \Big|_1^2 - \int_1^2 du = 2 \ln 2 - 1$$

Dùng tích phân từng phần được

. Vậy $I = 2 \ln 2 - 1$

Câu 5.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(a+1)(b+1)(c+1) \leq \left(\frac{a+b+c+3}{3} \right)^3$$

và

$$P \leq \frac{1}{a+b+c+1} - \frac{27}{(a+b+c+3)^3}$$

$$P \leq \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}$$

Đặt $t = a + b + c + 1 \Rightarrow t > 1$. Ta có

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}, t \in (1; +\infty)$$

Xét hàm số

Vẽ bảng biến thiên của hàm số này trên $(1; +\infty)$ ta có $\max f(t) = f(4) = \frac{1}{8}$

Từ đó $P \leq \frac{1}{8}$ và dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

ĐỀ SỐ 15

Câu 1.

$$a) \text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + x + 1}, t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a) Đặt

Khi đó phương trình trở thành: $4t = -t^4 + 7t^2 - 5 \Leftrightarrow t^4 - 6t^2 + 9 - (t^2 - 4t + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 3)^2 - (t - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - t - 1)(t^2 + t - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - t - 1 = 0 \\ t^2 + t - 5 = 0 \end{cases}$$

+ Với $t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì phương trình $t^2 - t - 1 = 0$ có một nghiệm là $t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

+ Với $t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì phương trình $t^2 + t - 5 = 0$ có một nghiệm là $t = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$

Khi $t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ thì $x^2 + x + 1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 - \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2}$

Khi $t = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$ thì $x^2 + x + 1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 9 + \sqrt{21} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{19 - 2\sqrt{21}}}{2}$

b) Phương trình đã cho được viết lại: $3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x = 3(\sqrt{3}\sin x + \cos x)$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\sin x + \cos x)^2 - 3(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0 \\ \sqrt{3}\sin x + \cos x = 3 \end{cases}$$

+ Với $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

+ Với $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 3$ phương trình vô nghiệm

Câu 2.

a) Chọn hệ trục tọa độ B_{xy} vuông góc sao cho tia Bx qua A và tia By qua C. Ta có $B(0;0), A(2;0), C(0;2)$.

Giả sử $M(x; y)$.

$$MA^2 + MB^2 = MC^2 \Leftrightarrow (2 - x)^2 + y^2 + x^2 + y^2 = x^2 + (2 - y)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$$

Phương trình trên là phương trình của một đường tròn tâm $I(2; -2)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Xét trường hợp: $\angle BGC = 120^\circ$

Ta có: $BC^2 = GB^2 + GC^2 - 2GB \cdot GC \cdot \cos 120^\circ = 76$

$$MC^2 = GM^2 + GC^2 - 2GM \cdot GC \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{AC^2}{4} = 28 \Leftrightarrow AC^2 = 112$$

$$NB^2 = GB^2 + GN^2 - 2GB \cdot GN \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{AB^2}{4} = 13 \Leftrightarrow AB^2 = 52$$

Vậy độ dài đường trung tuyến $m_a = \frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = 171 \Rightarrow m_a = \sqrt{171}$

Xét trường hợp: $\angle BGC = 60^\circ$. Ta có $BC^2 = GB^2 + GC^2 - 2GB \cdot GC \cdot \cos 60^\circ = 28$

$$MC^2 = GM^2 + GC^2 - 2GM.GC.\cos 120^\circ \Leftrightarrow \frac{AC^2}{4} = 52 \Leftrightarrow AC^2 = 208$$

$$NB^2 = GB^2 + GN^2 - 2.GB.GN.\cos 120^\circ \Leftrightarrow \frac{AB^2}{4} = 37 \Leftrightarrow AB^2 = 148$$

$$m_a^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = 171 \Rightarrow m_a = \sqrt{171}$$

Vậy độ dài trường trung tuyến còn lại:

Câu 3.

a) Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ $u_{n+1} = \sqrt{3u_n^2 + 2} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = 3u_n^2 + 2$

Đặt $v_n = u_n^2$ thì có $v_{n+1} = 3v_n + 2 \Leftrightarrow v_{n+1} + 1 = 3(v_n + 1)$

Đặt $x_n = v_n + 1$ thì ta có: $x_{n+1} = 3x_n$. Từ đây suy ra (x_n) là một cấp số nhân với $x_1 = 2, q = 3$

b) $S = 2.3^0 + 2.3^1 + 2.3^2 + \dots + 2.3^{2010} - 2011 = 2(3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2010}) - 2011$

$$= \frac{2.(3^{2011} - 1)}{3 - 1} - 2011 = 3^{2011} - 2012.$$

Câu 4.

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3 \Rightarrow a+b+c \leq \sqrt{3} \text{ và } (a+b+c)^3 \leq 3(a+b+c)$$

$$M \leq 2(a+b+c) + 6abc \leq 2\sqrt{3} + 6\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy GTLN của M là $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. Giá trị này đạt được khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 5.

$$\begin{cases} (x^2 + 2x)(x + y) = -2m - 3 \\ x^2 + 2x + x + y = m \end{cases}$$

Viết lại hệ

Đặt $u = x^2 + 2x, v = x + y$. Dễ có $u \geq -1$

Hệ trở thành $\begin{cases} u.v = -2m - 3 \\ u + v = m \end{cases} \Rightarrow u(m - u) = -2m - 3 \Leftrightarrow u^2 - 3 = m(u + 2) \Leftrightarrow \frac{u^2 - 3}{u + 2} = m$

Xét hàm số $f(u) = \frac{u^2 - 3}{u + 2}, u \geq -1$. Bảng biến thiên:

u	-1		$+\infty$
$f'(u)$		+	
$f(u)$	-2	→ $+\infty$	

Vậy $m \geq -2$.

ĐỀ SỐ 16

Câu 1. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C)

$$4 - \frac{6}{x} = 3x + m \Leftrightarrow 3x^2 + (m - 4)x + 6 = 0 \quad (1)$$

Đặt $f(x) = 3x^2 + (m - 4)x + 6 \Rightarrow \Delta = (m - 4)^2 - 72$

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 + 6\sqrt{2} \\ m < 4 - 6\sqrt{2} \end{cases}$$

Gọi $A(x_1; 3x_1 + m), B(x_2; 3x_2 + m)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1)

Theo định lý Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4 - m}{3} \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$$

$\square_{AOB}$ nhọn $\Rightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} > 0 \Leftrightarrow 10x_1 x_2 + 3m(x_1 + x_2) + m^2 > 0$

$$\Leftrightarrow 20 + 3m \left(\frac{4 - m}{3} \right) + m^2 > 0 \Leftrightarrow m > -5$$

Kết hợp điều kiện $(*)$ ta được điều kiện cần tìm của m là: $m \in (-5; 4 - 6\sqrt{2}) \cup (4 + 6\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 2.

a)
$$\begin{cases} 2(x^3 + 2x - y - 1) = x^2(y + 1) & (1) \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{y+1} = 4 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Điều kiện: $x \geq -2; y \geq -1$

Biến đổi phương trình (1) về dạng: $(x^2 + 2)(2x - y - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 1$

Thế vào phương trình (2) ta được: $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x} = 4 \quad (3)$

Biến đổi (3) về dạng: $2\sqrt{2x(x+2)} = 14 - 3x \quad (4)$

Giải đúng (4) được nghiệm $x = 2 \Rightarrow y = 3$. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$.

b) $|3^x + 2x - 2x \cdot 3^x| = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

$$3^x + 2x - 2x \cdot 3^x = 1 \Leftrightarrow (3^x - 1)(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Trường hợp 1:

$$3^x + 2x - 2x \cdot 3^x = -1 \Leftrightarrow 3^x - \frac{2x+1}{2x-1} = 0 \quad \left(x \neq \frac{1}{2} \right) \quad (1)$$

Trường hợp 2:

Xét hàm số $f(x) = 3^x - \frac{2x+1}{2x-1}, x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$$f'(x) = 3^x \ln 3 + \frac{4}{(2x-1)^2} > 0, \forall x \neq \frac{1}{2}.$$

Suy ra, $f(x)$ đồng biến trên từng khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Nên trên mỗi khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, phương trình (1) có nhiều nhất một nghiệm

Mà $f(1) = f(-1) = 0$. Suy ra, (1) có 2 nghiệm $x = \pm 1$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là: $\left\{-1; 0; \frac{1}{2}; 1\right\}$

Câu 3. Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} acy + abz = a^2 \\ baz + bcx = b^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 2bcx \Rightarrow x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow x = \cos A \\ cbx + cay = c^2 \end{cases}$$

(Định lý cosin)

Tương tự ta được: $y = \cos B$; $z = \cos C$

Khi đó $T = x + y + z = \cos A + \cos B + \cos C$

$$\begin{aligned} T + \cos \frac{\pi}{3} &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \left(\frac{C}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos \left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \leq 2 \left[\cos \frac{A+B}{2} + \cos \left(\frac{C}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= 4 \cos \left(\frac{A+B+C}{4} + \frac{\pi}{12}\right) \cos \left(\frac{A+B+C}{4} - \frac{\pi}{12}\right) \leq 4 \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow T \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi ΔABC đều hay $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Câu 4. AB', BO, CD đồng quy tại M. Gọi B_1, O_1 lần lượt là hình chiếu của B, O trên mặt phẳng (ACD) .

$$\frac{OO_1}{BB_1} = \frac{MO}{MB} = \frac{OB'}{AB}$$

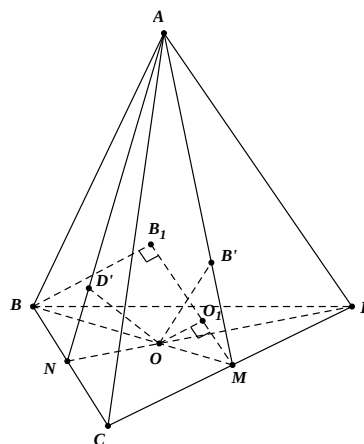
Khi đó:

$$\frac{V_{OACD}}{V_{ABCD}} = \frac{OB'}{AB}$$

Từ đó chứng minh được

Tương tự ta thu được:

$$\frac{OB'}{AB} + \frac{OC'}{AC} + \frac{OD'}{AD} = \frac{V_{OACD} + V_{OABD} + V_{OADC}}{V_{ABCD}} = 1$$



Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$1 = \frac{OB'}{AB} + \frac{OC'}{AC} + \frac{OD'}{AD} \geq 3\sqrt[3]{\frac{OB'}{AB} \cdot \frac{OC'}{AC} \cdot \frac{OD'}{AD}} = 3\sqrt[3]{\frac{OB' \cdot OC' \cdot OD'}{54324}}$$

$$\Rightarrow OB' \cdot OC' \cdot OD' \leq 2012 \quad (\text{ĐPCM})$$

Câu 5. Gọi $M(1-t; -2+t; 2t) \in d$. Tính được $MA + MB = \sqrt{6t^2 - 20t + 40} + \sqrt{6t^2 - 28t + 36}$. Biến đổi được

$$MA + MB = \sqrt{6} \left[\sqrt{\left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{35}{9}} + \sqrt{\left(\frac{7}{3} - t\right)^2 + \frac{5}{9}} \right]$$

Đặt $\vec{u} = \left(t - \frac{5}{3}; \frac{\sqrt{35}}{3}\right), \vec{v} = \left(\frac{7}{3} - t; \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Dấu “=” xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng hay $\frac{1 - \frac{5}{3}}{\sqrt{35}} = \frac{\frac{7}{3} - 1}{\sqrt{5}}$. Ta tìm được

$$t = \frac{22 - \sqrt{7}}{9} \Rightarrow M\left(\frac{\sqrt{7} - 13}{9}; \frac{4 - \sqrt{7}}{9}; \frac{44 - 2\sqrt{7}}{9}\right)$$

Câu 6. u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow u_1 + u_3 = 2u_2 \Rightarrow u_1 u_3$ cùng tính chẵn lẻ

Số cấp số cộng u_1, u_2, u_3 chính là số cặp u_1, u_3 cùng tính chẵn lẻ. Khi đó các số hạng u_4, u_5, u_6 được chọn trong 2009 số nguyên dương còn lại.

Số cách chọn cấp số cộng u_1, u_2, u_3 là $2 \cdot A_{1006}^2$

Số cách chọn bộ 3 số hạng u_4, u_5, u_6 là A_{2009}^3

Vậy số các dãy số thỏa mãn yêu cầu là: $2 \cdot A_{1006}^2 \cdot A_{2009}^3$

ĐỀ SỐ 17

Câu 1. a) Điều kiện: $\cos x \neq 0$. Đặt $t = \tan x$, khi đó: $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Phương trình trở thành: $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$$\Rightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Phương trình đã cho tương ứng với: $\left[\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]^3 = 4 \sin x$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^3 = 4 \sin x \Leftrightarrow (\tan x - 1)^3 = 4 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 3 \tan^3 x + 3 \tan^2 x + \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\tan x + 1)(3 \tan^2 x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 2. a) Phương trình đã cho tương ứng với:

$$(x+2)^3 + (x+2) = \sqrt[3]{7x^2 + 23x + 17} + 7x^2 + 23x + 12 \quad (*)$$

Đặt: $f(t) = t^3 + t$; $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Vậy $f(t)$ đồng biến nên từ (*):

$$f(x+2) = f(\sqrt[3]{7x^2 + 23x + 12}) \Rightarrow x+2 = \sqrt[3]{7x^2 + 23x + 12}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 11x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

b) Điều kiện: $x \geq \frac{3}{2}$. Đặt: $t = \sqrt{2x-3} \ (t \geq 0)$

Phương trình đã cho trở thành: $(3x+2)t = 2x^2 + x - 3 + t^2$

$$\Leftrightarrow t^2 - (3x+2)t + 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-2x-3)(t-x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2x+3 \\ t=x-1 \end{cases}$$

$$t=2x+3 \Rightarrow \sqrt{2x-3} = 2x+3 \Leftrightarrow 2x-3 = (2x+3)^2 \left(\text{do } x \geq \frac{2}{3} \right)$$

+) Với

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 10x + 12 = 0 \quad (\text{Vô nghiệm})$$

+) Với $t=x-1 \Rightarrow \sqrt{2x-3} = x-1 \Leftrightarrow 2x-3 = (x-1)^2 \ (x \geq 1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x=2$ Thử lại ta thấy $x=2$ thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất $x=2$

Câu 3. a)

Cách 1: Quy đồng và kết hợp các đẳng thức:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca);$$

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc$$

và điều kiện $abc = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức: $(a+b+c)(ab+bc+ca-2) \geq 3$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $a+b+c \geq 3$ và $ab+bc+ca \geq 3$ đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Cách 2: Đặt $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ với $xyz = 1$

$$P = \frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} + \frac{1}{y^3 + z^3 + xyz} + \frac{1}{z^3 + x^3 + xyz} \leq 1$$

Bất đẳng thức trên viết lại thành:

$$P \leq \frac{1}{xy(x+y+z)} + \frac{1}{yz(x+y+z)} + \frac{1}{zx(x+y+z)} = 1$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$ ta có:

Vậy bài toán được chứng minh.

b) Do $a \in [-1; 2]$ nên $(a-2)(a+1) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq a+2$

Tương tự ta có: $b^2 \leq b+2; c^2 \leq c+2$

Cộng lại ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \leq a + b + c + 6 = 6$ (ĐPCM)

Câu 1. **Câu 4.** Học sinh tự giải

Câu 5.

Cách 1: Đặt $x = \tan \frac{A}{2}$; $y = \tan \frac{B}{2}$; $z = \tan \frac{C}{2}$ $\left(\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2} \in (0; 1) \right)$ với A, B, C là 3 góc của một tam giác.

Ta cần chứng minh: $\tan A + \tan B + \tan C \geq \sqrt{3}$.

Bất đẳng thức dễ dàng suy ra được nhờ sử dụng đẳng thức $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$.

Cách 2: Vì $0 < x < 1$ nên $1 - x^2 > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{2}{3} = \frac{2x^2 + (1 - x^2) + (1 - x^2)}{3} \geq \sqrt[3]{2x^2(1 - x^2)^2}$

$$\Rightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}} \geq x(1 - x^2) \Rightarrow \frac{x}{1 - x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2$$

Tương tự ta có: $\frac{y}{1 - y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} y^2$; $\frac{z}{1 - z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} z^2$.

Cộng lại ta có: $VT \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (xy + yz + zx) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Dấu “=” đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Cách 3: (phương pháp tiếp tuyến)

Ta có đánh giá sau: $\frac{x}{1 - x^2} \geq \frac{6x - \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{3} - 1)^2 (2x + \sqrt{3}) \geq 0$ (đúng vì $x > 0$)

Thiết lập tương tự rồi cộng lại ta có:

$$VT \geq \frac{6(x + y + z) - 3\sqrt{3}}{2} \geq \frac{6\sqrt{3}(xy + yz + zx) - 3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Câu 6:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 y^2 + 2y^2 + 4 = 7xy & (1) \\ x^2 + 2y^2 + 6y = 3xy^2 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta có: $\frac{x^2 + 2y^2}{3y} = xy - 2$

Từ (1) ta lại có: $x^2 y^2 + 4 - 4xy = 3xy - 2y^2 \Leftrightarrow (xy - 2)^2 = 3xy - 2y^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2 + 2y^2}{3y} \right)^2 = 3xy - 2y^2$

Nhận thấy $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia hai vế cho y^2 ta được:

$$\left(\frac{t^2}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 = 3t - 2 \quad \text{với} \quad t = \frac{x}{y}$$

$$\Leftrightarrow t^4 + 4t^2 - 27t + 22 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3 + t^2 + 5t - 22) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\text{+) Với } t=1 \text{ thì } x=y \text{ ta giải được } \begin{cases} x=y=1 \\ x=y=2 \end{cases}$$

+) Với $t=2$ ta thấy không thoả mãn. Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(1;1)$ và $(2;2)$.

ĐỀ SỐ 18

Câu 1. a) Xét hàm số $f(x) = x^2 + 4, x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f(xy) = x^2y^2 + 4; f(x-y) = (x-y)^2 + 4 = x^2 + y^2 - 2xy + 4$

$$f(x+y) = (x+y)^2 + 4 = x^2 + y^2 + 2xy + 4$$

$$\Rightarrow f(xy) + f(x-y) \geq f(x+y) \Leftrightarrow x^2y^2 + 4 + x^2 + y^2 - 2xy + 4 \geq x^2 + y^2 + 2xy + 4$$

$$\Leftrightarrow (xy)^2 - 4xy + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (xy - 2)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(x) = x^2 + 4$ với $x \in \mathbb{R}$ là một hàm số khác hằng số thỏa mãn bất phương trình hàm đã cho.

b) Với $x \neq 1$ ta chọn x, y sao cho $xy = x + y$ (tức là $y = \frac{x}{x-1}$)

Từ giả thiết suy ra $f(xy) + f(x-y) \geq f(x+y) \Rightarrow f(xy) + f(x-y) \geq f(xy) \Rightarrow f(x-y) \geq 0$

$$\text{Thay } y = \frac{x}{x-1} \text{ vào ta được } f\left(\frac{x^2 - 2x}{x-1}\right) \geq 0, \forall x \neq 1 \quad (1)$$

Để ý rằng $\left\{\frac{x^2 - 2x}{x-1} : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\right\} \equiv \mathbb{R}$, từ (1) suy ra $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 2: Từ điều kiện thứ nhất suy ra dãy (b_k) với $b_k = a_k - a_{k+1}$ là dãy số giảm.

Từ đó, nếu $a_k - a_{k+1} = -d < 0$ thì $a_k - a_{k+m} = (a_k - a_{k+1}) + (a_{k+1} - a_{k+2}) + \dots + (a_{k+m-1} - a_{k+m}) < -md < 0$

Suy ra $a_{k+m} > a_k + md$ và do đó với k đủ lớn thì $a_{k+m} > 1$, mâu thuẫn với điều kiện thứ hai.

Vậy $a_k - a_{k+1} \geq 0 \quad (1)$

Giả sử tồn tại k sao cho $a_k - a_{k+1} > \frac{2}{k^2}$.

Khi đó với mọi $i < k$ đều có $a_i - a_{i+1} > a_k - a_{k+1} > \frac{2}{k^2}$ (Do dãy (b_k) giảm)

Do đó $a_i - a_{k+1} = \sum_{j=i}^k (a_j - a_{j+1}) > \frac{2}{k^2} \cdot (k+1-i) \Rightarrow a_i > \frac{2(k+1-i)}{k^2} \quad \forall i=1,2,\dots,k$.

Nhưng khi đó $\sum_{i=1}^k a_i > \frac{2}{k^2} + \frac{4}{k^2} + \dots + \frac{2k}{k^2} = \frac{k(k+1)}{k^2} = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} > 1$, mâu thuẫn với điều kiện thứ hai.

Do đó $a_k - a_{k+1} \leq \frac{2}{k^2} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra ĐPCM.

Câu 3. Gọi các điểm như hình vẽ.

Do $V\left(A; -\frac{R_3}{R_2}\right): (O_2) \rightarrow (O_3)$ nên B_2, A, C_1 thẳng hàng và B_1, C_2, A thẳng hàng.

Tương tự, cũng được C_1, A_2, B thẳng hàng;

C_2, A_1, B thẳng hàng; A_1, B_2, C thẳng hàng

và A_2, B_1, C thẳng hàng.

Gọi D là giao điểm của các đường thẳng

A_2C_1, A_1B_2 , t là tiếp tuyến chung tại A

của $(O_2), (O_3)$.

Ta có $(DB; DC) = (DC_1; DB_2) = (C_1D; C_1B_2) + (B_2C_1; B_2D)$
 $= (AB; t) + (t; AC) = (AB; AC) \pmod{\pi}$

Suy ra A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Bằng lập luận tương tự, cũng được các đường thẳng C_1A_2, B_1C_2 cắt nhau tại $D' \in (ABC)$ và các đường thẳng A_1B_2, B_1C_2 cắt nhau tại điểm D'' nằm trên đường tròn này.

Từ đó, do một đường thẳng và một đường tròn không có quá hai điểm chung nên $D'' \equiv D' \equiv D$ hay

A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 đồng quy.

Câu 4. Từ giả thiết suy ra $p \mid a^{2^{k+1}} - b^{2^{k+1}} = (a^{2^k} - b^{2^k})(a^{2^k} + b^{2^k})$ và $p \mid a^{p-1} - b^{p-1}$ (Do định lý Fermat)

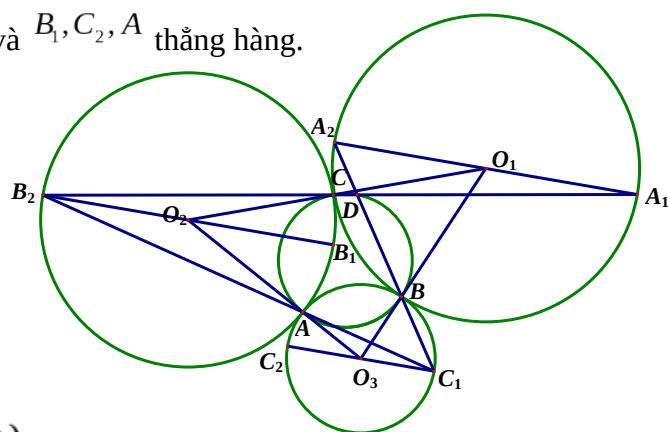
Gọi h là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $a^h \equiv b^h \pmod{p}$ thế thì $h \leq 2^{k+1}$ và $h \mid (2^{k+1}; p-1) \Rightarrow h = 2^s$

Giả sử $s \leq k$, ta có: $a^{2^s} \equiv b^{2^s} \pmod{p} \Rightarrow a^{2^{s+1}} \equiv b^{2^{s+1}} \pmod{p} \Rightarrow a^{2^k} \equiv b^{2^k} \pmod{p}$

Từ đó, do $p \mid a^{2^k} + b^{2^k}$ suy ra $\begin{cases} p \mid 2a^{2^k} \\ p \mid 2b^{2^k} \end{cases} \xrightarrow{\text{Do } p} \begin{cases} p \mid a^{2^k} \\ p \mid b^{2^k} \end{cases}$ mâu thuẫn với $(a; b) = 1$.

Vậy $h = 2^{k+1} \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$.

Câu 5. Ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp quy nạp.



Với $n=2$ thì tập hợp $\{1;2\}$ chỉ có đúng ba tập con không rỗng $\{1\}, \{2\}, \{1;2\}$ và $\{1;2\} = \{1\} \cup \{2\}$.

Với $n \geq 2$. Giả sử có $2^n + 1$ tập con không rỗng của tập hợp $\{1;2;3;\dots;n+1\}$.

+) Nếu ít nhất trong $2^{n-1} + 1$ tập hợp trong chúng không chứa phần tử $n+1$, thì sử dụng giả thiết quy nạp, được điều phải chứng minh.

+) Nếu ít nhất $2^{n-1} + 2$ tập hợp chứa $n+1$, thì loại bỏ $n+1$ khỏi những tập này, ta thu được ít nhất $2^{n-1} + 1$ tập con không rỗng, phân biệt của S và một tập con $\{n+1\}$. Do đó, áp dụng giả thiết quy nạp, có ngay điều phải chứng minh.

+) Nếu có đúng 2^{n-1} tập con không chứa $n+1$, thì có đúng 2^{n-1} tập con chứa $n+1$ (số phần tử lớn hơn 1) và tập con $\{n+1\}$.

Loại bỏ $n+1$ trong những tập con này, ta được 2^n tập con không rỗng của $\{1;2;3;\dots;n\}$ và do đó trong chúng phải có hai tập hợp trùng nhau, gọi tập đó là A .

Khi đó rõ ràng $A \cup \{n+1\} = B \subset \{1;2;\dots;n+1\}$ (ĐPCM).

ĐỀ SỐ 19

Câu 1.a) Điều kiện $\begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Chia 2 vế của phương trình cho x ta được: $x - \frac{4}{x} + 3\sqrt{x - \frac{4}{x}} - 10 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x - \frac{4}{x}}, t \geq 0$ ta được phương trình: $t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -5(l) \end{cases}$

Với $t = 2$, ta được $x - \frac{4}{x} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{2} \\ x = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$ (thỏa mãn).

b) Bất phương trình $\Leftrightarrow (m+2)x - m \geq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow m(x-1) \geq x^2 + 1$ (1)

Ta thấy $x=1$, bất phương trình vô nghiệm với mọi m , nên để bất phương trình có nghiệm thì $x \neq 1$, khi đó có 2 trường hợp.

+) Nếu $x > 1$ thì (1) $\Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 + 1}{x - 1}$. Đặt $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}, x \in (1; 2]$

Để bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$ thì $m \geq \min_{(1; 2]} f(x)$

Khảo sát $f(x)$ trên nửa khoảng $(1; 2]$ ta tìm được $\min_{(1; 2]} f(x) = 5$. Vậy $m \geq 5$

+) Nếu $x < 1$ thì (1) $\Leftrightarrow m \leq \frac{x^2+1}{x-1}$. Đặt $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}, x \in [-2; 1)$

Để bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$ thì $m \leq \max_{[-2; 1)} f(x)$

Khảo sát $f(x)$ trên nửa khoảng $[-2; 1)$ ta tìm được $\max_{[-2; 1)} f(x) = 2(1 - \sqrt{2}) \Rightarrow m \leq 2(1 - \sqrt{2})$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$ khi $\begin{cases} m \geq 5 \\ m \leq 2(1 - \sqrt{2}) \end{cases}$.

Câu 2. Ta có: $\begin{cases} y - x + 1 + \sqrt{2} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} & (1) \\ 2x^3 - y^3 + x^2y^2 = 2xy - 3x^2 + 3y & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 2$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 2x(x^2 - y) + y^2(x^2 - y) + 3(x^2 - y) = 0$

$$\Leftrightarrow (2x + y^2 + 3)(x^2 - y) = 0 \Leftrightarrow y = x^2 \quad (\text{vì } 2x + y^2 + 3 > 0, \text{ với mọi } -1 \leq x \leq 2)$$

Thay $y = x^2$ và (1) ta được: $x^2 - x + 1 + \sqrt{2} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}$ (3)

Xét hàm số $f(x) = x^2 - x - \sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} + 1 + \sqrt{2}, x \in [-1; 2]$

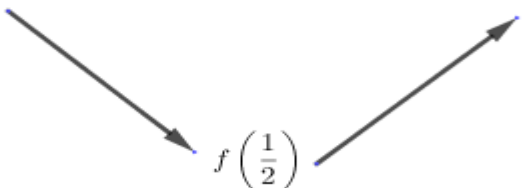
Ta có $f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$

và $f''(x) = 2 + \frac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4(2-x)\sqrt{2-x}} > 0, \forall x \in (-1; 2)$

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$, nên phương trình $f'(x) = 0$ có nhiều nhất 1 nghiệm.

Mặt khác $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, nên $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f'(x) = 0$.

Bảng biến thiên:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Vì $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \sqrt{2} - \sqrt{6} < 0$, nên từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất 2 nghiệm, hơn nữa $f(0) = f(1) = 0$, do đó phương trình (3) có 2 nghiệm $x = 0; x = 1$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(0; 0)$ và $(1; 1)$.

Câu 3. a) Ta có $(6 - a_{n+1})(16 + a_n) = 96, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{6}{a_{n+1}} - \frac{16}{a_n} = 1$ (do $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$) (*)

Đặt $b_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{10}$, từ (*) ta có $b_{n+1} = \frac{8}{3}b_n, n \in \mathbb{N}$,

$$\Rightarrow b_n = \left(\frac{8}{3}\right)^{n-1} \cdot b_1 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{a_{2012}} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{2011} - \frac{1}{10}$$

Cũng từ (*) có: $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{16}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) = \frac{5}{8} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} - \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{a_1} + \frac{n-1}{16} = \frac{5}{8} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{n-2}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} = \frac{5}{8} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{n-2}{16} \Rightarrow \frac{1}{a_{2012}} - \frac{1}{10} = \frac{5}{8} \cdot \sum_{k=1}^{2011} \frac{1}{a_k} + \frac{2010}{16}$$

$$\Rightarrow S = \sum_{k=1}^{2012} \frac{1}{a_k} = \left(\frac{1}{a_{2012}} - \frac{1}{10} - \frac{2010}{16} \right) \cdot \frac{8}{5} = \left(\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{2011} - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} - \frac{2010}{16} \right) \cdot \frac{8}{5} = \frac{8}{25} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{2011} - \frac{5033}{25}$$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 3y \\ x \geq -3y \end{cases} \Rightarrow x \geq 3|y| \Rightarrow 2x + 3\sqrt{3} > 3|y| \Rightarrow 3|y| - 2x < 3\sqrt{3}$.

Câu 4. a) Ta có:

$$\begin{aligned} IE \cdot CD &= (IM + ME)(CM + MD) \\ &= IM \cdot CM + IM \cdot MD + ME \cdot CM + ME \cdot MD \\ &= 0 - MD \cdot IM \cdot \cos IMD + \frac{1}{3} MD \cdot MA + \frac{1}{3} MD^2 \\ &= -\frac{1}{2} MD^2 + \frac{1}{3} MD \cdot \frac{1}{2} MD + \frac{1}{3} MD^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

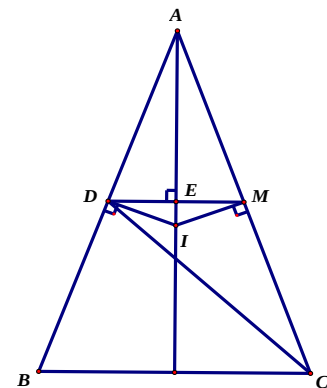
Suy ra $EI \perp CD$

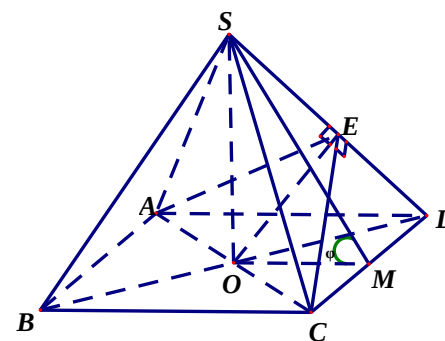
b) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Kẻ $OE \perp SD (E \in SD) \Rightarrow SD \perp (EAC) \Rightarrow (P) \perp (SCD)$

$$\frac{V_1}{\frac{1}{2}V} = \frac{ED}{SD} \Rightarrow \frac{ED}{SD} = \frac{V_1}{\frac{1}{2} \cdot 5V_1} = \frac{2}{5} \quad (1)$$

Áp dụng công thức tỉ số thể tích của hai khối tứ diện, ta có

Đặt $CD = a$ và φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$





Ta có $SO = \frac{a}{2} \tan \varphi \Rightarrow SM = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}$ và $SD = \frac{a}{2} \sqrt{2 + \tan^2 \varphi}$

Từ (1) $\Rightarrow ED = \frac{2}{5} SD = \frac{a}{5} \sqrt{2 + \tan^2 \varphi}$

Vì $SD \perp EC \Rightarrow EC = \sqrt{CD^2 - ED^2} = \frac{a}{5} \sqrt{23 - \tan^2 \varphi}$

Ta có $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} SM \cdot CD = \frac{1}{2} EC \cdot SD$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{5} \sqrt{23 - \tan^2 \varphi} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{2 + \tan^2 \varphi}$$

$$\Leftrightarrow \tan^4 \varphi + 4 \tan^2 \varphi - 21 = 0 \Leftrightarrow \tan^2 \varphi = 3$$

Vì $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ nên $\tan \varphi = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varphi = 60^\circ$

Câu 5.

Ta có
$$\begin{cases} \frac{2^{\cos A}}{2^{\cos B}} + \cos A = \cos B + 1 \\ \frac{2^{\cos B}}{2^{\cos C}} + \cos B = \cos C + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\cos A - \cos B} = 1 - (\cos A - \cos B) \\ 2^{\cos B - \cos C} = 1 - (\cos B - \cos C) \end{cases} \quad (1)$$

Xét phương trình $2^x = 1 - x$.

Dễ thấy vế trái của phương trình là một hàm số tăng, còn vế phải của phương trình là 1 hàm số giảm trên $\mathbb{R}$ nên phương trình trên có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Do đó hệ phương trình $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \cos B \\ \cos B = \cos C \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C = 60^\circ$

Vậy $A = B = C = 60^\circ$

ĐỀ SỐ 20

Câu 1. a) Điều kiện: $x \geq \frac{5}{2}$

Phương trình đã cho tương đương: $\sqrt[3]{x+5} + 2\sqrt{2x-5} = \frac{3x-1}{2x-4} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+5} + 2\sqrt{2x-5} - \frac{3x-1}{2x-4} = 0$

Đặt $f(x) = \sqrt[3]{x+5} + 2\sqrt{2x-5} - \frac{3x-1}{2x-4}$ với $x \in \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}} + \frac{2}{\sqrt{2x-5}} + \frac{10}{(2x-4)^2} > 0 \quad \forall x > \frac{5}{2}$$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm (1)

Ta có $f(3)=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

b) Điều kiện: $x \geq -2$. Đặt $y = \sqrt{x+2}$ điều kiện $y \geq 0$.

Bất phương trình trở thành:

$$x^3 - 3xy^2 + 2y^3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(x+2y) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+2y \geq 0 \end{cases}$$

+) Với $x=y$ thì $\sqrt{x+2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

+) Với $x+2y \geq 0$ thì $2\sqrt{x+2} \geq -x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 0 \\ 4(x+2) \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2-2\sqrt{3} \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2-2\sqrt{3}$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T = [2-2\sqrt{3}; +\infty)$.

Câu 2. Ta có: $\begin{cases} x^3 - 12x - y^3 + 6y^2 - 16 = 0 & (1) \\ 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} - 5\sqrt{4y-y^2} + m = 0 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3 - 12x = (y-2)^3 - 12(y-2)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 12t, t \in [-2; 2] \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t^2 - 4) < 0 \forall t \in (-2; 2)$

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[-2; 2]$ (3)

Ta có x và $y-2$ cùng thuộc đoạn $[-2; 2]$ và $f(x) = f(y-2)$ nên kết hợp (3) suy ra $x = y-2$

Thay vào (2) ta có phương trình $3\sqrt{4-x^2} - 4x^2 = m$ (4)

Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (4) có nghiệm $x \in [-2; 2]$.

Đặt $g(x) = 3\sqrt{4-x^2} - 4x^2, x \in [-2; 2] \Rightarrow g'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{4-x^2}} - 8x = -x \left(\frac{3}{\sqrt{4-x^2}} + 8 \right)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; g(0) = 6; g(-2) = g(2) = -16 \Rightarrow \min_{x \in [-2; 2]} g(x) = -16; \max_{x \in [-2; 2]} g(x) = 6.$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-16 \leq m \leq 6$.

Câu 3. Ta có:

$$P = \frac{x-1+y-1}{y^2} + \frac{y-1+z-1}{z^2} + \frac{z-1+x-1}{y^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \quad (1)$$

$$\text{Mà } \frac{x-1+y-1}{y^2} + \frac{y-1+z-1}{z^2} + \frac{z-1+x-1}{x^2} \\ = (x-1)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + (y-1)\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) + (z-1)\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2}\right) \geq (x-1)\frac{2}{xy} + (y-1)\frac{2}{yz} + (z-1)\frac{2}{zx} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow P \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) \quad (3)$$

$$\text{Từ giả thiết ta có } \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1 \quad (4)$$

$$\text{Mà } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1 \quad (5)$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \sqrt{3} \quad (6)$$

$$\text{Từ (3), (4), (5) và (6) suy ra } P \geq \sqrt{3} - 1$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{3} - 1$.

Câu 4. a) Gọi I, G lần lượt là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và ΔBCD

$$\text{Ta có } \frac{IG}{AG} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{V_{IBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{IBCD} = \frac{1}{4}V_{ABCD}$$

$$\text{Tương tự ta có: } V_{IABC} = V_{IACD} = V_{IABD} = \frac{1}{4}V_{ABCD}$$

$$\text{Suy ra } V_{IABC} = V_{IACD} = V_{IABD} = V_{IBCD} \quad (1)$$

$$\Delta ABC = \Delta DCB \Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DCB} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{3V_{IABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{V_{IBCD}}{S_{\Delta BCD}} \Rightarrow d(I; (ABC)) = d(I; (BCD)) \quad (3)$$

$$\text{Tương tự ta có } d(I; (ABC)) = d(I; (ABD)) = d(I; (ACD)) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra ĐPCM.

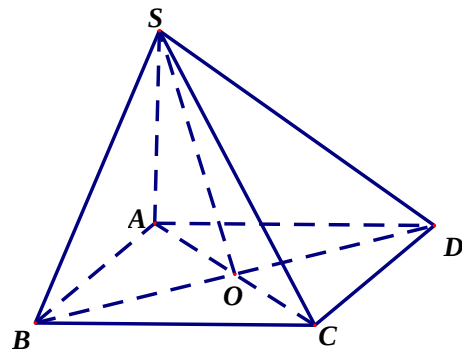
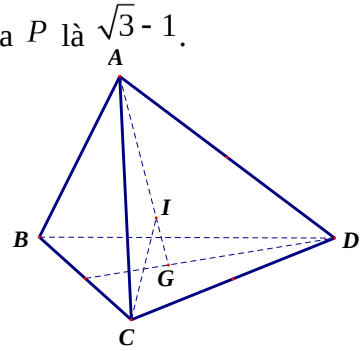
b) Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Dễ thấy $\Delta SOC = \Delta BOA \Rightarrow SO = BO \Rightarrow \Delta BSD$ vuông tại S .

$$\text{Do đó } BD = \sqrt{4a^2 + SD^2} \Rightarrow OB = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + SD^2}$$

$$\text{Mà } OA = \sqrt{BC^2 - OB^2}. \text{ Vì } AO \perp (SBD) \text{ nên}$$

$$V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABD} = \frac{2}{3}OAS_{\Delta SBD} = \frac{a}{3}SD \cdot \sqrt{12a^2 - SD^2}$$



$$\Rightarrow OA = \sqrt{4a^2 - \frac{1}{4}(4a^2 + SD^2)}$$

$$\text{Mà } SD \cdot \sqrt{12a^2 - SD^2} \leq \frac{SD^2 + 12a^2 - SD^2}{2} = 6a^2$$

$$\text{Vậy } V \leq 2a^3.$$

Câu 5. Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=5$. Gọi $J\left(\frac{5}{2};3\right)$

Ta chứng minh với mọi điểm M thuộc (C) ta có $MA=2MJ$.

$$\text{Thật vậy } MA=2MJ \Leftrightarrow MA^2=4MJ^2$$

$$\Leftrightarrow (MI+IA)^2=4(MI+IJ)^2$$

$$\Leftrightarrow 2MI(IA-4IJ)=3R^2+4IJ^2-IA^2$$

$$\text{Đẳng thức này đúng vì } IA-4IJ=0; 3R^2+4IJ^2-IA^2=0$$

$$\text{Vì thế với mọi điểm } M \text{ thuộc } (C) \text{ ta có } MA+2MB=2(MJ+MB) \geq 2BJ.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn BJ (Vì B nằm ngoài đường tròn (C) ; J nằm trong đường tròn (C)).

Do đó $MA+2MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của đường tròn (C) và đoạn thẳng BJ .

Đường thẳng BJ có phương trình $2x+y-8=0$.

$$\text{Tọa độ giao điểm của } BJ \text{ và } (C) \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 2x+y-8=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}.$$

Thử lại ta có điểm $M(1;6)$ thuộc đoạn BJ thỏa mãn bài toán.

ĐỀ SỐ 21

Câu 1.a. Điều kiện $x \geq 1$

Đặt $f(x)=x^3+\sqrt{x-1}$ với x thuộc $[1;+\infty)$

$$f'(x)=3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}>0 \quad \forall x \in [1;+\infty)$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

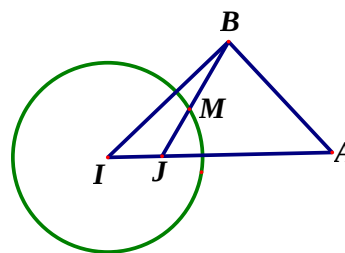
$\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm. (1)

$$\text{Ta có } f(2)=0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

b. Điều kiện $x \geq -2$.

$$\text{Đặt } y=\sqrt{x+2} \Rightarrow y \geq 0$$



Bất phương trình trở thành:
$$x^3 - 3xy^2 + 2y^3 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2(x + 2y) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + 2y \geq 0 \end{cases}$$

Với $x = y$ thì
$$\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 = x^2 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

Với $x + 2y \geq 0$ thì
$$2\sqrt{x+2} \geq -x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 0 \\ 4(x+2) \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2 - 2\sqrt{3} \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2 - 2\sqrt{3}$$

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T = [2 - 2\sqrt{3}; +\infty)$.

Câu 2. Ta có hệ
$$\begin{cases} x^3 - 12x - y^3 + 6y^2 - 16 = 0 & (1) \\ 4x^2 + 2\sqrt{4-x^2} - 5\sqrt{4y-y^2} + m = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện
$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow x^3 - 12x = (y - 2)^3 - 12(y - 2)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 12t, t \in [-2; 2] \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t^2 - 4) < 0, \forall t \in (-2; 2)$

Suy ra hàm số nghịch biến trên $[-2; 2]$ (3)

Ta có x và $y - 2$ cùng thuộc đoạn $[-2; 2]$ và $f(x) = f(y - 2)$ nên kết hợp (3) suy ra $x = y - 2$. Thay vào (2)

ta có phương trình $3\sqrt{4-x^2} - 4x^2 = m$ (4)

Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (4) có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$.

Đặt $g(x) = 3\sqrt{4-x^2} - 4x^2, x \in [-2; 2] \Rightarrow g'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{4-x^2}} - 8x = -x \left(\frac{3}{\sqrt{4-x^2}} + 8 \right)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; g(0) = 6; g(-2) = g(2) = -16$

Ta có $\min_{x \in [-2; 2]} g(x) = -16; \max_{x \in [-2; 2]} g(x) = 6$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-16 \leq m \leq 6$.

Câu 3. a.

Khi đó, từ giả thiết $xyz = 1$ suy ra $0 < yz \leq 1$

$$\text{Mà } \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \leq \frac{2}{1+yz} \Leftrightarrow (y-z)^2(1-yz) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1+yz} \geq \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{1+y^2}} + \sqrt{\frac{1}{1+z^2}} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{1+y^2}} + \sqrt{\frac{1}{1+z^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+yz}} \quad (1)$$

$$\text{Mà } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{1+x} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } P \leq \frac{\sqrt{2}}{1+x} + \frac{2}{\sqrt{1+yz}} \Rightarrow P \leq \frac{\sqrt{2}}{1+x} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$\text{Ta chứng minh } \frac{\sqrt{2}}{1+x} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (3)} \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{2x(x+1)} \leq 3x+3 \Leftrightarrow (\sqrt{2x} - \sqrt{x+1})^2 \geq 0$$

$$\text{Do đó } P \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } x=y=z=1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

C. Năm học 2012 – 2013

ĐỀ SỐ 22

(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Vĩnh Phúc)

Câu 1.(2 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + x + 2m + 1$ với m là tham số thực, có đồ thị (C) . Tìm m để đường thẳng $d: y = x + m + 1$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B, C bằng 12.

Câu 2.(2 điểm)

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{x^2}{4} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Giải phương trình:

Câu 3.(1,5 điểm)

$$\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{2y^2+1} + y = 4 + \sqrt{x+4} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải hệ phương trình:

Câu 4.(1,5 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác nhọn ABC . Đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình là $3x + 5y - 8 = 0$, $x - y - 4 = 0$. Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm

thức hai là $D(4; -2)$. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC biết rằng hoành độ của điểm B không lớn hơn 3.

Câu 5.(2 điểm)

Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SD , mặt phẳng (ABM) vuông góc với mặt phẳng (SCD) và đường thẳng AM vuông góc với đường thẳng BD . Tính thể tích khối chóp $S.BCM$ và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC) .

Câu 6.(1 điểm)

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y - 1 = \sqrt{2x - 4} + \sqrt{y + 1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu

$$S = (x + y)^2 - \sqrt{9 - x - y} + \frac{1}{\sqrt{x + y}}$$

thức

ĐỀ SỐ 23

(Đề thi học sinh giỏi lớp 12 THPT chuyên, Vĩnh Phúc)

Câu 1.(2,5 điểm)

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 = \frac{8}{y} - \sqrt{5y - 1} \\ y^2 + 3y + 2 = \frac{8}{z} - \sqrt{5z - 1} \\ z^2 + 3z + 2 = \frac{8}{x} - \sqrt{5x - 1} \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

Giải hệ phương trình

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$2\sqrt{\frac{3a}{a+b+c}} + 3\sqrt[3]{\frac{bc}{(a+b)(a+b+c+d)}} + 4\sqrt[4]{\frac{2b^3d}{81(a+b)^3(a+b+c+d)}} \leq \frac{25}{6}$$

Câu 3.(2,0 điểm)

Giả sử n là một số nguyên dương sao cho $3^n + 2^n$ chia hết cho 7. Tìm số dư của $2^n + 11^n + 2012^{n^2}$ khi chia cho 7.

Câu 4(3,0 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi P là điểm sao cho trung trực của đoạn thẳng CP chia đôi đoạn AD và trung trực đoạn AP chia đôi đoạn CD . Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BP .

- Chứng minh rằng đường thẳng BP vuông góc với đường thẳng AC .
- Chứng minh rằng $BP = 4OE$, trong đó E là trung điểm của AC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC .

Câu 5.(1,0 điểm)

Cho m, n ($m > n > 4$) là các số dương và A là một tập hợp con có đúng n phần tử của tập hợp $S = \{1; 2; 3; \dots; m\}$. Chứng minh rằng nếu $m > (n-1)(1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4)$ thì ta luôn chọn được n phần tử đôi một phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ sao cho các tập hợp $A_i = \{x + y + x_i \mid x \in A, y \in B\}$, $i = \overline{1, n}$ thỏa mãn $A_j \cap A_k = \emptyset$ với mọi $j \neq k$ và $j, k \in \overline{1, n}$.

ĐỀ SỐ 24

(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Ninh Bình)

Câu 1. (3,0 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m) , đường thẳng d có phương trình $y = x + 4$ và điểm $K(1; 3)$. Tìm các giá trị của tham số m để d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0; 4), B, C$ sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.

Câu 2. (6,0 điểm)

$$2 \cos 2x - m \cos x = \frac{1}{4} \sin 4x + m \sin x, \quad m \text{ là tham số (1)}$$

1. Cho phương trình

a. Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

b. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm trong đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

$$\sqrt{3x+3} - \sqrt{5-2x} - x^3 + 3x^2 + 10x - 26 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

2. Giải phương trình

Câu 3. (4,0 điểm)

a. Tìm hệ số của x^{18} trong khai triển của $(2 - x^2)^{3n}$ biết $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đẳng thức sau:
 $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = 512$

b. Cho dãy số (u_n) với $u_{n+1} = a.u_n + b, n \geq 1$, a, b là hai số thực dương cho trước. Với $n \geq 2$, tìm u_n theo u_1, a, b và n .

Câu 4. (5,0 điểm)

a. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, AA', B'C'$. Mặt phẳng (IJK) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

b. Cho khối tứ diện $(ABCD)$ có cạnh $AB > 1$, các cạnh còn lại có độ dài không lớn hơn 1. Gọi V là thể tích của khối tứ diện. Tìm giá trị lớn nhất của V .

Câu 5.(2,0 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

ĐỀ SỐ 25

(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Thanh Hóa)

Câu 1.(4,0 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+2}$

(C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

(C)

$I(-2; 2)$

b. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị sao cho khoảng cách từ điểm đến tiếp tuyến đó là lớn nhất.

Câu 2.(4,0 điểm)

$$\frac{\sin^3 x \cdot \sin 3x + \cos^3 x \cdot \cos 3x}{\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{8}$$

a. Giải phương trình

$$\begin{cases} (1+4^{2x-y}) \cdot 5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1} \\ \frac{x-y}{4} = \ln(x+3) - \ln(y+3) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

b. Giải hệ phương trình

Câu 3.(4,0 điểm)

a. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x(y+z)}{4-yz} + \frac{y(z+x)}{4-zx} + \frac{z(x+y)}{4-xy} \geq 2xyz$$

$$\begin{cases} x^2 - mx + 2 \leq 0 \\ 4^x - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} - 4^{\sqrt{x}+1} \leq 0 \end{cases}$$

b. Tìm các giá trị thực của m để hệ sau có nghiệm thực

Câu 4.(4,0 điểm)

$$(1+x+x^2+\dots+x^{14})^{15} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{210}x^{210} \quad (1)$$

a. Cho khai triển

Chứng minh rằng $C_{15}^0 a_{15} - C_{15}^1 a_{14} + C_{15}^2 a_{13} - \dots - C_{15}^{15} a_0 = -15$.

- b. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC , có trọng tâm $G(1; 2)$. Phương trình đường tròn đi qua trung điểm của các cạnh AB, AC và chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC là $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$.
Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Câu 5.(4,0 điểm)

- a. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là ABC là tam giác cân tại C , cạnh đáy $AB = 2a$ và $\angle ABC = 30^\circ$. Tính thể tích khối lăng trụ biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CB' bằng $\frac{a}{2}$.
- b. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1; -2; -3)$ và $B(-6; 10; -3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ A tới (P) bằng 15 và khoảng cách từ B tới (P) bằng 2.

ĐỀ SỐ 26

(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Hà Tĩnh)

Câu 1.

$$3(2 + \sqrt{x - 2}) = 2x + \sqrt{x + 6}$$

- a. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + 2y^3 = 0 \\ \sqrt[3]{x^4 - x^2} + 4 = 4y^3 + 3y \end{cases}$$

- b. Giải hệ phương trình

Câu 2.

- a. Cho hàm số $y = 2x^3 + x + 2$ có đồ thị (C) . Tìm hai điểm A, B trên (C) sao cho các tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau đồng thời khoảng cách giữa hai tiếp tuyến đó đạt giá trị lớn nhất.
- b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$x + \sqrt{1 - x^2} = m + x\sqrt{4 - x^2}$$

Câu 3.

Xác định góc của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$\cos \frac{A - B}{2} + \cos \frac{A - C}{2} = \frac{3}{2} + \sin \frac{3A}{2}$$

Câu 4.

Cho hình chóp $SABC$ có các mặt phẳng (SBC) và (ABC) vuông góc với nhau, các cạnh

$AB = AC = SA = SB = a$. Tìm độ dài cạnh SC sao cho khối $SABC$ có thể tích $V = \frac{a^3}{8}$.

Câu 5.

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \sqrt{\frac{a}{8a^2 + 1}} + \sqrt{\frac{b}{8b^2 + 1}} + \sqrt{\frac{c}{8c^2 + 1}}$$

ĐỀ SỐ 27

(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Cần Thơ)

Câu 1.(4,0 điểm)

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 48 \\ x^7 + y^7 + z^7 = 16128 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực $\mathbb{R}$:

Câu 2.(4,0 điểm)

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} \end{cases} \quad \forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

$$u_n^2 + u_{n-1}^2 - 4u_n u_{n-1} = -3, \quad \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$$

a.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_n^2 - 1}{3}$$

b.

là số chính phương.

Câu 3.(4,0 điểm)

Cho nửa đường tròn (T) tâm O , đường kính $AB = 2R$ và điểm P di động trên (T) (P khác A, B). Gọi (O_1) và (O_2) là hai đường tròn nhận OP làm tiếp tuyến chung, đồng thời (O_1) tiếp xúc với (T) và OA theo thứ tự tại M, N , (O_2) tiếp xúc với (T) và OB theo thứ tự tại H, L .

a. Chứng minh rằng khi P di động trên (T) thì các đường thẳng MN và HL luôn cùng đi qua một điểm cố định K .

b. Gọi C, D theo thứ tự là giao điểm thứ hai của (O_1) với MA và MB , E là giao điểm của CN với BK và F là giao điểm của DN với AK . Chứng minh rằng khi P di động trên (T) , ta luôn có bất đẳng thức $p > R(3 + \sqrt{2})$ trong đó p là chu vi tứ giác $ABEF$.

Câu 4.(4,0 điểm)

Cho dãy 2013 số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2013}$ thỏa mãn mỗi số không lớn hơn 4026 và với hai số bất kỳ thì bội số chung nhỏ nhất của hai số ấy luôn lớn hơn 4026. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số đã cho đều lớn hơn 1342.

Câu 5. (4,0 điểm)

Trong một bảng có 10×10 ô vuông ta điền dấu “+” vào tất cả các ô. Một bước thực hiện bằng cách thay đổi toàn bộ dấu các ô vuông ở một hàng hoặc một cột nào đó sang dấu ngược lại. Hỏi sau một số hữu hạn các bước như trên, bảng ô vuông có đúng 6 dấu “-” hay không? Giải thích tại sao?

ĐỀ SỐ 28

(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Quảng Bình, vòng 1)

Câu 1. (2,5 điểm)

Giải phương trình $x^{4n} + \sqrt{x^{2n} + 2012} = 2012, (n \in \mathbb{N}^*)$

Câu 2. (2,5 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2u_n + \frac{3}{u_n^2} \right) \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$$
. Tìm $\lim u_n$?

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{36}{9 + x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}$$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC , N là chân đường phân giác góc $\widehat{BAC}$, đường thẳng vuông góc với NA tại N cắt các đường thẳng AB, AM lần lượt tại P, Q theo thứ tự đó. Đường thẳng vuông góc với AB tại P cắt AN tại O . Chứng minh $OQ \perp BC$

Câu 5. (1,5 điểm)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x + 2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$

ĐỀ SỐ 29**SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
QUẢNG BÌNH****KỶ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC
MÔN: TOÁN 12
(Vòng 2)
(Thời gian làm bài 180 phút)****Câu 1. (2,5 điểm).**

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 4y \\ y^3 - 3y^2 + 5y + 1 = 4z \\ z^3 - 3z^2 + 5z + 1 = 4x \end{cases}$$

Câu 2. (2, 0 điểm).

Cho x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = x^2(x+2) + y^2(y+2) + 3(x+y)(xy-4)$$

Câu 3. (1,5 điểm).

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- a) Với mọi $m, n \in \mathbb{N}^* : n < m \Leftrightarrow f(m) < f(n)$.
- b) $f(2n) = f(n) + n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- c) Nếu $f(n)$ là số chính phương thì n là số chính phương.

Câu 4. (2,5 điểm).

Cho tứ diện ABCD có độ dài các cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DB, AC. Trên đường thẳng AB lấy điểm P, trên đường DN lấy điểm Q sao cho song song PQCM. Tính độ dài PQ và thể tích khối AMNP.

Câu 5. (1,5 điểm).

Cho đa giác đều n cạnh ($n \geq 8$). Tính số tứ giác có 4 cạnh là 4 đường chéo của đa giác đã cho.

ĐỀ 30
SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
LONG AN

KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC
MÔN: TOÁN 12
(Bảng A)
(Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1. (5,0 điểm).

a) Giải phương trình sau trên tập số thực: $x + 1 = (2x + 1)\sqrt{\sqrt{x + 1} + 2}$.

b) Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + y = 8 \\ xy(y^2 + xy + x + y) = 12 \end{cases}$$

Câu 2. (5,0 điểm).

a) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2), B(4; 3)$. Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 45^\circ$.

b) Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 6cm, trọng tâm là G. Một đường thẳng Δ đi qua G, Δ cắt các đoạn thẳng AB, AC lần lượt tại hai điểm M, N sao cho $2AM = 3AN$. Tính diện tích tam giác AMN.

Câu 3. (4,0 điểm).

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + 2^n$ với mọi $n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng $u_n = 2^n - 1$.

b) Tính tổng $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ theo n.

Câu 4. (3,0 điểm).

Cho các số thực dương a, b, c.

a) Chứng minh rằng: $(2 + a^2)(2 + b^2) \geq \frac{9}{16} [2(a + b)^2 + 7]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(2 + a^2)(2 + b^2)(2 + c^2)}{(3 + a + b + c)^2}$

Câu 5. (3,0 điểm).

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m - 1)x^2 + (4 - 3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m) , m là các tham số. Tìm các giá trị của m để trên (C_m) có duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến của (C_m) tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x + 2y = 0$

Câu 1. (6,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x^2+y^2+1} - \sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

b) Giải phương trình:
$$\sqrt{x^4+x^2+1} + \sqrt{3}(x^2+1) = 3\sqrt{3}x \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 2. (5,0 điểm).

a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, cạnh BC nằm trên đường thẳng có phương trình: $2x + y - 2 = 0$. Đường cao kẻ từ B có phương trình: $x + y + 1 = 0$, điểm $M(1; 1)$ thuộc đường cao kẻ từ đỉnh C. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC

b) Trong mặt phẳng cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D sao cho bốn điểm đó không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng: $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)u_n} \quad (\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

a) Chứng minh: $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

b) Tính u_{2015} .

Câu 4. (3,0 điểm).

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$

b) $\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1$

Câu 5. (3,0 điểm).

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = \frac{3}{2}m \\ (x+2)y^2 + 2xy = 3m \left(y + \frac{2}{3} \right) \end{cases}$$

Tìm m để phương trình có nhiều hơn hai nghiệm với $x, y \in \mathbb{R}$

Câu 1. (4,0 điểm).

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy - x - y = 1 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7 \end{cases}$$

Câu 2. (4,0 điểm).

Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{2u_n + 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Câu 3. (4, 0 điểm).

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

Câu 4. (4,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC với các đường cao AH, BK nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) sao cho các đường thẳng AM và BK cắt nhau tại E, các đường thẳng BM và AH cắt nhau ở F. Chứng tỏ khi M di động trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) thì trung điểm của đoạn thẳng EF luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Câu 5. (4,0 điểm).

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn: $P(x) \cdot P(x - 3) = P(x^2), \forall x \in \mathbb{R}$

ĐỀ 33
SỞ GD VÀ ĐT TP
HỒ CHÍ MINH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC ...
MÔN: TOÁN 12
(Vòng 2)
(Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1. (4,0 điểm).

Cho số nguyên dương n . Giải và biện luận theo n hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_i \geq -3 \\ \sum_{i=1}^n x_i = n \quad (i=1,2,\dots,n) \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 = 0 \end{cases}$$

Câu 2. (4,0 điểm).

Tìm tất cả các hàm số: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn :

$$f(x^2 + 2f(y)) = \frac{y}{2} + 2(f(x))^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Câu 3. (4,0 điểm).

Giả sử số nguyên dương n có tất cả k ước dương là $d_1, d_2, \dots, d_k$. Chứng minh rằng nếu

$$d_1 + d_2 + \dots + d_k = 2n + 1 \quad \text{thì} \quad \frac{n}{2} \quad \text{là số chính phương.}$$

Câu 4. (4,0 điểm).

Cho ba đường tròn (C) , (C_1) và (C_2) trong đó (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong với (C) tại B và C và (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại D . Tiếp tuyến chung trong của (C_1) và (C_2) cắt (C) tại hai điểm A và E .

$$\text{Đường thẳng } AB \text{ cắt } (C_1) \text{ tại điểm thứ hai } N. \text{ Chứng minh rằng } \frac{1}{DA} + \frac{1}{DE} = \frac{2}{MN}.$$

Câu 5. (4 0 điểm).

Cho một bảng ô có 2012×2012 ô, mỗi ô đều điền vào một dấu $+$. Thực hiện phép biến đổi sau: đổi dấu toàn bộ một hàng hoặc một cột của bảng ($+$ thành $-$ và $-$ thành $+$). Hỏi sau một số lần thực hiện phép biến đổi, bảng có thể đúng 18 dấu $-$ nữa hay không?

ĐỀ 34
SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
PHÚ THỌ

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
NĂM HỌC ...
MÔN: TOÁN 12
(Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1. (4,0 điểm).

Cho các số thực dương x, y, z thay đổi thỏa mãn

$$\sqrt[3]{x^3 + 2y^3} + \sqrt[3]{y^3 + 2z^3} + \sqrt[3]{z^3 + 2x^3} = 3.$$

$$A = \frac{x^3}{y + 2z} + \frac{y^3}{z + 2x} + \frac{z^3}{x + 2y}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 2. (4,0 điểm).

Cho dãy số thực (a_n) được xác định bởi:

$$a_1 = 2 \quad \text{và} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 3}{4a_n^2} \quad \text{với mọi } n \geq 1$$

Chứng minh rằng dãy (a_n) không có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$

Câu 3. (4,0 điểm).

Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác nhọn ABC lần lượt lấy các cặp điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ tương ứng (A_1 nằm giữa B và A_2 ; B_1 nằm giữa C và B_2 ; C_1 nằm giữa A và C_2) sao cho

$\angle A_1A_2 = \angle A_2A_1 = \angle B_1B_2 = \angle B_2B_1 = \angle C_1C_2 = \angle C_2C_1$. Các đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 cắt nhau tạo thành tam giác $X_2Y_2Z_2$. Chứng minh sáu điểm $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ cùng nằm trên một đường tròn có tâm là một điểm cố định.

Câu 4. (4,0 điểm).

Tìm tất cả bộ ba số nguyên dương $(x; y; n)$ thỏa mãn: $x! + y! + 3 = n^3$.

Câu 5. (4,0 điểm).

Có n bóng đèn $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$) được xếp thành một hàng ngang, mỗi bóng đèn chỉ có hai trạng thái, bật hoặc tắt. Ở thời điểm ban đầu bóng đèn A_1 bật còn các bóng đèn khác tắt. Cứ sau mỗi giây, bóng đèn thay đổi trạng thái như sau: nếu bóng đèn A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) đang có cùng trạng thái với các bóng đèn kề với nó thì A_i sẽ tắt; các trường hợp khác A_i sẽ được bật lên (trong đó, mỗi bóng đèn A_i và A_n chỉ có một bóng đèn kề với nó. Chứng minh rằng :

a) Nếu $n = 2^m, m \in \mathbb{N}^*$ thì đến một thời điểm nào đó tất cả các bóng đèn đều bật

b) Tồn tại vô hạn giá trị n sao cho ở mọi thời điểm, tất cả các bóng đèn không thể cùng bật hoặc cùng tắt.

ĐỀ 35
SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
HẢI DƯƠNG

KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC ...
MÔN: TOÁN 12
(Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1. (2,0 điểm).

a) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2$. Tìm m để hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$

b) Cho hàm số $y = 3\sin x - 4\cos x + mx$. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{2}$.

Câu 2. (2,0 điểm).

a) Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cos^2 x - \sin^2 \frac{3x}{4} \cos x - 1 - \sin^2 \frac{3x}{4}$ với trục hoành.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 3x = \sqrt{(y-1)^3} - \sqrt{9(y-1)} \\ 1 + \sqrt{x-1} = \sqrt{y-1} \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A = C_{2012}^1 - 2^2 \cdot C_{2012}^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot C_{2012}^3 - 4 \cdot 2^3 \cdot C_{2012}^4 + \dots + 2011 \cdot 2^{2010} \cdot C_{2012}^{2011} - 2012 \cdot 2^{2011} \cdot C_{2012}^{2012}$.

b) Chứng minh bất đẳng thức $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos^2 x$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Câu 4. (3,0 điểm).

Cho hình chóp đều S.ABC có $SA = a$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của SA, SC.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a , biết BD vuông góc với AE.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác SBC, mặt phẳng (P) đi qua AG cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M, N. Gọi V_1 ,

V lần lượt là thể tích khối chóp S.AMN và S.ABC. Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{V}{V_1}$.

Câu 5. (1,0 điểm).

Cho $a; b; c$ là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{c^2}{(c+a)^2}.$$

ĐỀ 36
SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
NAM ĐỊNH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
MÔN: TOÁN 12
(Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1. (4,0 điểm).

Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 - 3x$ (1) và đường thẳng $(\Delta): y = 2mx - 2$ (với m là tham số).

- a) Khi $m = 0$. Gọi đồ thị của hàm số đã cho là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm M, biết khoảng cách từ M đến trục tung bằng 2.
- b) Tìm m để đường thẳng (Δ) và đồ thị hàm số (1) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho diện tích tam giác OBC bằng 3 (với A là điểm có hoành độ không đổi và O là gốc tọa độ).

Câu 2. (5,0 điểm).

$$\frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) + 2 \sin 2x + \sqrt{3}}{\cos x} = 4 \cos 4x.$$

- a) Giải phương trình:

$$\begin{cases} xy + 2 = y\sqrt{x^2 + 2} \\ y^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2x^2 - 4x \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

- b) Giải hệ phương trình:

Câu 3. (5,0 điểm). a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thang ABCD vuông tại A và D có $AB = AD < CD$,

điểm B(1; 2), đường thẳng BD có phương trình $y = 2$. Biết rằng đường thẳng $(d): 7x - y - 25 = 0$ lần lượt cắt các đoạn thẳng AD và CD theo thứ tự tại M và N sao cho $BM \perp BC$ và tia BN là tia phân giác của góc MBC. tìm tọa độ đỉnh D (với hoành độ của D là số dương).

- b) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm $A(1; 2; 1), B(1; -2; 4)$ và mặt phẳng

$(P): 2y + z = 0$. Tìm tọa độ điểm $C \in (P)$ sao cho tam giác ABC cân tại B và có diện tích bằng $\frac{25}{2}$.

Câu 4. (3,0 điểm). Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình vuông với $AB = 2a$. tam giác SAB vuông tại S, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt

phẳng (SBC) bằng φ với $\sin \varphi = \frac{1}{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) theo a.

$$I = \int_1^2 \frac{x^2 \ln(x+1) + \sqrt[3]{x^3 + x}}{x^4} dx.$$

Câu 5. (3,0 điểm). a) Tính tích phân

- b) Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 thành lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có 5 chữ số khác nhau, trong đó luôn có mặt chữ số 6.

Câu 6. (2,0 điểm).

Cho các số thực x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (xy + yz + zx)^2 - \frac{8}{(x + y + z)^2 - xy - yz + 2}.$$

ĐỀ 37
SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
NGHỆ AN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC ...
MÔN: TOÁN 12
(Bảng A)
(Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1. (3,0 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2;5)$

Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng d: $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác PAB đều.

Câu 2. (6,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3} = \frac{1}{x+2} \quad (x \in \mathbb{R})$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 5 \\ (xy-1)^2 = x^2 - y^2 + 2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 3. (6,0 điểm)

a) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa 2 đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

b) Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AG và cắt các cạnh AB, AC, AD tại các điểm (khác A). Gọi h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến mặt phẳng (α) . Chứng minh rằng $\frac{h_B^2 + h_C^2 + h_D^2}{3} \geq h_A^2$

Câu 4. (2,5 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $A(-1; -1)$ và đường tròn $(T): (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$. Gọi B, C là hai điểm phân biệt thuộc đường tròn (T) (B, C khác A). Viết phương trình đường thẳng BC, biết $I(1; 1)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

ĐỀ 38
SỞ GD VÀ ĐT TỈNH
NGHỆ AN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC ...
MÔN: TOÁN 12
(Bảng B)
(Thời gian làm bài 180 phút)

Câu 1. (3,0 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{3x+4}{3x+3}$ có đồ thị (C).

Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác OAB đều (với O là gốc tọa độ)

Câu 2. (6,0 điểm)

a) Cho phương trình: $\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} + x^2 + m = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thực.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{2y-3} = 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
.

Câu 3. (6,0 điểm)

a) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa 2 đường thẳng AA' và BC

bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

b) Cho điểm I nằm trong tứ diện ABCD. Các đường thẳng AI, BI, CI, DI lần lượt cắt các mặt phẳng (BCD),

(CDA), (DAB), (ABC) tại điểm A', B', C', D' thỏa mãn đẳng thức $\frac{AI}{A'I} + \frac{BI}{B'I} + \frac{CI}{C'I} + \frac{DI}{D'I} = 12$.

Gọi V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện ABCD và IBCD. Chứng minh rằng $V = 4V_1$

Câu 4. (2,5 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

và đường phân giác trong của góc A có phương trình $x - y = 0$. Biết diện tích tam giác ABC bằng ba lần diện tích tam giác IBC (với I là tâm của đường tròn (T)) và điểm A có tung độ dương. Viết phương trình đường thẳng BC.

Câu 5. (2,5 điểm).

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $y^2 \geq xz$ và $z^2 \geq xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{3z}{z+x}$$

C1. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ SỐ 22

Câu 1. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là :

$$x^3 - (m+1)x^2 + x + 2m + 1 = x + m + 1 \Leftrightarrow x^3 - (m+1)x^2 + m = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - mx - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 - mx - m = 0 \end{cases}$$

(C) cắt d tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 4m > 0 \\ 1^2 - m \cdot 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m > 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Gọi $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (2).

Tổng hệ số góc các tiếp tuyến với (C) tại A, B, C là $y'(1) + y'(x_1) + y'(x_2) = 12$.

$$\Leftrightarrow 4 - 2 + 3(x_1^2 + x_2^2) - 2(m+1)(x_1 + x_2) = 12$$

$$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 - 2(m+1)(x_1 + x_2) = 8 + 2m \quad (3)$$

Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = m; x_1x_2 = -m$ thay vào (3) ta được $m^2 + 2m - 8 = 0$. Giải ra ta được $m = -4$ (loại) hoặc $m = 2$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. Điều kiện $x \in [-1; 1]$, đặt $t = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \ (t \geq 0)$.

$$\Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = t^2 - \frac{t^4}{4} \quad \text{với } t^2 - 2 \geq 0.$$

$$t = 2 - \frac{1}{4} \left(t^2 - \frac{t^4}{4} \right) \Leftrightarrow t^4 - 4t^2 - 16t + 32 = 0$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\Leftrightarrow (t-2)^2(t^2 + 4t + 8) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Với $t = 2$ ta có $2 = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1-x^2} = 4 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn).

Câu 3. Điều kiện $-4 \leq x \leq 1; y \in \mathbb{R}$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2\sqrt{1-x} - 2x\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x} \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(1-x)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$, ta có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Thế vào (2) ta được $\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 4 + \sqrt{x+4}$ (3)

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{x+4}$ liên tục trên $[-4;1]$.

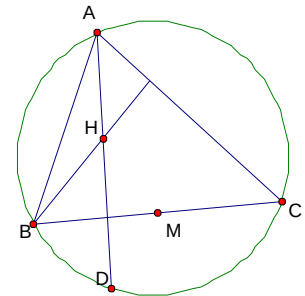
Ta có $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+4}} < 0 \forall x \in (-4;1) \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $[-4;1]$.

Lại có $g(-3) = 4$ nên $x = -3$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3).

Với $x = -3 \Rightarrow y = 2$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

Câu 4. Gọi M là trung điểm BC, H là trực tâm tam giác ABC, K là giao điểm của BC và AD, E là giao điểm của BH và AC. Ta kí hiệu $n_d; u_d$ lần lượt là vectơ pháp tuyến, vectơ chỉ phương của đường thẳng d. Do M là giao điểm của AM và BC nên tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ 3x + 5y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$



AD vuông góc BC nên $n_{AD} = u_{BC} = (1;1)$, mà AD đi qua điểm D suy ra phương trình của AD :

$1(x-4) + 1(y+2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$. Do A là giao điểm của AD và AM nên tọa độ điểm A là nghiệm hệ

phương trình : $\begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(3; -1)$

Tứ giác HKCE nội tiếp nên $\angle BHK = \angle KCE$ mà $\angle KCE = \angle BDA$ (nội tiếp chắn cung $\widehat{AB}$). Suy ra $\angle BHK = \angle BDK$,

vậy K là trung điểm của HD nên $H(2;4)$.

Do B thuộc BC $\Rightarrow B(t; t-4)$ kết hợp với M là trung điểm BC suy ra $C(7-t; 3-t)$.

$HB(t-2; t-8); AC(6-t; 2-t)$. Do H là trực tâm tam giác ABC nên :

$$HB.AC = 0 \Leftrightarrow (t-2)(6-t) + (t-8)(2-t) = 0 \Leftrightarrow (t-2)(14-2t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=7 \end{cases}$$

Do $t \leq 3 \Rightarrow t=2 \Rightarrow B(2;-2); C(5;1)$. Ta có $AB(1;-3); AC(4;0) \Rightarrow n_{AB}=(3;1); n_{AC}=(0;1)$.

Suy ra $AB: 3x+y-4=0; AC: y-1=0$.

Câu 5. Gọi H, N, L, E lần lượt là trung điểm của AB, CD, SC, HD

Từ giả thiết ta có $SH \perp (ABCD); ME // SH \Rightarrow ME \perp BD$ (1).

Lại do $AM \perp BD$ (2). Từ (1) và (2) $BD \perp (AMN) \Rightarrow BD \perp AN$.

Trong tam giác AND ta có :

$$ND^2 = NI.NA = \frac{NA^2}{3} \Rightarrow NA = \sqrt{3}ND = a\sqrt{3} \Rightarrow AD = \sqrt{NA^2 - ND^2} = a\sqrt{2}$$

$$I = AN \cap BD, K = LM \cap SN$$

Dễ thấy tứ giác AHND là hình chữ nhật và $IN = \frac{AN}{3}$

Dễ thấy $CD \perp (SHN)$ do $ML // CD$

$$\Rightarrow ML \perp (SHN) \Rightarrow ML \perp SN \quad (3)$$

Do $(ABLM) \perp (SCD), (ABLM) \cap (SCD) = ML$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow SN \perp (ABLM) \Rightarrow SN \perp HK$

Lại do K là trung điểm SN nên tam giác SHN vuông cân tại H suy ra $SH = HN = a\sqrt{2}$.

$$\text{Ta có } V_{SABCD} = \frac{1}{3} SH.AB.AD = \frac{4a^3}{3}; V_{SBCM} = \frac{1}{2} V_{SBCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V_{SABCD} = \frac{a^3}{3} \text{ (đvtt)}.$$

Ta có $BC \perp SH, BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

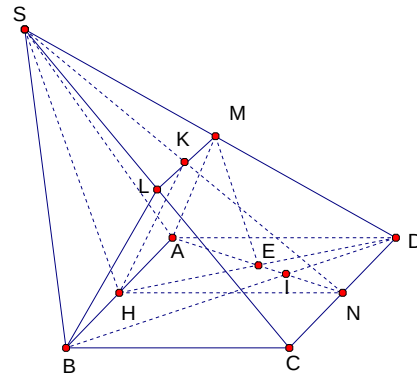
$$\Rightarrow S_{SBC} = \frac{1}{2} SB.BC = \frac{1}{2} \sqrt{HB^2 + SH^2}.BC = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 2a^2} a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$$

$$d(M; (SBC)) = \frac{3V_{MSBC}}{S_{SBC}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Mặt khác ta có

Câu 6. Điều kiện $x \geq 2; y \geq -1; 0 < x+y \leq 9$.

$$\text{Ta có } 0 \leq x+y-1 = \sqrt{2}\sqrt{x-2} + 1.\sqrt{y-1} \leq \sqrt{3(x+y-1)}$$



$$\Rightarrow (x+y-1)^2 \leq 3(x+y-1) \Rightarrow 0 \leq x+y-1 \leq 3 \Rightarrow 1 \leq x+y \leq 4.$$

Đặt $t = x+y, t \in [1; 4]$ ta có $S = t^2 - \sqrt{9-t} + \frac{1}{\sqrt{t}}.$

$$S'(t) = 2t + \frac{1}{2\sqrt{9-t}} - \frac{1}{2t\sqrt{t}} > 0 \forall t \in [1; 4]$$

Vậy $S(t)$ đồng biến trên $[1; 4]$. Suy ra $S_{\max} = S(4) = 4^2 - \sqrt{9-4} + \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{33-2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=4; y=0;$

$$S_{\min} = S(1) = 2 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x=2; y=-1.$$

ĐỀ SỐ 23

Câu 1: Điều kiện: $x, y, z \geq \frac{1}{5}$

Xét các hàm số $f(t) = t^2 + 3t + 2, g(t) = \frac{8}{t} - \sqrt{5t-1}$

Khi đó ta có $f'(t) = 2t + 3 > 0, g'(t) = -\frac{8}{t^2} - \frac{5}{2\sqrt{5t-1}} > 0, \forall t > \frac{1}{5}$

Mà $f(t), g(t)$ là các hàm số liên tục trên $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$ và $g(t)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \min\{x, y, z\}$

Khi đó ta có:

Nếu $x < y \Rightarrow g(x) > g(y) \Rightarrow f(z) > f(x) \Rightarrow z > x \Rightarrow g(z) < g(x) \Rightarrow f(y) < f(z)$

$\Rightarrow y < z \Rightarrow g(y) > g(z) \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow x > y$ vô lí vì $x < y$

Do vậy $x = y$, tương tự lí luận như trên ta được $x = z$ suy ra $x = y = z$

Thay trở lại hệ ta được $x^2 + 3x + 2 = \frac{8}{x} - \sqrt{5x-1} \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 - \frac{8}{x} + \sqrt{5x-1} = 0(1)$

Đặt $h(x) = x^2 + 3x + 2 - \frac{8}{x} + \sqrt{5x-1}, x \in \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$

Để thấy hàm số đồng biến trên $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$ và $h(1)=0 \Rightarrow x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1)

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $x=y=z=1$

$$P = 2\sqrt{\frac{3a}{a+b+c}} + 3\sqrt[3]{\frac{bc}{(a+b)(a+b+c+d)}} + 4\sqrt[4]{\frac{2b^3d}{81(a+b)^3(a+b+c+d)}}$$

Câu 2: Đặt

Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM- GM ta có:

$$2\sqrt{\frac{2a}{a+b} \cdot \frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}} \leq \frac{2a}{a+b} + \frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}$$

$$3\sqrt[3]{\frac{bc}{(a+b)(a+b+c+d)}} = 3\sqrt[3]{\frac{b}{a+b} \cdot \frac{3c}{2(a+b+c)} \cdot \frac{2(a+b+c)}{3(a+b+c+d)}}$$

$$\leq \frac{b}{a+b} + \frac{3c}{2(a+b+c)} + \frac{2(a+b+c)}{3(a+b+c+d)}$$

$$4\sqrt[4]{\frac{2b^3d}{81(a+b)^3(a+b+c+d)}} = 4\sqrt[4]{\left(\frac{b}{3(a+b)}\right)^3 \cdot \frac{2d}{3(a+b+c+d)}}$$

$$\leq 3 \cdot \frac{b}{3(a+b)} + \frac{2d}{3(a+b+c+d)}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$P \leq \frac{2(a+b)}{a+b} + \frac{3(a+b+c)}{2(a+b+c)} + \frac{2(a+b+c+d)}{3(a+b+c+d)} = \frac{25}{6}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$

Câu 3. Đặt $n=3q+r; q; r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 2$.

$$\text{Khi đó } 3^n + 2^n = 27^q \cdot 3^r + 8^q \cdot 2^r \equiv (-1)^q \cdot 3^r + 2^r \pmod{7}$$

$$\text{Do đó để } 3^n + 2^n \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow (-1)^q \cdot 3^r + 2^r \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow q=2k+1, r=0$$

Suy ra n có dạng $n=6k+3$, chú ý nếu $(a; 7)=1 \Rightarrow a^6 \equiv 1 \pmod{7}$. Do đó ta có :

$$+) 2^n = 2^{6k+3} = (2^6)^k \cdot 8 \equiv 1 \pmod{7} \quad (1)$$

$$+) 11^n = 11^{6k+3} = (11^6)^k \cdot 11^3 \equiv 4^3 \equiv 1 \pmod{7} \quad (2)$$

$$+) 2012^n = 2012^{(6k+3)^2} = (2012^{6k^2+6k})^6 \cdot 2012^9 \equiv 3^9 \equiv 27^3 \equiv 6 \pmod{7} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta được $2^n + 11^n + 2012^n \equiv 1 + 1 + 6 \equiv 1 \pmod{7}$.

Vậy số dư cần tìm là 1.

Câu 4.

Gọi M, N, I, J là thứ tự các trung điểm của các đoạn thẳng AD, CD, AP, CP.

Khi đó $NI \perp AP$, $MJ \perp CP$. Do I là trung điểm AP, Q là

trung điểm BP nên $IQ \parallel AB$ và $IQ = \frac{AB}{2}$ từ đó suy ra $IQ \parallel CN$ và $IQ = CN$

$\Rightarrow$ tứ giác CNIQ là hình bình hành.

$\Rightarrow CQ \parallel NI$. Từ đó, do $NI \perp AP$ nên $CQ \perp AP$ (1).

Chứng minh tương tự ta cũng được $AQ \perp CP$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra P là trực tâm của $\triangle ACQ$ suy ra $PQ \perp AC$ hay $BP \perp AC$

b. Do P là trực tâm tam giác AQC nên $OA + OC + OQ = OP$

$$\Leftrightarrow 4OE = OP - OB \Leftrightarrow 4OE = PB \Rightarrow BP = 4OE$$

Vậy $BP = 4.OE$.

Câu 5. Xét tập hợp $B = \{ |x + y - z - t|, x, y, z, t \in A \}$

Ta sẽ chỉ ra bất đẳng thức sau: $|B| \leq 1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4$

Thật vậy, ta xét các trường hợp sau:

+) Nếu 4 số x, y, z, t đều bằng nhau thì số các số dạng $|x + y - z - t|$ bằng 1

+) Nếu trong 4 số x, y, z, t có đúng 3 số bằng nhau, giả sử $x = y = z \neq t$

Khi đó $|x + y - z - t| = |x - t|$ suy ra có tối đa C_n^2 số $|x + y - z - t|$

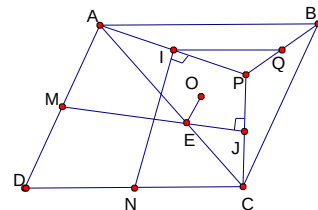
+) Nếu 4 số x, y, z, t có đúng 2 số bằng nhau. Khi đó nếu $x = y$ thì có tối đa C_n^3 số dạng này, còn nếu $x = z$

thì $|x + y - z - t| = |y - t|$ thì có tối đa C_n^2 số dạng này và đã xét ở trên.

+) Nếu 4 số x, y, z, t đôi 1 khác nhau thì có tối đa C_n^4 số $|x + y - z - t|$

Do đó có nhiều nhất $1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4$ số dạng $|x + y - z - t|$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (1).



Gọi $x_1 = 1 \in S$. Đặt $C_1 = S \setminus \{x + x_1 \mid x \in B\}$ suy ra

$$|C_1| \geq |S| - |B| > (n-2)|B| > 0 \Rightarrow \exists x_2 = \min C_1 \Rightarrow x_2 > x_1$$

Dễ thấy $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Tiếp theo đặt $C_2 = C_1 \setminus \{x + x_2 \mid x \in B\}$ suy ra

$$|C_2| \geq |C_1| - |B| > (n-3)|B| > 0 \Rightarrow \exists x_3 = \min C_2 \Rightarrow x_3 > x_2$$

Kiểm tra được ngay $A_2 \cap A_3 = \emptyset, A_1 \cap A_3 = \emptyset$. Cứ tiếp tục như vậy đến bước thứ n , ta đặt

$$C_{n-1} = C_{n-2} \setminus \{x + x_{n-2} \mid x \in B\} \text{ thì}$$

$$|C_{n-1}| \geq |C_{n-2}| - |B| > (n-n)|B| = 0 \Rightarrow \exists x_n = \min C_{n-1} \Rightarrow x_n > x_{n-1}$$

Khi đó ta kiểm tra được $A_i \cap A_j = \emptyset$ với mọi $i \neq j$

Vậy luôn tồn tại các phần tử $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

ĐỀ SỐ 24

Câu 1. Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x(x^2 + 2mx + m + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 (*) \end{cases}$$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (2; +\infty)$$

Khi đó $B = (x_1; x_1 + 4), C = (x_2; x_2 + 4)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (*)

$$\text{Theo Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 \cdot x_2 = m + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2} = 2\sqrt{2(m^2 - m - 2)}$$

Ta có khoảng cách từ K đến d là $h = \sqrt{2}$

$$\text{Do đó diện tích tam giác KBC là: } S = \frac{1}{2}h \cdot BC = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2(m^2 - m - 2)} = 2\sqrt{m^2 - m - 2}$$

$$S = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 - m - 2} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Câu 2.

$$1.a) \quad 2\cos 2x - m\cos x = \frac{1}{4}\sin 4x + m\sin x \Leftrightarrow 4\cos 2x - \sin 2x \cdot \cos 2x - 2m(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(4 - \sin 2x) - 2m(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(4 - \sin 2x) - 2m(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)[(\cos x - \sin x)(4 - \sin 2x) - 2m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0(2) \\ (\cos x - \sin x)(4 - \sin 2x) - 2m = 0(3) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2):} \quad \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Từ (3):} \quad \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(4 - \sin 2x) - 2m = 0$$

$$\text{Đặt } t = \cos x - \sin x, |t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin 2x = 2\sin x \cos x = 1 - t^2$$

$$\text{Phương trình (3) trở thành} \quad t(3 + t^2) - 2m = 0 \Leftrightarrow t^3 + 3t - 2m = 0(4)$$

$$\text{Với } m = 2, \text{ phương trình (4) trở thành: } t^3 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 4) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{Với } t = 1, \text{ ta có} \quad \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \cos x\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Vậy với } m = 2, \text{ phương trình đã cho có nghiệm} \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = k2\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \text{ Nghiệm của (2) không thuộc đoạn } \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \text{ nên để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn } \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \text{ thì}$$

$$\text{phương trình (3) phải có nghiệm thuộc đoạn } \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \text{ hay phương trình (4) có nghiệm thuộc đoạn } [0; 1]$$

$$\text{Ta có: } t^3 + 3t - 2m = 0 \Leftrightarrow t^3 + 3t = 2m(5)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^3 + 3t \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ có } f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Suy ra: } \min_{[0;1]} f(t) = f(0) = 0, \max_{[0;1]} f(t) = f(1) = 4$$

$$\text{Phương trình (5) có nghiệm trên đoạn } [0; 1] \Leftrightarrow \min_{[0;1]} f(t) \leq 2m \leq \max_{[0;1]} f(t) \Leftrightarrow 0 \leq 2m \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$$

Vậy $m \in [0; 2]$ là giá trị cần tìm của m.

2. Điều kiện: $x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right]$

Phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt{3x+3}-3) - (\sqrt{5-2x}-1) - x^3 + 3x^2 + 10x - 24 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2(x-2)}{\sqrt{5-2x}+1} - (x-2)(x^2-x-12) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{5-2x}+1} - x^2 + x + 12 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{5-2x}+1} - x^2 + x + 12 = 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + x + 12, x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right]$. Ta có $f(x)$ liên tục trên $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$

Ta có $f'(x) = -2x + 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Do đó $\min_{\left[-1; \frac{5}{2}\right]} f(x) = \min \left\{ f(-1); f\left(\frac{5}{2}\right); f\left(\frac{1}{2}\right) \right\} = \min \left\{ 10; \frac{33}{4}; \frac{49}{4} \right\} = \frac{33}{4} > 0$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{5-2x}+1} - x^2 + x + 12 > 0, \forall x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right]$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$

Câu 3.

a) Ta có: $(1+1)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (1)$

$$(1-1)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta được:

$$2^{2n} = 2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n}) \Rightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$$

Theo bài ra ta có: $2^{2n-1} = 512 \Leftrightarrow 2n-1=9 \Leftrightarrow n=5$

Từ đó $(2-x^2)^{3n} = (2-x^2)^{15} = \sum_{i=0}^{15} C_{15}^i 2^{15-i} (-1)^i x^{2i}$

$\Rightarrow$ Hệ số của x^{18} là số $C_{15}^i 2^{15-i} (-1)^i$ sao cho $2i = 18 \Leftrightarrow i = 9$

Vậy hệ số của x^{18} là: $-C_{15}^9 2^6 = -320320$

b) $\forall n \geq 1, u_{n+1} = au_n + b \Rightarrow u_{n+1} - u_n = a(u_n - u_{n-1}), \forall n \geq 2$

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n, n \geq 1 \Rightarrow v_n = av_{n-1}, n \geq 2 \Rightarrow (v_n)$ là một cấp số nhân có công bội bằng a

Ta có: $\forall n \geq 1, v_n = v_1 \cdot a^{n-1}; v_1 = (a-1)u_1 + b$

Vậy ta có: $\forall n \geq 2, u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1$

$$= v_1 \cdot (a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + 1) + u_1 = u_1 \cdot a^{n-1} + b(a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + 1)$$

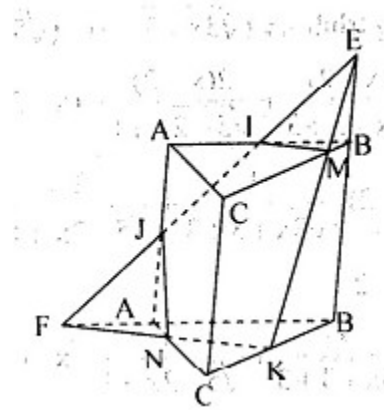
Câu 4.

a) Dựng đúng thiết diện. Chứng minh $EI = IJ = JF$

Từ đó suy ra $\frac{EB}{EB'} = \frac{EM}{EK} = \frac{FA'}{FB'} = \frac{1}{3}$

Lại từ đó suy ra $\frac{FN}{FK} = \frac{1}{2}$

Ta có: $d(K; A'B') = \frac{1}{2} d(C; A'B'), FB' = \frac{3}{2} A'B'$



Suy ra $S_{KFB'} = \frac{3}{4} S_{A'B'C'}$

Mặt khác vì $\frac{EB}{EB'} = \frac{1}{3}$ nên suy ra $d(E; (KFB')) = \frac{3}{2} h$ (h là chiều cao lăng trụ)

Do đó $V_{EKFB'} = \frac{3}{8} V$ (V là thể tích lăng trụ)

$$\frac{V_{EBIM}}{V_{EB'FK}} = \frac{EI}{EF} \cdot \frac{EM}{EK} \cdot \frac{EB}{EB'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \text{ nên } V_{EBIM} = \frac{1}{27} \cdot \frac{3}{8} V = \frac{1}{72} V$$

$$\frac{V_{FA'JN}}{V_{FB'EK}} = \frac{FJ}{FE} \cdot \frac{FA'}{FB'} \cdot \frac{FN}{FK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \text{ nên } V_{FA'JN} = \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{8} V = \frac{1}{48} V$$

Mặt phẳng (IJK) chia khối lăng trụ thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích chứa điểm B' và V_2 là thể tích chứa điểm C .

Ta có $V_1 = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{72} - \frac{1}{48} \right) V = \frac{49}{144} V$ nên $V_2 = \frac{95}{144} V$

Do đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{49}{95}$

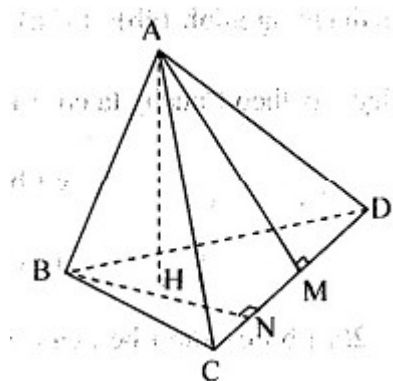
b)

Theo giả thiết $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ có tất cả các cạnh không lớn hơn 1. Đặt $CD = a$ ($0 < a \leq 1$)

Gọi AM , BN lần lượt là chiều cao của $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$

Ta có: $AM \leq \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}; BN \leq \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$

Gọi AH là chiều cao của tứ diện, ta có $AH \leq AM \leq \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$



$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCD} \cdot AH = \frac{1}{6} \cdot BN \cdot CD \cdot AH \leq \frac{a}{6} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right)$$

Thể tích của tứ diện ABCD:

Xét $f(a) = a(4 - a^2)$ trên $(0; 1]$. Ta có $f(a)$ liên tục trên $(0; 1]$

$$f'(a) = 4 - 3a^2, f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0; 1]$$

a	0	1
$f'(a)$	+	
$f(a)$		

Vậy $\max_{(0;1]} f(a) = f(1) = 3$

Suy ra $\max V = \frac{1}{8}$ khi $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ là 2 tam giác đều cạnh bằng 1, 2 mặt phẳng (ACD) và (BCD)

Vuông góc với nhau. Khi đó tính được $AB = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$

Câu 5. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

Tương tự: $\frac{b^2}{b+2c^2} \geq b - \frac{2}{3}(bc)^{\frac{2}{3}}, \frac{c^2}{c+2a^2} \geq c - \frac{2}{3}(ca)^{\frac{2}{3}}$

Khi đó $\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq a+b+c - \frac{2}{3} \left((ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}} \right)$ (1).

Ta đi chứng minh $(ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}} \leq 3 \sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{a^2b^2} \leq 3$ (2).

Thật vậy theo Cauchy ta có $a+b+ab \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2}$; $c+b+bc \geq 3\sqrt[3]{b^2c^2}$; $a+c+ac \geq 3\sqrt[3]{a^2c^2}$.

Suy ra $2(a+b+c) + ab + bc + ca \geq 3(\sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{a^2b^2})$.

Mặt khác ta có $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Âp $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$.

Khi đó ta có $3(\sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{a^2b^2}) \leq 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 = 9 \Rightarrow \sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{a^2b^2} \leq 3$.

Vậy (2) đúng, thay vào (1), suy ra điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Câu 1. a) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Sự biến thiên – Giới hạn – Tiệm cận

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$; Tiệm cận ngang $y = 2$.

$\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$; Tiệm cận đứng $x = -2$.

Chiều biến thiên $y' = \frac{4}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in D$.

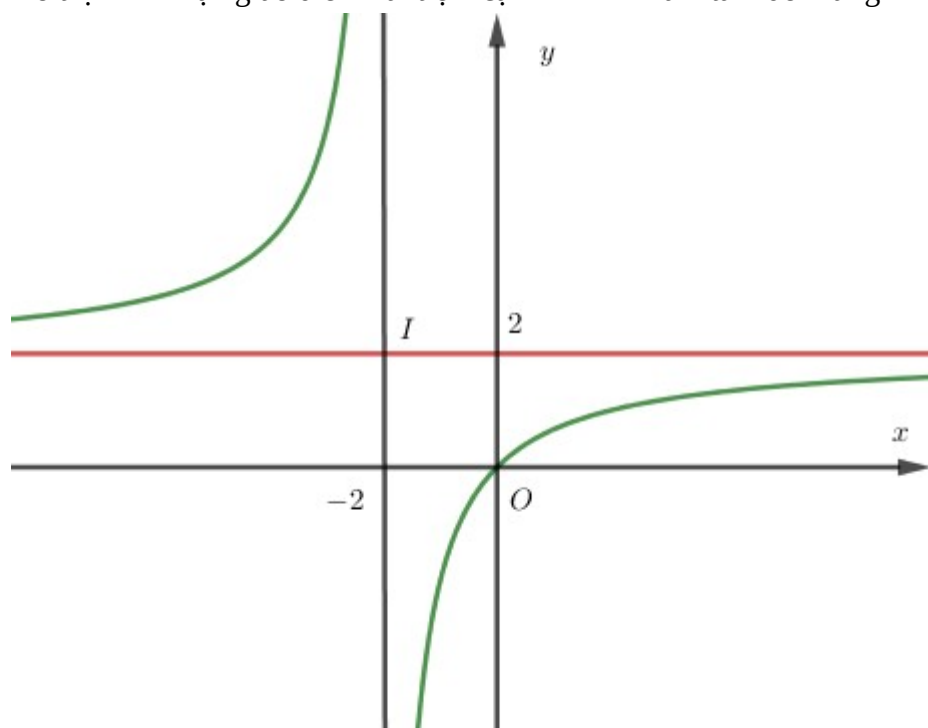
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$ $-\infty$	2

Đồ thị

Đồ thị (C) nhận giao điểm hai tiệm cận $I(-2; 2)$ làm tâm đối xứng



Gọi $x_0 \neq -2$ là hoành độ của tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm.

Khi đó phương trình tiếp tuyến là

$$\Delta: y = \frac{4}{(x_0 + 2)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0}{x_0 + 2} \Leftrightarrow \frac{4}{(x_0 + 2)^2}(x - x_0) - y + 2 - \frac{4}{x_0 + 2} = 0$$

Ta có

$$d(A; \Delta) = \frac{\frac{4}{(x_0+2)^2}(-2-x_0) - 2 + 2 - \frac{4}{x_0+2}}{\sqrt{\frac{16}{(x_0+2)^4} + 1}} = \frac{\left| -\frac{8}{x_0+2} \right|}{\sqrt{\frac{16}{(x_0+2)^4} + 1}} \leq \frac{\left| -\frac{8}{x_0+2} \right|}{\sqrt{\frac{8}{(x_0+2)^2}}} = 2\sqrt{2}.$$

$$(x_0+2)^4 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -4 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\text{Với } x_0 = -4 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta_1: y = x + 6.$$

$$\text{Với } x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta_1: y = x.$$

$$\frac{\sin^3 x \cdot \sin 3x + \cos^3 x \cdot \cos 3x}{\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{8} \quad (1).$$

Câu 2. a)

$$\begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \end{cases}$$

Điều kiện là

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \quad \text{nên} \quad (1) \quad \sin^3 x \cdot \sin 3x + \cos^3 x \cdot \cos 3x = \frac{1}{8}.$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \sin 3x + \cos^2 x \cdot \cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow -(1 - \cos^2 x) \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 2x) + \cos^2 x \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x) = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x \cos 4x - \cos 4x + \cos 2x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos 4x (2\cos^2 x - 1) + \cos 2x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{cases} (1 + 4^{2x-y}) 5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} & (1) \\ \frac{x-y}{4} = \ln(x+3) - \ln(y+3) & (2) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

b) Ta có

Điều kiện là $x > -3$ và $y > -3$.

$$\text{Đặt } t = 2x - y, \text{ phương trình (1) trở thành } (1+4^t) \cdot 5^{t+1} = 1+2^{t+1} \Leftrightarrow \frac{(1+4^t)}{5^t} = \frac{1+2^{t+1}}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot 2^t \quad (3)$$

Ta có hàm số $f(t) = \left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t$ là hàm nghịch biến và hàm số $g(t) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot 2^t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$,
mà $t=1$ thỏa mãn (3), nên $t=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3), nên $\Rightarrow 2x - y = 1$.

Thiếu 129-130-131

ĐỀ SỐ 26

Câu 1. a) Điều kiện $x \geq 2$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} - \sqrt{x+6} = 2x - 6$

$$\Leftrightarrow \frac{8x-24}{3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6}} = 2(x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = 4 \quad (*) \end{cases}$$

Giải (*): $(*) \Leftrightarrow 10x - 12 + 6\sqrt{(x-2)(x+6)} = 16 \Leftrightarrow 3\sqrt{(x-2)(x+6)} = 14 - 5x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14 - 5x \geq 0 \\ 9(x-2)(x+6) = (14-5x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{14}{5} \\ x^2 - 11x + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{14}{5} \\ x = \frac{11 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=3$ và $x = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}$.

b) Ta thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ đã cho nên $y \neq 0$.

Phương trình $x^3 + xy^2 + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + 2y^2) = 0 \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow y = -x$

$$\left(\text{vì } y \neq 0 \text{ nên } x^2 - xy + 2y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 > 0 \right)$$

Thay $y = -x$ vào phương trình sau ta được

$$\sqrt[3]{x^4 - x^2} + 4 = 4x^2 - 3x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 4x^2 - 3x - 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} = 4\left(x - \frac{1}{x}\right) - 3 \quad (\text{chia cả hai vế cho } x \neq 0)$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}}$, phương trình trở thành $4t^3 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(4t^2 + 4t + 3) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Với $t=1$ ta có $x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ có hai nghiệm: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 2. a) Gọi $A\left(a; \frac{2a}{a+2}\right), B\left(b; \frac{2b}{b+2}\right)$ với $a, b \neq -2; a \neq b$.

Vì (C) không có tiếp tuyến kép nên các tiếp tuyến của (C) tại A và B song song.

$$\Leftrightarrow y'(a) = y'(b) \Leftrightarrow \frac{4}{(a+2)^2} = \frac{4}{(b+2)^2}$$

Do $a \neq b$ nên ta có $a+2 = -(b+2) \Leftrightarrow b = -4-a$. Khi đó $B\left(-4-a; \frac{2(a+4)}{a+2}\right)$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A và B lần lượt là

$$4x - (a+2)^2 y + 2a^2 = 0 \quad \text{và} \quad 4x - (a+2)^2 y + 2(a+4)^2 = 0$$

$$h = \frac{|2(a+4)^2 - 2a^2|}{\sqrt{16 + (a+2)^4}} = \frac{16|a+2|}{\sqrt{16 + (a+2)^4}} \leq \frac{16|a+2|}{\sqrt{8(a+2)^2}} = 4\sqrt{2}$$

Khoảng cách giữa chúng:

$$(a+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-4 \end{cases}$$

Đồng thức xảy ra

Vậy, các điểm cần tìm là: $A(0;0), B(-4;4)$ hoặc $A(-4;4), B(0;0)$.

b) Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$.

Đặt $t = x + \sqrt{4-x^2}$. Xem t là hàm số của x , xét hàm số t trên đoạn $[-2; 2]$, ta có:

$$t' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}; \quad t' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên của t trên đoạn $[-2; 2]$:

x	- 2	$\sqrt{2}$	2	
t'		+	0	-
t		$2\sqrt{2}$		

Từ bảng biến thiên ta có $t \in [-2; 2\sqrt{2}]$ và quan hệ số nghiệm của t và x :

- Một giá trị $t \in [-2; 2)$ hoặc $t = 2\sqrt{2}$ cho tương ứng một nghiệm x ;
- Một giá trị $t \in (2; 2\sqrt{2})$ cho tương ứng hai nghiệm x .

$$t^2 = 4 + 2x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow x\sqrt{4-x^2} = \frac{t^2 - 4}{2}$$

Ta có:

$$-\frac{1}{2}t^2 + t + 2 = m$$

Phương trình ban đầu trở thành:

Xét hàm số $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + 2$ trên đoạn $[-2; 2\sqrt{2}] \Rightarrow f'(t) = -t + 1; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên

t	- 2	1	2	$2\sqrt{2}$
f'(t)		+	0	-
f(t)		$\frac{5}{2}$	2	

Từ bảng biến thiên của $f(t)$, phương trình ban đầu có đúng 3 nghiệm $x \Leftrightarrow$ phương trình $f(t)=m$ có một nghiệm $t \in [2; 2\sqrt{2})$ và một nghiệm $t \in [-2; 2) \cup \{2\sqrt{2}\} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 < m \leq 2$.

$$2 \cos \frac{2A - B - C}{4} \cos \frac{B - C}{4} = \frac{3}{2} + \cos \left(\frac{3A}{2} - \frac{\pi}{2} \right)$$

Câu 3. Biến đổi, giả thiết tương đương với:

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{3A - \pi}{4} \cdot \cos \frac{B - C}{4} = \frac{1}{2} + 2 \cos^2 \frac{3A - \pi}{4} \Leftrightarrow 4 \cos^2 \frac{3A - \pi}{4} - 4 \cos \frac{3A - \pi}{4} \cos \frac{B - C}{4} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2 \cos \frac{3A - \pi}{4} - \cos \frac{B - C}{4} \right)^2 + \sin^2 \frac{B - C}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos \frac{3A - \pi}{4} - \cos \frac{B - C}{4} = 0 \\ \sin \frac{B - C}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B - C = 0 \\ \cos \frac{3A - \pi}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \left(\text{vì } -\frac{\pi}{4} < B - C < \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ \frac{3A - \pi}{4} = \frac{\pi}{3} \quad \left(\text{vì } -\frac{\pi}{4} < \frac{3A - \pi}{4} < \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{7\pi}{9} \\ B = C = \frac{\pi}{9} \end{cases}$$

Câu 4. Ta xét hình chóp với đỉnh là A . Gọi H là trung điểm BC .

Do $AB = AC = a \Rightarrow AH \perp BC$.

Theo giả thiết hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) vuông góc

với nhau theo giao tuyến BC nên suy ra $AH \perp (SBC)$.

Ta có : $AB = AC = AS$ nên $HA = HB = HS \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại S .

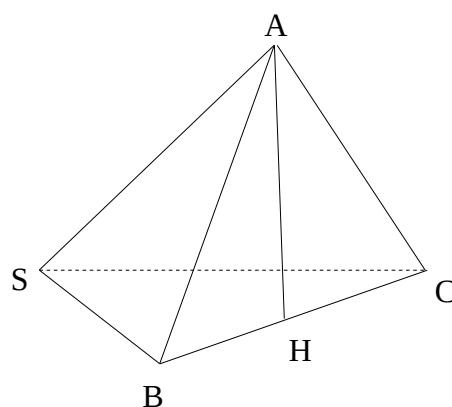
Đặt $SC = x$.

$$\text{Ta có } BC = \sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2 = \frac{3a^2 - x^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$$

$$\text{Thể tích khối chóp: } V = \frac{1}{3} AH \cdot \frac{1}{2} SB \cdot SC = \frac{1}{12} ax \sqrt{3a^2 - x^2}$$

$$\text{Theo giả thiết } V = \frac{a^3}{8} \Leftrightarrow ax \sqrt{3a^2 - x^2} = \frac{3a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Câu 5: Từ giả thiết ta có: } 3abc = a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$$



Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ thì $x, y, z > 0$ và $x + y + z \leq 3$. Gọi $Q = \frac{a}{8a^2 + 1} + \frac{b}{8b^2 + 1} + \frac{c}{8c^2 + 1}$

Ta có: $\frac{a}{8a^2 + 1} = \frac{\frac{1}{a}}{8 + \frac{1}{a^2}} = \frac{x}{x^2 + 8}$ và hai đẳng thức tương tự nên $Q = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} + \frac{z}{z^2 + 1}$

Do $\frac{x}{x^2 + 8} = \frac{x}{(x^2 + 1) + 7} \leq \frac{x}{2x + 7} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{7}{2x + 7} \right)$ và hai đẳng thức tương tự nên

$$Q \leq \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \left[\frac{7}{2x + 7} + \frac{7}{2y + 7} + \frac{7}{2z + 7} \right] \leq \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2(x + y + z) + 21} \leq \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có: $P^2 \leq 3 \cdot Q \leq 1 \Rightarrow P \leq 1$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1

ĐỀ SỐ 27

Câu 1. Xét đa thức $f(t) = t^3 + at^2 + bt + c$ có các nghiệm là x, y, z.

Từ phương trình $x + y + z = 0$, ta suy ra $a = 0$. Do đó $f(t) = t^3 + bt + c$

Vì x, y, z là nghiệm của $f(t)$ nên

$$x^3 + bx + c = 0 \quad (1)$$

$$y^3 + by + c = 0 \quad (2)$$

$$z^3 + bz + c = 0 \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) theo vế và do $x^3 + y^3 + z^3 = 48, x + y + z = 0$ nên ta được $c = -16$

Suy ra $f(t) = t^3 + bt - 16$

Mặt khác $x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} + b(x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1}) - 16(x^n + y^n + z^n) = 0 \quad (4)$

Và đặt $S_n = x^n + y^n + z^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó (4) trở thành $S_{n+3} + bS_{n+1} - 16S_n = 0$

Ta có $S_7 = -bS_5 + 16S_4 = -b(-bS_3 + 16S_2) + 16(-bS_2 + 16S_1) = b^2S_3 - 32bS_2 + 256S_1 \quad (5)$

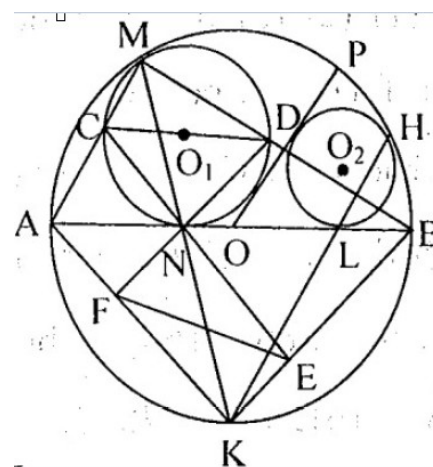
Thế $S_7 = 16128, S_3 = 48, S_2 = -2b, S_1 = 0$ vào (5) ta được $b = \pm 12$

+) $b = 12$, ta được $f(t) = t^3 + 12t - 16$ có nghiệm duy nhất (không thỏa mãn).

+) $b = -12$, ta được $f(t) = t^3 - 12t - 16$ có nghiệm 3 nghiệm $t = -2, t = 2, t = 4$

Vậy hệ đã cho có nghiệm (x, y, z) là $(-2, 2, 4)$ và các hoán vị của nó

Câu 2: a) Ta chứng minh: $u_n^2 + u_{n-1}^2 - 4u_n \cdot u_{n-1} = -3, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ (1) bằng phương pháp quy nạp Toán học



Mà $NK \geq OK = R$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $N \equiv O$ hay (O_1) là đường tròn tiếp xúc với AB tại O

$\Rightarrow P \equiv B \Rightarrow$ điều này không thể xảy ra do giả thiết $B \neq P$

Vậy $NK > R$ hay $T > R(3 + \sqrt{2})$ (ĐPCM).

Câu 4. Bổ đề: Với dãy hữu hạn số nguyên dương $(a_k), k = \overline{1, n+1}$ trong đó mỗi số không lớn hơn $2n$ thì luôn tồn tại hai số trong chúng thỏa mãn số này chia hết cho số kia.

Do $a_i \in \mathbb{N}^* (i = \overline{1, n+1})$ nên ta luôn viết được $a_i = 2^{s_i} \cdot r_i$ trong đó $s_i \in \mathbb{N}$ và $r_i \in \{2k-1 | k = \overline{1, n}\}$

Từ đó vì r_i chỉ nhận giá trị lẻ nên theo nguyên lý Dirichlet trong $n+1$ số đã cho phải tồn tại 2 số

$a_i, a_j (i \neq j)$ thỏa mãn $r_i = r_j$. Không mất tính tổng quát giả sử $a_i \geq a_j$, khi đó $a_i \equiv 0 \pmod{a_j}$ (ĐPCM).

Xét bài toán đã cho:

Do dãy số đã cho là một dãy hữu hạn nên tồn tại số nhỏ nhất trong chúng, không mất tổng quát giả sử

$a_i = \min\{a_k\}, k = \overline{1, 2013}$. Khi đó ta chỉ cần chứng minh $a_i > 1342$ là đủ.

Thật vậy giả sử $a_i \leq 1342$, khi đó ta có 2014 số $2a_i, 3a_i, a_2, a_3, \dots, a_{2013}$ thỏa mãn không có số nào lớn hơn

4026. Theo giả thiết $[a_i, a_j] > 4026; i, j = \overline{1, 2013}, i \neq j$, nên trong dãy 2014 số ở trên không thể tồn tại 2 số thỏa mãn số này là bội của số kia. Điều này vô lý với bổ đề ở trên. Vậy $a_i > 1342$ (ĐPCM).

Câu 5. Ta chứng minh không xảy ra trường hợp sau: một số hữu hạn bước thực hiện ta được một bảng ô vuông có đúng 6 dấu “-”.

Thật vậy giả sử sau một số hữu hạn bước thực hiện ta được một bảng ô vuông có đúng 6 dấu “-”.

+ Tại cột thứ $j (j = \overline{1, 10})$ ta gọi p là tổng số dấu “-” ở các hàng thứ $i (i = \overline{1, 10}) \Rightarrow p = \overline{0, 10}$

+ Tại hàng thứ $i (i = \overline{1, 10})$ ta gọi q là tổng số dấu “-” ở các cột thứ $j (j = \overline{1, 10}) \Rightarrow q = \overline{0, 10}$

Khi đó tổng số các dấu “-” trên bảng ô vuông là: $p(10 - q) + q(10 - p)$

Theo đề bài: $p(10 - q) + q(10 - p) = 6 \Leftrightarrow pq - 5p - 5q + 3 = 0 \Leftrightarrow (p - 5)(q - 5) = 2.11$

$\Rightarrow \begin{cases} (p - 5) \equiv 1 \\ (q - 5) \equiv 1 \end{cases} \quad (*)$
(do 11 là một số nguyên tố)

Mặt khác do $p = \overline{0, 10}$ và $q = \overline{0, 10}$ nên $|p - 5| \leq 5$ và $|q - 5| \leq 5$

Từ đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} p - 5 = 0 \\ q - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ vô lý với $(p - 5)(q - 5) = 2.11$

Vậy ta có ĐPCM.

ĐỀ SỐ 28

Câu 1. Phương trình $x^{4n} + \sqrt{x^{2n} + 2012} = 2012 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ (1)

Đặt $t = x^{2n} \geq 0$, phương trình (1) trở thành $t^2 + \sqrt{t + 2012} = 2012$

$$\Leftrightarrow t^2 + t + \frac{1}{4} = t + 2012 - \sqrt{t + 2012} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{t + 2012} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow t + 1 = \sqrt{t + 2012} \Leftrightarrow t^2 + t - 2011 = 0 \quad (2)$$

Giải phương trình (2) ta được: $t = \frac{-1 + \sqrt{8045}}{2}$ thỏa mãn điều kiện

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \sqrt[2n]{\frac{-1 + \sqrt{8045}}{2}}$ và $x_2 = -\sqrt[2n]{\frac{-1 + \sqrt{8045}}{2}}, n \in \mathbb{N}^*$

Câu 2. Theo công thức xác định dãy (u_n) , ta có $u_n > 0; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2u_n + \frac{3}{u_n^2} \right) = \frac{1}{3} \left(u_n + u_n + \frac{3}{u_n^2} \right) \geq \sqrt[3]{u_n^2 \cdot \frac{3}{u_n^2}} = \sqrt[3]{3}$$

Do đó $u_n \geq \sqrt[3]{3}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Mặt khác: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{u_n^2} - u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{u_n^2} - u_n \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3 - u_n^3}{u_n^2} \right) \leq 0$

Vậy (u_n) là dãy số giảm và bị chặn dưới nên nó có giới hạn

Giả sử, $\lim u_n = a$. Ta có: $a = \frac{2}{3}a + \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{a^2} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{3}$

Vậy $\lim u_n = \sqrt[3]{3}$

Câu 3. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{36}{9 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2} \Leftrightarrow (9 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 36$

Ta có: $(xyz)^2 = (xy)(yz)(zx) \leq \left(\frac{xy + yz + zx}{3} \right)^3$

Do đó: $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2 = \left(\frac{xy + yz + zx}{xyz} \right)^2 \geq \frac{27(xy + yz + zx)^2}{(xy + yz + zx)^3} = \frac{27}{xy + yz + zx}$

Mặt khác: $9 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 6 + (x^2y^2 + 1) + (y^2z^2 + 1) + (z^2x^2 + 1) \geq 2(3 + xy + yz + zx)$

$$\Rightarrow (9 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 36$$

+) Nếu BC nằm trên trục tung thì tam giác ABC cân tại A nên $M \equiv N$, do đó O thuộc AN nên QO vuông góc BC.

Câu 5. Giả sử $(x; y; z)$ là nghiệm nguyên dương của phương trình

Ta có: $x + 2\sqrt{3} = y + z + 2\sqrt{yz} \Leftrightarrow x - (y + z) = 2\sqrt{yz} - 2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow [x - (y + z)]^2 = 4yz - 8\sqrt{3}\sqrt{yz} + 12 = 4yz - 4\sqrt{3}[x - (y + z)] - 12$$

$$\Rightarrow [x - (y + z)]^2 + 4\sqrt{3}[x - (y + z)] + 12 = 4yz$$

Nếu $x \neq (y + z)$ thì $4\sqrt{3} = \frac{-[x - (y + z)]^2 + 4yz + 12}{x - (y + z)} \in \mathbb{R}$ (vô lý)

Nếu $x = (y + z)$ thì $yz = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 4$

Thử lại, ta thấy: $(4; 3; 1)$ và $(4; 1; 3)$ là nghiệm của phương trình.

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho là $(4; 3; 1)$ và $(4; 1; 3)$.

ĐỀ SỐ 29

Câu 1. Giả sử $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ. Xét hàm số: $f(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 3t^2 - 6t + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến.

Hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} f(x) = 4y \\ f(y) = 4z \\ f(z) = 4x \end{cases}$

Vì vai trò của x, y, z là bình đẳng nên không mất tính tổng quát, ta giả sử: $x \geq y, x \geq z$

Nếu $x > y$ thì $f(x) > f(y) \Rightarrow y > z \Rightarrow f(y) > f(z) \Rightarrow z > x$ (mâu thuẫn).

Tương tự nếu $x > z$ ta cũng đi đến mâu thuẫn, suy ra $x = y = z$.

$$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó, ta có:

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là: $x = y = z = 1, x = y = z = 1 \pm \sqrt{2}$

Câu 2. Ta có: $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 4 \Rightarrow -2 \leq x + y \leq 2$

$$M = x^2(x + 2) + y^2(y + 2) + 3(x + y)(xy - 4) = (x + y)^3 - 12(x + y) + 4$$

Đặt $x + y = t \Rightarrow t \in [-2; 2]$. Ta có: $M = t^3 - 12t + 4$

Xét $f(t) = t^3 - 12t + 4$, ta có: $f'(t) = 3t^2 - 12 \leq 0 \Leftrightarrow t \in [-2; 2]$

Do đó trên đoạn $[-2; 2]$, $f(t)$ nghịch biến.

$\max M = \max_{[-2; 2]} f(t) = f(-2) = 20 \Leftrightarrow t = -2 \Leftrightarrow x = y = -1$

Vậy:

$\min M = \min_{[-2; 2]} f(t) = f(2) = -12 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$

Câu 3. Giả sử f là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán

Ta có: $f(n) < f(n+1) < \dots < f(n+n) = f(n) + n$. Do đó: $f(n+1) = f(n) + 1$

Đặt $f(1) = a \in \mathbb{N}^*$. Ta có: $f(n) = f(1) + n - 1 = a + n - 1$

Với $n = a^2 + a + 2$, ta có: $f(a^2 + a + 2) = a + a^2 + a + 2 - 1 = (a+1)^2$

Do đó: $a^2 + a + 2$ là số chính phương.

Mà: $a^2 < a^2 + a + 2 < (a+2)^2$ nên $a^2 + a + 2 = (a+1)^2 \Rightarrow a = 1$. Vậy: $f(n) = n$

Thử lại ta thấy $f(n) = n$ thỏa mãn các điều kiện bài toán.

Câu 4. Trên (ACM) dựng $IN \parallel CM (I \in AM)$

Trên (ABD) lấy điểm $P = DI \cap AB$

Trên (DNP) dựng $PQ \parallel IN \parallel CM (Q \in DN)$

Gọi E là trung điểm PB

$\Rightarrow ME$ là đường trung bình của $\triangle BPD$.

Do đó: $ME \parallel PD \Rightarrow ME \parallel PI$

Mặt khác: NI là đường trung bình của $\triangle ACM$.

$\Rightarrow I$ là trung điểm của AM

Nên PI là đường trung bình của $\triangle AME$.

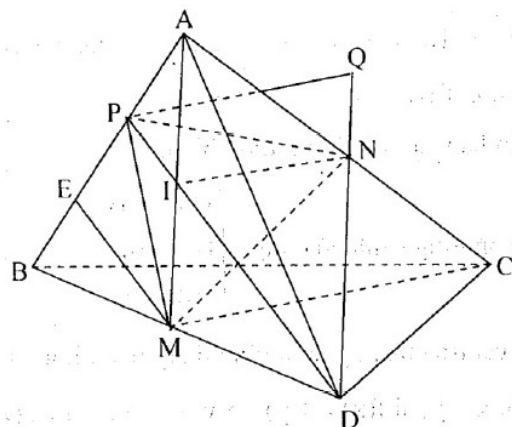
Hay: $PI = \frac{1}{2}EM = \frac{1}{4}PD \Rightarrow DI = \frac{3}{4}PD, IN = \frac{1}{2}CM = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Khi đó: $\frac{IN}{PQ} = \frac{DI}{DP} = \frac{3}{4} \Rightarrow PQ = \frac{4}{3}IN = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ta có: $\frac{V_{AMNP}}{V_{AMCB}} = \frac{AM \cdot AN \cdot AP}{AM \cdot AC \cdot AB} = \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Mà $\frac{V_{AMCB}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{2}$

Vậy: $V_{AMNP} = \frac{1}{12}V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{144}$ (đvtt)

Câu 5. Gọi các đỉnh của đa giác đều n cạnh lần lượt là: $A_1, A_2, \dots, A_n$.



Ta đếm số các tứ giác thỏa mãn yêu cầu bài toán có 1 đỉnh là A_1

Khi đó: A_2, A_n không phải là đỉnh của tứ giác vì A_1A_2, A_1A_n là các cạnh của đa giác. Ta cần chọn thêm các đỉnh: A_i, A_j, A_k thỏa mãn: $5 \leq i+2 \leq j+1 \leq k \leq n-1$ (vì giữa 2 đỉnh của tứ giác phải có ít nhất 1 đỉnh của đa giác).

Mỗi cách chọn bộ ba đỉnh như trên là 1 cách chọn bộ 3 số phân biệt trong $n-5$ số tự nhiên từ 5 đến $n-1$.

Vậy có C_{n-5}^3 tứ giác có đỉnh A_1 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vì đa giác có n đỉnh và mỗi tứ giác được đếm lặp lại 4 lần theo 4 đỉnh nên số tứ giác cần tìm là: $\frac{n.C_{n-5}^3}{4}$

ĐỀ SỐ 30

Câu 1. a) Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$

Đặt $y = \sqrt{\sqrt{x+1}+2}$ ($y \geq \sqrt{2}$)

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x+1+y=2(x+1)y \\ y^2-\sqrt{x+1}=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+1+y=(y^2-\sqrt{x+1})(x+1)y \Leftrightarrow (y\sqrt{x+1}+1)(y+x+1-y^2\sqrt{x+1})=0$$

$$\Leftrightarrow (y\sqrt{x+1}+1)(y-2\sqrt{x+1})=0 \Leftrightarrow y=2\sqrt{x+1}$$

Do vậy $\sqrt{\sqrt{x+1}+2}=2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x=\frac{-15+\sqrt{33}}{32}$

Thay vào, thử lại thấy $x=\frac{-15+\sqrt{33}}{32}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{-15+\sqrt{33}}{32}$.

b) Đặt $u=x(x+y)$, $v=y(y+1)$, hệ trở thành:
$$\begin{cases} u+v=8 \\ uv=12 \end{cases}$$

Giải hệ tìm được $\begin{cases} u=2 \\ v=6 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u=6 \\ v=2 \end{cases}$

+) Với $\begin{cases} u=2 \\ v=6 \end{cases}$ ta tìm được: $\begin{cases} x=-1\pm\sqrt{3} \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2} \\ y=-3 \end{cases}$

+) Với $\begin{cases} u=6 \\ v=2 \end{cases}$ ta tìm được: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1\pm\sqrt{7} \\ y=-2 \end{cases}$

Hệ đã cho có các nghiệm là

$$\begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{7} \\ y = -2 \end{cases}.$$

Câu 2. a) Gọi $I(x; y)$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔMAB .

Ta có: $\begin{cases} AI = BI \\ AI \cdot BI = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 10 \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

+) Với $I(3;1)$ thì $IA = \sqrt{5}$

Đường tròn tâm I bán kính IA có phương trình $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$ cắt trục hoành tại 2 điểm $M_1(1;0)$ và $M_2(5;0)$

+) Với $I(2;4)$ thì $IA = \sqrt{5}$. Đường tròn tâm I, bán kính IA không cắt trục hoành.

b) Đặt $AM = x$, $AN = y$ với $x > 0$, $y > 0$.

$$S_{AMG} = \frac{1}{2} AM \cdot AG \cdot \sin 30^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{ANG} = \frac{1}{2} AN \cdot AG \cdot \sin 30^\circ = \frac{y\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{xy\sqrt{3}}{4}.$$

Mà $S_{AMN} = S_{AMG} + S_{ANG}$.

Nên ta có $\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{4}xy \Rightarrow 2(x+y) = xy.$

Vậy ta có hệ:
$$\begin{cases} 2(x+y) = xy \\ 2x = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5\text{cm} \\ y = \frac{10}{3}\text{cm} \end{cases}.$$

Diện tích cần tìm $S_{AMN} = \frac{xy\sqrt{3}}{4} = \frac{24\sqrt{3}}{6}\text{cm}^2.$

Câu 3.

a) Khi $n = 1$, $u_2 = u_1 + 2^1 = 1 + 2 = 2^1 - 1$ đúng.

Giả sử $u_k = 2^k - 1$ đúng với $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Ta chứng minh $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.

Thật vậy $u_{k+1} = u_k + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2^{k+1} - 1$

b) $S = (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + \dots + (2^n - 1) = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n - n$.

$$P = 2 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n = 2^{n+1} - n - 2$$

Câu 4.

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$14a^2 + 14b^2 + 16a^2b^2 - 36ab + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 14(a-b)^2 + (4ab-1)^2 \geq 0 \text{ đúng.}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } a = b = \frac{1}{2}.$$

$$\text{b) Đặt } t = a + b, \text{ ta có } \frac{16P}{9} = \frac{(2t^2 + 7)(c^2 + 2)}{(3+t+c)^2}.$$

$$\frac{(2t^2 + 7)(c^2 + 2)}{(3+t+c)^2} = 1 + \frac{2tc - \frac{1}{2} + 3(t-1)^2 + 6c - \frac{1}{2}}{(3+t+c)^2} \geq 1$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ bằng } \frac{9}{16} \text{ khi } a = b = \frac{1}{2}.$$

Câu 5.

$y' = mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m$. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng 2. Ta tìm m sao cho

$$mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m = 2 \quad (*) \text{ có đúng một nghiệm âm.}$$

$$(*) \Leftrightarrow (x-1)(mx+3m-2) = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } mx = 2m-3.$$

+) $m = 0$, không thỏa yêu cầu.

$$\text{+) } m \neq 0, \text{ yêu cầu bài toán xảy ra khi } \frac{2-3m}{m} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \text{hoặc} \\ m > \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m \in (-\infty; 0) \cup (\frac{2}{3}; +\infty).$$

ĐỀ SỐ 31

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x^2+y^2+1} - \sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases}$$

Câu 1. a)

$$\text{Điều kiện } x+y \geq 0; x-y \geq 0.$$

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}. \text{ Điều kiện } v \geq 0; v \leq 0 \text{ ta có hệ}$$

$$\begin{cases} \sqrt{u} - \sqrt{v} = 2 \quad (u > v) \\ \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} u + v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases}$$

$$\hat{=} \begin{cases} u + v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{(u+v)^2 - 2uv + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\hat{=} \begin{cases} u + v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{(u+v)^2 - 2uv + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta được

$$\sqrt{uv + 8\sqrt{uv} + 9} - \sqrt{uv} = 3 \hat{=} uv + 8\sqrt{uv} + 9 = (3 + \sqrt{uv})^2 \hat{=} uv = 0$$

$$\begin{cases} uv = 0 \\ u + v = 4 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} u = 4 \\ v = 0 \\ u = 0 \\ v = 4 \end{cases}$$

Kết hợp (1) ta có

Từ đó ta có $x = 2; y = 2$ (thỏa mãn).

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (2; 2)$.

b) Ta có $\sqrt{x^2(x^2 + 1)} + 1 + \sqrt{3}(x^2 + 1) = 3\sqrt{3}x \quad (1)$

$$x > 0 \Rightarrow (1) \hat{=} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + 1 + \sqrt{3}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3\sqrt{3}$$

Từ phương trình ta thấy

Đặt $t = x + \frac{1}{x}, t \geq 2$. Phương trình trở thành

$$\sqrt{t^2 - 1} = \sqrt{3}(3 - t) \hat{=} \begin{cases} t \leq 3 \\ t^2 - 9t + 14 = 0 \end{cases} \hat{=} t = 2$$

Thay $t = 2$ vào $x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1$.

Câu 2. a) Tọa độ B là nghiệm của hệ

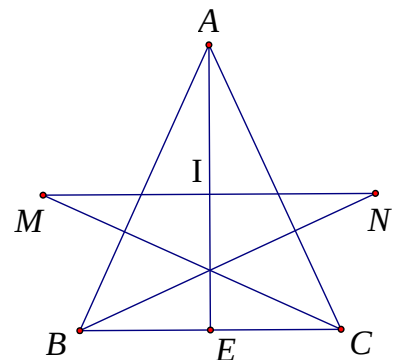
$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(3; -4)$$

Gọi d là đường thẳng qua M song song với $BC \Rightarrow d: 2x + y - 3 = 0$.

Gọi N là giao điểm của d với đường cao kẻ từ B .

Tọa độ N là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow N(4; -5)$.

Gọi I là trung điểm của $MN \Rightarrow I\left(\frac{3+4}{2}; \frac{-4-5}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}; -\frac{9}{2}\right)$.



Gọi E là trung điểm BC . Do ΔABC cân nên IE là đường trung trực BC , IE đi qua I vuông góc với

$$BC \quad \text{p} \quad IE: x - 2y - \frac{13}{2} = 0.$$

$$\text{Tọa độ } E \text{ là nghiệm của hệ} \quad \begin{cases} x - 2y - \frac{13}{2} = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{p} \quad E\left(\frac{21}{10}; -\frac{11}{5}\right); \quad \text{p} \quad C\left(\frac{26}{5}; -\frac{2}{5}\right)$$

$$CA \text{ đi qua } C \text{ vuông góc với } BN \text{ suy ra} \quad CA: x - y - \frac{8}{5} = 0.$$

$$\text{Tọa độ } A \text{ là nghiệm của hệ} \quad \begin{cases} x - 2y - \frac{13}{2} = 0 \\ x - y - \frac{8}{5} = 0 \end{cases} \quad \text{p} \quad A\left(\frac{33}{10}; -\frac{49}{10}\right)$$

b) Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A, C \in Ox, B \in Oy$.

Giả sử trong hệ trục đó ta có $A(a; 0), C(c; 0), B(0; b), D(m, n)$

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + (c - m)^2 + n^2 = (a - m)^2 + n^2 + c^2 + b^2 \Leftrightarrow 2m(a - c) = 0$$

Do $A(a; 0) \neq C(c; 0) \Rightarrow a \neq c$. Từ (*) $\Rightarrow m = 0$, hay D nằm trên trục tung.

Vậy (*) $\Leftrightarrow AC \perp BD$.

$$t = \tan \frac{\pi}{4} = \tan \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}$$

Câu 3. Ta có

$$\begin{aligned} \hat{=} \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0 & \hat{=} \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \\ \tan \frac{\pi}{8} = -\sqrt{2} - 1 & \text{p} \quad \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \quad (\text{vì } \tan \frac{\pi}{8} > 0). \end{aligned}$$

b) Đặt $u_1 = \sqrt{2} = \tan a$, ta có

$$u_2 = \frac{\tan a + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan a \tan \frac{\pi}{8}} = \tan \left(a + \frac{\pi}{8} \right); \quad u_3 = \frac{\tan \left(a + \frac{\pi}{8} \right) + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan \left(a + \frac{\pi}{8} \right) \tan \frac{\pi}{8}} = \tan \left(a + 2 \times \frac{\pi}{8} \right).$$

$$Ta \text{ chứng minh} \quad u_n = \tan \left(a + (n-1) \frac{\pi}{8} \right), \quad "n \geq 1, n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Với $n = 1, u_1 = \tan a$ (đúng).

$$\text{Giả sử } (*) \text{ đúng với } n = k, k \geq 1, \text{ hay ta có} \quad u_k = \tan \left(a + (k-1) \frac{\pi}{8} \right).$$

$$u_{k+1} = \frac{u_k + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)u_k} = \frac{\tan \frac{\pi}{8} + (k-1)\frac{\pi}{8}}{1 - \tan \frac{\pi}{8} + (k-1)\frac{\pi}{8}} = \tan \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{8}$$

Ta có

Suy ra (*) đúng với $n = k + 1$.

$$u_n = \tan \frac{\pi}{8} + (n-1)\frac{\pi}{8}$$

Vậy, $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Cho } n = 2015, \text{ ta có } u_{2015} = \tan \frac{\pi}{8} + 2014 \times \frac{\pi}{8} = \tan \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{4} + 251\pi \frac{\pi}{8}$$

$$= \tan \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2 = \tan^2 \frac{\pi}{8}$$

Câu 4. a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c; a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b; c^2 + 1 \geq 2c$.

$$\cup a^2 + b^2 + c^2 \geq (a + b + c) + (a + b + c) - 3$$

$$\text{Mà } a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

$$\text{b) } a + b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) \geq \sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$$

$$\text{Đ } a + b + 1 \geq \sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) + 1 = \sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) + \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})$$

$$\text{Đ } \frac{1}{a+b+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})} = \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})} = \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$$

Tương tự:

$$\frac{1}{b+c+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{bc}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})} = \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{bc}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$$

$$\frac{1}{c+a+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{ca}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})} = \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{ca}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}} = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

$$\begin{cases} x + y = \frac{3}{2}m \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} (x+2)y^2 + 2xy = 3m^2y + \frac{2}{3}m^3 \end{cases} \quad (2)$$

Câu 5. Ta có

$$\hat{U} \quad x = \frac{3}{2}m - y$$

Từ (1)

$$\frac{3}{2}m + 2 - y^2 + 2\frac{3}{2}m - 2y = 3my + 2m$$

$$\hat{U} \quad f(y) = y^3 - \frac{3}{2}my^2 + 2m = 0 \quad (*).$$

Hệ phương trình có nhiều hơn hai nghiệm khi phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $\hat{P} \quad f'(y)$ có hai nghiệm phân biệt y_1, y_2 và $f(y_1) \neq f(y_2) < 0$.

$f'(y)$ có hai nghiệm phân biệt khi $m \neq 0 \hat{P} \quad f(y_1) \neq f(y_2) < 0 \hat{U} \quad m^2(4 - m^2) < 0$.

Vậy $\begin{cases} m \neq 0 \\ m^2(4 - m^2) < 0 \end{cases} \hat{U} \quad m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

ĐỀ SỐ 32

Câu 1. Đặt $z = x - 1$, hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} yz = z + 2 \\ y^3 - 3y(z + 2) + 4z^3 = 0 \end{cases} \hat{U} \begin{cases} yz = z + 2 \\ y^3 - 3y^2z + 4z^3 = 0 \end{cases} \hat{U} \begin{cases} yz = z + 2 \\ \frac{y}{z} = -z \\ \frac{y}{z} = 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \\ y = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \hat{U} \begin{cases} z = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \\ y = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \\ y = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \hat{U} \begin{cases} z = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \\ y = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Câu 2. Từ giả thiết suy ra $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét $f(x) = \frac{3x+4}{2x+1} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2(2x+1)}$ với $x > 0$;

$$f'(x) = \frac{-5}{(2x+1)^2} < 0, \forall x > 0$$

Ta có $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$$f(x) > \frac{3}{2}, \forall x > 0 \quad f(x) - 4 = \frac{-5x}{2x+1}, \forall x > 0 \hat{P} \quad \frac{3}{2} < u_n < 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

và

Suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Đặt $\begin{cases} x_n = u_{2n-1} \\ y_n = u_{2n} \end{cases}$. Do $f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên $g(x) = f(f(x))$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$f(x_n) = f(u_{2n-1}) = u_{2n} \quad f(y_n) = f(u_{2n}) = u_{2n+1} = x_{n+1} \quad g(x_n) = f(f(x_n)) = f(y_n) = x_{n+1}$$

$$u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{11}{4}; u_3 = \frac{49}{26}; \dots$$

Ta thấy $u_1 < u_3 \wedge x_1 < x_2$.

Giả sử rằng $x_k < x_{k+1} \wedge g(x_k) < g(x_{k+1}) \wedge x_{k+1} < x_{k+2}$.

Vậy $x_n < x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra (x_n) tăng và bị chặn, do đó (x_n) có giới hạn a .

Do $x_n < x_{n+1} \wedge f(x_n) > f(x_{n+1}) \wedge y_n > y_{n+1} \wedge (y_n)$ giảm và bị chặn dưới. Suy ra (y_n) tăng và bị chặn, do đó (y_n) có giới hạn b .

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x_n, y_n \in \left(\frac{1}{2}; 4\right) \\ f(x_n) = y_n \\ f(y_n) = x_n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a, b \in \left(\frac{1}{2}; 4\right) \\ f(a) = b \\ f(b) = a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a, b \in \left(\frac{1}{2}; 4\right) \\ f(a) = b \\ f(b) - f(a) = b - a \end{cases} \quad (I) \end{array}$$

Ta có

$$(I) \Leftrightarrow a - b = \frac{5a-1}{2(2b+1)} - \frac{1}{2a+1} \Leftrightarrow (a-b)(2a+1)(2b+1) - 5 = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$(2a+1)(2b+1) > (3+1)(3+1) = 16 > 5$$

do

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ a = \frac{3a+4}{2a+1} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2$$

Vậy từ

$$\lim u_n = 2$$

Vậy

Câu 3. Bất phương trình cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{yz}} + \sqrt{\frac{1}{y} + \frac{1}{zx}} + \sqrt{\frac{1}{z} + \frac{1}{xy}} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \quad (*)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{yz}} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{yz}}$$

Ta chứng minh

Ta có

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{yz}} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{yz}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{yz}} \geq \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{yz} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} \geq \frac{2}{\sqrt{yz}} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{yz}}$$

(bất đẳng thức cuối đúng).

$$\sqrt{\frac{1}{y} + \frac{1}{zx}} \geq \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{zx}}; \sqrt{\frac{1}{z} + \frac{1}{xy}} \geq \frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

Chứng minh tương tự, ta có

Cộng theo vế ba bất đẳng thức lại ta được (*).

Câu 4. Ta chứng minh $S_{EHK} = S_{FHK}$.

Ta có $\angle MAC = \angle MBC = \alpha$;

$$S_{EHK} = \frac{1}{2} \cdot KH \cdot KE \cdot \sin \angle BKH$$

$$= \frac{1}{2} \cdot KH \cdot KA \cdot \tan \alpha \cdot \sin \angle BAH$$

$$= \frac{1}{2} \cdot KH \cdot AB \cdot \cos A \cdot \tan \alpha \cdot \cos \beta$$

$$S_{FHK} = \frac{1}{2} \cdot HF \cdot HK \cdot \sin \angle FHK$$

$$= \frac{1}{2} \cdot BH \cdot \tan \alpha \cdot HK \cdot \sin \angle AHK = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \tan \alpha \cdot \cos \beta \cdot KH \cdot \cos A$$

$$\Rightarrow S_{EHK} = S_{FHK}$$

Suy ra E, F cách đều HK ; mà E, F nằm về hai phía của HK . Do đó trung điểm của EF nằm trên đường thẳng HK .

$$P(x)P(x-3) = P(x^2), \quad x \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Câu 5. Ta tìm các đa thức hệ số thực thỏa

+ Trường hợp $P(x) \equiv C$ (C là hằng số thực);

$$P(x) \equiv C \quad \Leftrightarrow C^2 = C \quad \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ C = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow P(x) \equiv 0 \quad \text{hoặc} \quad MAC = MBC = \alpha.$$

thỏa (1)

+ Trường hợp $\deg P \geq 1$

Gọi α là một nghiệm phức tùy ý của $P(x)$.

Từ (1) thay x bằng α ta có $P(\alpha^2) = 0$ $\Rightarrow x = \alpha^2$ cũng là nghiệm của $P(x)$.

Từ đó ta có $\alpha; \alpha^2; \alpha^4; \dots; \alpha^{2^k}; \dots \in K$ là các nghiệm của $P(x)$. Mà $P(x)$ chỉ có hữu hạn nghiệm nên

$$\begin{cases} |\alpha| = 0 \\ |\alpha| = 1 \end{cases} \quad (I)$$

Từ (I) ta lại thay x bằng $\alpha + 3$ ta có $P((\alpha + 3)^2) = 0$ $\Rightarrow x = (\alpha + 3)^2$ cũng là nghiệm của $P(x)$.

Từ đó ta có $\alpha + 3; (\alpha + 3)^2; (\alpha + 3)^4; \dots; (\alpha + 3)^{2^k}; \dots \in K$ là các nghiệm của $P(x)$. Mà $P(x)$ chỉ có hữu hạn nghiệm nên

$$\begin{cases} |\alpha + 3|^2 = 0 \\ |\alpha + 3|^2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha + 3| = 0 \\ |\alpha + 3| = 1 \end{cases} \quad (II)$$

Như vậy, nếu α là nghiệm của $P(x)$ thì α thỏa mãn hệ (I) và (II).

Biểu diễn các số phức α thỏa mãn hệ (I) và (II) trên mặt phẳng phức ta có hệ (I) và (II) không có nghiệm α . Suy ra không tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc lớn hơn hoặc bằng 1 thỏa mãn (1).

Vậy các đa thức thỏa mãn yêu cầu bài toán gồm $P(x) = 0; P(x) = 1$.

ĐỀ SỐ 33

Câu 1. Đặt $t_i = x_i + 3 \quad (i = \overline{1, n})$. Ta có

$$\begin{array}{c} \left. \begin{array}{l} t_i^3 = 0, i = \overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^n (t_i - 3) = n \\ \sum_{i=1}^n (t_i - 3)^2 = 0 \end{array} \right\} \hat{U} \left\{ \begin{array}{l} t_i^3 = 0, i = \overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^n t_i = 4n \\ \sum_{i=1}^n t_i^3 - 9 \sum_{i=1}^n t_i^2 + 27 \sum_{i=1}^n t_i - 27n = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\hat{U} \left\{ \begin{array}{l} t_i^3 = 0, i = \overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^n t_i = 4n \\ \sum_{i=1}^n t_i^3 - 9 \sum_{i=1}^n t_i^2 + \frac{9}{2} \sum_{i=1}^n t_i = 0 \end{array} \right\} \hat{U} \left\{ \begin{array}{l} t_i = 0, t_i = \frac{9}{2}, i = \overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^n t_i = 4n \end{array} \right.$$

Gọi k là số các t_i có giá trị bằng 0 và l là số các t_i có giá trị bằng $\frac{9}{2}$. Khi đó, ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{2}l = 4n \\ k + 1 = n \end{array} \right. \hat{U} \left\{ \begin{array}{l} l = \frac{8n}{9} \\ k = \frac{n}{9} \end{array} \right.$$

+ Khi n không chia hết cho 9, hệ vô nghiệm.

+ Khi $n = 9m$ ($m \in \mathbb{N}^*$), ta có $k = m$, $l = 8m$, hệ có tập nghiệm:

$S = \{(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)\}$ trong đó có m giá trị bằng 0 và có $8m$ giá trị bằng $\frac{9}{2}$.

Hay $S = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\}$ trong đó có m giá trị bằng -3 và có $8m$ giá trị bằng $\frac{3}{2}$.

$$g(x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 2. Xét hàm số

$$g^2(x^2 + g(y)) = y + g^2(x)$$

Từ giả thiết ta có: (1)

Từ (1) suy ra nếu $g(y_1) = g(y_2)$ thì $y_1 = y_2$ suy ra g đơn ánh.

Từ (1) cho $x = 0$ suy ra $g(g(y)) = y + g^2(0)$ tập giá trị của g là $\mathbb{R}$.

Suy ra g là song ánh nên tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $g(a) = 0$.

Cho $x = y = a \Rightarrow g(a^2) = a \Rightarrow g(a) = g(g(a^2)) = a^2 + g^2(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$;

Do đó $g(g(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$; $y = 0 \Rightarrow g(x^2) = g^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$;

Suy ra $x^3 = 0$ thì $g(x)^3 = 0$ và $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Cho $x = 1 \Rightarrow g(1) = 1$. Với $x^3 = 0, y \in \mathbb{R}$; ta có:

$$g(x+y) = g\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 + g(g(y))\right) = g(y) + g\left(\sqrt{x}\right)^2 = g(y) + g(x)$$

Lấy x tùy ý thuộc $\mathbb{R}$, khi đó trong 2 số $x; -x$ luôn có số không âm, ta có:

$$0 = g(x + (-x)) = g(x) + g(-x) \Rightarrow g(-x) = -g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Với $x < 0, y \in \mathbb{R}$, ta có:

$$g(x+y) = -g(-x-y) = -(g(-x) + y(-y)) = g(x) + g(y)$$

Vậy $g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có g cộng tính trên $\mathbb{R}$ và $g(1) = 1 \Rightarrow g(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Cho $x > y$. Khi đó, $g(x-y) > 0$ và

$$g(x) = g(x-y+y) = g(x-y) + g(y) > g(y)$$

Suy ra g là hàm tăng thực sự trên $\mathbb{R}$.

Ta chứng minh $g(x) = x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sao cho $g(x_0) \neq 0$. Khi đó xảy ra 2 trường hợp

Trường hợp 1: $x_0 < g(x_0) \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} : x_0 < r < g(x_0) \Rightarrow g(x_0) < g(r) = r$ (vô lý).

Trường hợp 2: $x_0 > g(x_0) \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} : x_0 > r > g(x_0) \Rightarrow g(x_0) > g(r) = r$ (vô lý).

Vậy $g(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $f(x) = \frac{x}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Câu 3. Gọi $l_1, l_2, l_3, \dots, l_s$ là các ước lẻ của n và 2^m là lũy thừa lớn nhất của 2 trong khai triển của n ($s^3 \leq m^3 \leq 0$) .

Từ đó các ước của n là $l_1, l_2, l_3, K, l_s, 2l_1, 2l_2, 2l_3, K, 2l_s, K, 2^m l_1, 2^m l_2, 2^m l_3, K, 2^m l_s$.

Theo đề bài ta có:

$$l_1 + l_2 + K + l_s + 2l_1 + 2l_2 + K + 2l_s + K + 2^m l_1 + 2^m l_2 + K + 2^m l_s + (m+1)s = 2n+1$$

$$\hat{U} (l_1 + l_2 + L + l_s)(1+2+2^2+L+2^m) + (m+1)s = 2n+1$$

$$\hat{U} (l_1 + l_2 + L + l_s)(2^{m+1} - 1) + (m+1)s = 2n+1$$

(*)

Nếu s chẵn thì vế trái (*) chẵn (vô lý), suy ra s lẻ.

Với s lẻ, nếu m chẵn thì vế trái (*) cũng chẵn (vô lý), suy ra m lẻ $(m = 2t+1)$;

Suy ra $\frac{n}{2^m}$ có số ước lẻ.

Số $\frac{n}{2^m} = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot K \cdot p_m^{k_m}$ có số ước là $(k_1+1)(k_2+1)K(k_m+1) \vdash k_i$ chẵn $\overline{1, m}$.

Suy ra $\frac{n}{2^m}$ là số chính phương hay $n = 2^{2t+1} r^2 \vdash \frac{n}{2} = (2^t r)^2, (t, r \in \mathbb{N})$.

Câu 4.

Cách 1: Do $AD^2 = AM \cdot AB = AN \cdot AC$ nên phép nghịch đảo $P_A^{AD^2}$ biến $B \leftrightarrow M, C \leftrightarrow N, D \leftrightarrow D, (C_1) \leftrightarrow (C_1), (C_2) \leftrightarrow (C_2)$. Đường tròn (C) đi qua điểm A, B, C biến thành đường thẳng MN .

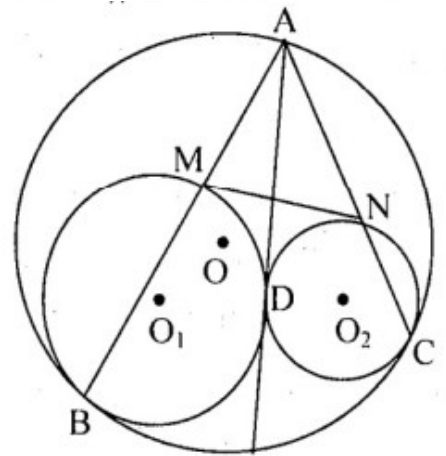
Do (C_1) và (C_2) tiếp xúc với (C) tại B, C nên MN là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn này.

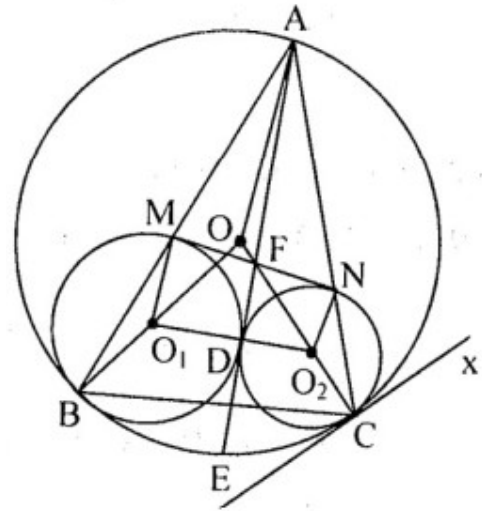
Gọi F là giao điểm của AE và MN . Suy ra F biến thành E và

$$FD = FM = FN = \frac{MN}{2}$$

$$\text{Ta có } \frac{DE}{DF} = \frac{AD^2}{AD \cdot AF} = \frac{AD}{AF} \vdash DE \cdot AF = DF \cdot DA \vdash \frac{1}{DE} = \frac{AF}{DF \cdot DA}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{DA} + \frac{1}{DE} = \frac{1}{DA} + \frac{AF}{DF \cdot DA} = \frac{DF + AF}{DA \cdot DF} = \frac{DA}{DA \cdot DF} = \frac{1}{DF} = \frac{2}{MN}$$





Bảng có đúng 18 dấu “ - ” $\ddot{U} \ 2012p + 2012q - 2pq = 18$

$$\hat{U} \ 1006p + 1006q - pq = 9 \hat{U} \ (p - 1006)(q - 1006) = 1006^2 - 3^2 = 1003.1009$$

(1)

$$p \ (p - 1006)(q - 1006) \equiv 1003.1009$$

Mà 1009 là số nguyên tố nên ta phải có $(p - 1006) \equiv 1009$ hoặc $(q - 1006) \equiv 1009$ (2)

Ta có $p - 1006, q - 1006 \in \{-1006, -1005, \dots, 1005, 1006\}$ nên (2) mâu thuẫn với (1).
 $\hat{U} \begin{cases} p - 1006 = 0 \\ q - 1006 = 0 \end{cases}$

Vậy bảng không thể có đúng 18 dấu “-”.

ĐỀ SỐ 34

Câu 1. Đặt $\sqrt[3]{y^3 + 2z^3} = a$; $\sqrt[3]{z^3 + 2x^3} = b$; $\sqrt[3]{x^3 + 2y^3} = c$ với $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$.

$$\begin{cases} y^3 + 2z^3 = a^3 \\ z^3 + 2x^3 = b^3 \\ x^3 + 2y^3 = c^3 \end{cases} \hat{U} \begin{cases} x^3 = \frac{-2a^3 + 4b^3 + c^3}{9} \\ y^3 = \frac{-2b^3 + 4c^3 + a^3}{9} \\ z^3 = \frac{-2c^3 + 4a^3 + b^3}{9} \end{cases}$$

Ta có

Sử dụng bất đẳng thức

+) $9(u^3 + 2v^3)^3 (u + 2v)^3, "u, v > 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u = v$.

+) $\frac{t^3}{u} + \frac{u^3}{v} + \frac{v^3}{t} \geq t^2 + u^2 + v^2, "u, v, t > 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u = v = t$.

+) $3(t^2 + u^2 + v^2)^3 (t + u + v)^2, "t, u, v$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u = v = t$.

$$A^3 \left(\frac{1}{9\sqrt[3]{9}} \frac{2a^3 + 4b^3 + c^3}{a} + \frac{-2b^3 + 4c^3 + a^3}{b} + \frac{-2c^3 + 4a^3 + b^3}{c} \right)$$

Suy ra

$$= \frac{1}{9\sqrt[3]{9}} \left(\frac{2a^3}{a} + \frac{c^3}{b} + \frac{a^3}{c} + \frac{4b^3}{b} + \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} \right) 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\geq \frac{1}{9\sqrt[3]{9}} (b^2 + c^2 + a^2) + (c^2 + a^2 + b^2) - 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= \frac{1}{9\sqrt[3]{9}} 3.(a^2 + b^2 + c^2)^3 \frac{1}{9\sqrt[3]{9}} (a + b + c)^2 = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$$

$$A^3 \geq \frac{\sqrt[3]{3}}{3} \quad x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

Do đó . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi .

$$\min A = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$$

Vậy .

Câu 2. Từ cách xác định của dãy (a_n) , dễ dàng suy ra $a_n > 0, \forall n \geq 1$.

Giả sử khi $n \rightarrow +\infty$ thì dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn, đặt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, từ hệ thức truy hồi đã cho, suy ra

$$L = \frac{2L+3}{4L^2} \Leftrightarrow 4L^3 - 2L - 3 = 0 \quad (1)$$

L là nghiệm không âm của phương trình

Khảo sát hàm số $f(x) = 4x^3 - 2x - 3$ trên $\mathbb{R}$, ta thấy phương trình (1) có đúng một nghiệm

Trên $\mathbb{R}$. Vì $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) \cdot f(2) = -25 < 0$ nên $0 < L < 2$ (2).

Ta chứng minh $a_{2n-1} < a_{2n+1}, \forall n \geq 1$.

Ta có $a_1 = 2 < \frac{428}{49} = a_3$, do đó khẳng định đúng với $n = 1$.

Giả sử khẳng định đúng với mọi n từ 1 đến k , ta chứng minh $a_{2k+1} < a_{2k+3}$.

$$a_{2k} = \frac{1}{2a_{2k-1}} + \frac{3}{4a_{2k-1}^2} > \frac{1}{2a_{2k+1}} + \frac{3}{4a_{2k+1}^2} = a_{2k+2}$$

Thật vậy, ta có:

$$\text{P} \quad a_{2k+1} = \frac{1}{2a_{2k}} + \frac{3}{4a_{2k}^2} < \frac{1}{2a_{2k+2}} + \frac{3}{4a_{2k+2}^2} = a_{2k+3}$$

Do đó theo nguyên lý Quy nạp khẳng định được chứng minh.

Như thế ta có $2 = a_1 < a_3 < \dots < a_{2k+1} < \dots$ chứng tỏ dãy con (a_{2n+1}) là dãy tăng và bị chặn dưới bởi 2, từ đó

$$\text{suy ra } L \geq 2, \text{ mâu thuẫn với (2)}$$

Vậy khi $n \rightarrow +\infty$ thì dãy (a_n) không có giới hạn hữu hạn.

Câu 3. Ký hiệu các điểm $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ như hình vẽ.

Gọi H là trực tâm tam giác ABC .

$$AA_1A_2 = AA_2A_1 = BB_1B_2 = BB_2B_1 = CC_1C_2 = CC_2C_1 = a$$

Đặt

Từ giả thiết, ta có H, X_1 nằm cùng phía với đường thẳng BC .

$$\text{P } \angle HBX_1 = \angle HX_1C = 90^\circ - \alpha$$

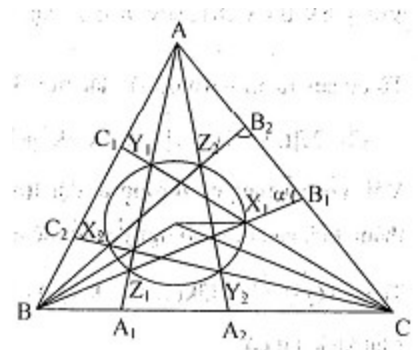
P Bốn điểm B, C, H, X_1 cùng thuộc một đường tròn.

Gọi H_a là điểm đối xứng với H qua BC , dễ thấy H_a thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Do đó đường tròn ngoại tiếp các $\triangle HBC, \triangle HBX_1$ và $\triangle ABC$ có cùng bán kính R .

Áp dụng định lý Sin cho $\triangle HBX_1$, ta có $HX_1 = 2R \sin(90^\circ - \alpha) = 2R \cos \alpha$.

Tương tự $HX_2 = HY_1 = HY_2 = HZ_1 = HZ_2 = 2R \cos \alpha$.

Vậy $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ cùng thuộc đường tròn tâm H cố định, bán kính $2R \cos \alpha$.



Câu 4. Nhận xét: Với mọi số nguyên dương n thì $n^3 \equiv 0; 1; 6 \pmod{7}$.

Giả sử tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn bài toán.

Nếu $x > 7, y > 7$ thì từ phương trình suy ra $n^3 \equiv 3 \pmod{7}$, vô lý.

Do đó, không mất tính tổng quát, giả sử $x \leq 6$. Ta có các trường hợp sau:

+) Nếu $x = 1$ thì $y! + 4 = n^3$. Với $y \geq 7$ thì suy ra $n^3 \equiv 4 \pmod{7}$, vô lý, do đó $y \leq 6$. Kiểm tra trực tiếp ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn.

+) Nếu $x = 2$ thì $y! + 5 = n^3$. Với $y \geq 7$ thì suy ra $n^3 \equiv 5 \pmod{7}$, vô lý, do đó $y \leq 6$. Kiểm tra trực tiếp ta có $y = 5, n = 5$ thỏa mãn.

+) Nếu $x = 3$ thì $y! + 9 = n^3$. Với $y \geq 7$ thì suy ra $n^3 \equiv 2 \pmod{7}$, vô lý, do đó $y \leq 6$. Kiểm tra trực tiếp ta có $y = 6, n = 9$ thỏa mãn.

+) Nếu $x = 5$ thì $y! + 123 = n^3$. Với $y \geq 7$ thì suy ra $n^3 \equiv 4 \pmod{7}$, vô lý, do đó $y \leq 6$. Kiểm tra trực tiếp ta có $y = 2, n = 5$ thỏa mãn.

+) Nếu $x = 6$ thì $y! + 723 = n^3$. Với $y \geq 7$ thì suy ra $n^3 \equiv 2 \pmod{7}$, vô lý, do đó $y \leq 6$. Kiểm tra trực tiếp ta có $y = 3, n = 9$ thỏa mãn.

+) Nếu $x = 4$ thì $y! + 27 = n^3$.

Với $y^3 \equiv 9 \pmod{27}$ thì $y! \equiv 1 \pmod{27}$, suy ra $n \equiv 1 \pmod{27}$, đặt $n = 3m, m \in \mathbb{N}^*$, khi đó ta có $\frac{y!}{27} = m^3 - 1$.

Từ đó suy ra $m \equiv 1 \pmod{3}$, đặt $m = 3k + 1, k \in \mathbb{N}^*$, ta có $y! = 27(3k + 1)^3 - 1 = 243k^3 + 3k^2 + 1$.

Với mỗi số nguyên dương a , đặt $f(a)$ là số mũ của 3 trong dạng phân tích tiêu chuẩn của a thành tích các thừa số nguyên tố, dễ có $f(a) \leq \log_3 a$.

Ta có $f(y!) = f(243k(3k^2 + 3k + 1)) = 5 + f(k) \leq 5 + \log_3 k$.

Mặt khác lại có

$$f(y!) = \frac{243k(3k^2 + 3k + 1)}{3} + \frac{243k(3k^2 + 3k + 1)}{3^2} + \frac{243k(3k^2 + 3k + 1)}{3^3} + \dots > \frac{243k(3k^2 + 3k + 1)}{3} \\ 81k(3k^2 + 3k + 1) > 5 + \log_3 k, "k \geq 1, \text{ mâu thuẫn.}$$

Do vậy $y \leq 8$, kiểm tra trực tiếp ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn.

Vậy tất cả các bộ số thỏa mãn bài toán là $(x; y; n) = (2; 5; 5), (5; 2; 5), (6; 3; 9), (3; 6; 9)$.

Câu 5. a) Không mất tính tổng quát, ta coi các bóng đèn được xếp thành một hàng ngang cách đều nhau.

Gọi O là điểm chính giữa $A_1 A_n$.

Ta chứng minh nếu $n - 2^m, m \in \mathbb{N}^*$ thì sau $n - 1 = 2^m - 1$ bước các bóng đèn đều bật bằng phương pháp quy nạp theo m .

Dễ thấy mệnh đề đúng với $m = 1, m = 2$.

Giả sử mệnh đề đúng đến m , ta chứng minh mệnh đề đúng với $m + 1$.

Thật vậy, giả sử $k = \frac{n}{2} = 2^m$ bóng đèn bên trái $A_1, A_2, \dots, A_k$ đều bật sau $k - 1$ bước. Để ý rằng k bóng đèn bên phải $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ không thay đổi trạng thái trong suốt $k - 1$ bước ban đầu. Đến bước thứ k , tất cả các bóng đèn đều tắt trừ hai bóng chính giữa A_k, A_{k+1} được bật. Sau bước này, do tính đối xứng, các bóng đèn đối xứng qua tâm O đều có cùng trạng thái.

Xét k bóng đèn bên phải $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$, sau bước thứ k , chỉ có A_{k+1} bật còn các bóng khác đều tắt.

Trạng thái này trùng với trạng thái ban đầu k bóng bên trái $A_1, A_2, \dots, A_k$. Như vậy, sau bước thứ

$k + j$, dãy k bóng đèn bên phải $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ trùng trạng thái với dãy k bóng đèn bên trái

$A_1, A_2, \dots, A_k$ j $k + (k - 1) = n - 1$ k

$A_1, A_2, \dots, A_k$ và sau j bước. Theo giả thiết quy nạp, sau bước thứ $k + (k - 1) = n - 1$, tất cả k bóng đèn bên phải $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ đều bật. Do tính chất đối xứng qua tâm O , k bóng đèn bên trái $A_1, A_2, \dots, A_k$ cũng đều bật. Như vậy, tất cả n bóng đèn đều bật sau bước thứ $n - 1$. Phép chứng minh quy nạp được hoàn tất.

b) Ta chứng minh, nếu $n = 2^m + 1$, $m \in \mathbb{N}^*$ thì ở mọi thời điểm, các bóng đèn không thể có cùng trạng thái.

Lập luận tương tự như phần a), ta thấy, trong suốt $n - 2 = 2^m - 1$ bước ban đầu, không thể có thời điểm nào mà các bóng đèn $A_1, A_2, \dots, A_n$ có cùng trạng thái.

Sau bước thứ $n - 1 = 2^m$, chỉ có hai bóng đèn A_{n-1} và A_n bật, các bóng còn lại đều tắt. Khi đó, dãy $(A_n, A_{n-1}, \dots, A_2, A_1)$ trùng trạng thái với dãy $(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n)$ sau bước thứ nhất.

Như vậy, trạng thái của dãy $(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n)$ sau bước thứ j trùng với trạng thái của dãy $(A_n, A_{n-1}, \dots, A_2, A_1)$ sau bước $n - 2 + j$.

Vậy trạng thái của dãy $(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n)$ là tuần hoàn với chu kỳ nhỏ nhất là $2(n - 2)$, trong mỗi chu kỳ, không tồn tại thời điểm mà tất cả các bóng đèn có cùng trạng thái. Từ đó, tại mọi thời điểm, tất cả các bóng đèn không thể cùng bật hoặc cùng tắt. Suy ra điều phải chứng minh.

ĐỀ SỐ 35

$$D = j$$

Câu 1. a) TXĐ: .

$$y' = 3x^2 - 6x + m \quad y' = 6x - 6 \quad y' = 0 \quad \Leftrightarrow x = 1$$

;

Bảng biến thiên

$$(2; +\infty) \quad y' < 0, \quad x > 2 \quad m^3 > 0$$

Từ bảng biến thiên suy ra nếu hàm số đồng biến trên .

$$m^3 > 0 \quad y' > 0, \quad x > 0 \quad (2; +\infty)$$

Ngược lại ta thấy hàm số đồng biến trên .

$$m^3 > 0$$

Vậy .

$$D = \mathbb{R}$$

b) TXĐ: $\mathbb{R}$.

$$y = 3\cos x + 4\sin x + m \quad (x)$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow m = -4$$

Nếu hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{2}$.

$$m = -4 \Rightarrow y = 3\cos x - 4\sin x - 4 \Rightarrow y' = -3\sin x + 4\cos x \Rightarrow y'' = -3\cos x - 4\sin x \Rightarrow y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 < 0$$

Ngược lại: nếu $x = \frac{3\pi}{2}$; $m = -4$;

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m = -4$$

nên hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{2}$ loại.

$$y = \cos^2 x - \sin^2 \frac{3x}{4} \cdot \cos x - 1 - \sin^2 \frac{3x}{4}$$

Câu 2. a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

$$\cos^2 x - \sin^2 \frac{3x}{4} \cdot \cos x - 1 - \sin^2 \frac{3x}{4} = 0$$

nghiệm phương trình

$$\cos^2 x - 1 - \sin^2 \frac{3x}{4} \cdot (\cos x + 1) = 0 \Rightarrow (\cos x + 1) \left(\cos x - 1 - \sin^2 \frac{3x}{4} \right) = 0$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

Trường hợp 1:

$$\cos x = 1 + \sin^2 \frac{3x}{4} \quad \begin{cases} \cos x \leq 1, \forall x \\ 1 + \sin^2 \frac{3x}{4} \geq 1, \forall x \end{cases}$$

Trường hợp 1: Do

$$\Rightarrow (2) \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ 1 + \sin^2 \frac{3x}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin \frac{3x}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{4l\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x = 4m\pi (m \in \mathbb{Z})$$

$$A_k(p+k2p; 0), B_m(m4p; 0) (k, m \in \mathbb{Z})$$

Vậy

$$\begin{cases} x^3 - 3x = \sqrt{(y-1)^3} - \sqrt{9(y-1)} & (1) \\ 1 + \sqrt{x-1} = \sqrt{y-1} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện: } x, y \geq 1. \text{ Từ (2)} \Rightarrow \sqrt{y-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 2$$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^3 - 3x = (\sqrt{y-1})^3 - 3\sqrt{y-1} \quad (3)$$

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = 3x^2 - 3 \geq 0, \forall x \geq 1; f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [1; +\infty) \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } [1; +\infty)$$

$$\text{Mà (3) có } \begin{cases} f(x) = f(\sqrt{y-1}) \\ x, \sqrt{y-1} \in [1; +\infty) \end{cases} \text{ nên (3) } \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1}$$

$$\text{Với } x = \sqrt{y-1} \text{ thay vào (2) ta được } x=1 \text{ và } x=2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$$

Câu 3:

$$a) (1+x)^{2012} = C_{2012}^0 + xC_{2012}^1 + x^2C_{2012}^2 + \dots + x^kC_{2012}^k + \dots + x^{2012}C_{2012}^{2012}, \forall x \quad (1)$$

Đạo hàm 2 vế của (1) ta có:

$$2012(1+x)^{2011} = C_{2012}^1 + 2xC_{2012}^2 + \dots + kx^{k-1}C_{2012}^k + \dots + 2012x^{2011}C_{2012}^{2012}, \forall x \quad (2)$$

Chọn $x = -2$ thay vào (2) ta được:

$$2012(1-2)^{2011} = C_{2012}^1 + 2(-2)C_{2012}^2 + \dots + k(-2)^{k-1}C_{2012}^k + \dots + 2012(-2)^{2011}C_{2012}^{2012}$$

$$\Leftrightarrow -2012 = C_{2012}^1 - 2.2C_{2012}^2 + 3.2^2C_{2012}^3 - 4.2^3C_{2012}^4 + \dots + 2011.2^{2010}C_{2012}^{2011} - 2012.2^{2011}C_{2012}^{2012}$$

$$\Rightarrow A = -2012$$

$$b) \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 < \cos x < 1 \Rightarrow \cos x > \cos^2 x$$

$$\text{Ta chứng minh: } \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin^3 x \cdot \cos^{-1} x > x^3, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sin^3 x \cdot \cos^{-1} x - x^3 > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Từ

$$f(x) = \sin^3 x \cdot \cos^{-1} x > x^3, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Xét hàm số:

$$f'(x) = 3\sin^2 x + \cos^{-2} x \cdot \sin^4 x - 3x^2$$

$$f''(x) = 3\sin 2x + 2\cos^{-3} x \cdot \sin^5 x + 4\cos^{-1} x \cdot \sin^3 x - 6x$$

$$f'''(x) = 6\sin^2 x + 6\cos^{-4} x \cdot \sin^6 x + 14\cos^{-2} x \cdot \sin^4 x \geq 0, \forall x$$

$$f'''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

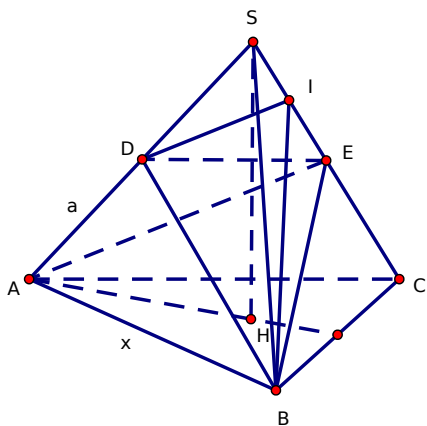
$$\Rightarrow f''(x) \text{ đồng biến trên } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ nên } \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ ta có } f''(x) \geq f''(0) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ đồng biến trên } \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ ta có } f'(x) \geq f'(0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ ta có } f(x) \geq f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x \cdot \cos^{-1} x - x^3 > 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Câu 4:



a)

Gọi I là trung điểm SE

$\Rightarrow$ DI là đường trung bình của $\triangle SAE$

$$\Rightarrow DI \parallel AE \text{ và } DI = \frac{AE}{2}$$

Do $BD \perp AE$ nên $BD \perp DI$

Đặt $x = AB$. Theo công thức đường trung tuyến trong tam giác SAB ta có:

$$BD^2 = \frac{SB^2 + AB^2}{2} - \frac{SA^2}{4} = \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{4} = AE^2 = BE^2 \Rightarrow DI^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{4} \right)$$

$$\text{Tương tự: } BI^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{x^2}{4}$$

$$\text{Do } BD \perp DI \Rightarrow \triangle BDI \text{ vuông tại D} \Rightarrow BI^2 = BD^2 + DI^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

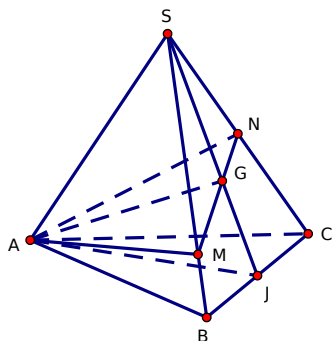
Gọi H là tâm $\triangle ABC$. Do SABC là chóp đều nên $SH \perp (ABC)$

Suy ra: SH là đường cao của hình chóp

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6}$$

$$2AH = \frac{CB}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AH = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$$\text{Thể tích khối chóp SABC là: } V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3 \sqrt{21}}{54}$$



b)

Gọi J là giao điểm của SG và BC $\Rightarrow$ J là trung điểm của BC

$$\Rightarrow S_{\triangle ABJ} = S_{\triangle ACJ} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} \Rightarrow V_{SABJ} = V_{SACJ} = \frac{1}{2} V_{SABC} = \frac{V}{2}$$

$$\text{Đặt: } x = \frac{SM}{SB}, y = \frac{SN}{SC} \quad (x, y \in (0;1])$$

$$\frac{V_{SAMG}}{V_{SABJ}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SG}{SJ} = \frac{2x}{3} \Rightarrow V_{SAMG} = \frac{V}{2} \cdot \frac{2x}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{nên ta có} \quad f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x \cdot \cos^{-1} x - x > 0 \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Câu 4. Gọi I là trung điểm SE

$\Rightarrow DI$ là đường trung bình tam giác SAE.

$$\Rightarrow DI \parallel AE; DI = \frac{AE}{2}$$

$$\text{Do } BD \perp AE \Rightarrow BD \perp DI.$$

Gọi $x = AB$ theo công thức đường trung tuyến trong $\triangle SAB$ ta có:

$$BD^2 = \frac{SB^2 + AB^2}{2} - \frac{SA^2}{4} = \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{4} = AE^2 = BE^2$$

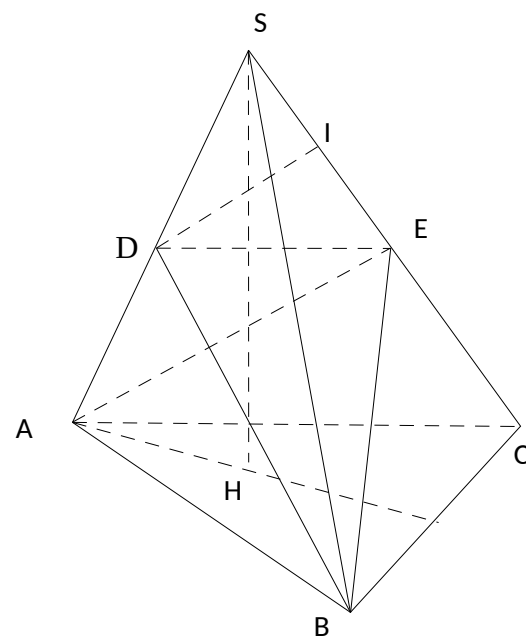
$$\Rightarrow DI^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{4} \right)$$

$$BI^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{x^2}{4}$$

Tương tự

$$\text{Do } BD \perp DI \Rightarrow \triangle BDI \text{ vuông tại } D \Rightarrow BI^2 = BD^2 + DI^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Gọi H là tâm $\triangle ABC$. Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH$ là đường cao của hình chóp.



$$2AH = \frac{BC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AH = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{21}}{54}$.

$$\Rightarrow S_{\Delta ABJ} = S_{\Delta ACJ} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} \Rightarrow V_{S.ABJ} = V_{S.ACJ} = \frac{V}{2}$$

$$\frac{V_{S.AMG}}{V_{S.ABI}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SG}{SJ} = \frac{2x}{3} \Rightarrow V_{S.AMG} = \frac{V}{2} \cdot \frac{2x}{3}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} =_{xy} \Rightarrow V_1 = V_{xy}. (2)$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1}{xy} \leq \frac{9}{4}$$

$$x = y = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{9}{4}$$

bảng 4 .

Câu 5. Giả sử

$$\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+yz} \quad \forall y, z > 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (1+zy)(2+2z+2y+z^3+y^3) \geq (1+zy+z+y)^2 \\
&\Leftrightarrow 2(z+y)(1+zy) + 2 + 2zy + (1+zy)(y-z)^2 + 2zy(1+yz) \geq (1+zy)^2 + 2(z+y)(1+zy) + (z+y)^2 \\
&\Leftrightarrow (1+zy)(y-z)^2 + 2 + 4yz + 2y^2z^2 - (1+yz)^2 - (y-z)^2 - 4yz \geq 0 \\
&\Leftrightarrow yz(y-z)^2 + (1-yz)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Dấu

“=” xảy ra khi $z=y=1$.

$$\Rightarrow P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+yz} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x^2+x+1}{(1+x)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{(1+x)^2} (x \in [1; +\infty)); f'(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^4} \geq 0 \forall x \geq 1.$$

Xét

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=1 \in [1; +\infty) \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } [1; +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(1) = \frac{3}{4} \forall x \geq 1.$$

$$\Rightarrow P \geq f(x) \geq \frac{3}{4} \quad \text{Khi } x=y=z \quad \text{thì } P = \frac{3}{4} \quad \text{nên GTNN của } P = \frac{3}{4}.$$

ĐỀ SỐ 34

Câu 1: a) Khi $m=0$, hàm số là $y = x^3 - 3x$ (C). Gọi $M(x_0; x_0^3 - 3x_0)$.
 (d) M tiếp tuyến tại M có phương trình: $y = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0$ (1)

$$\Leftrightarrow |x_0| = 2 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$$

Khoảng cách từ M đến trục tung bằng 2.

Nếu $x_0 = 2$, phương trình (1) có dạng: $y = 9x - 16$ (d_1).

Nếu $x_0 = -2$, phương trình (1) có dạng: $y = 9x + 16$ (d_2).

Vậy có hai tiếp tuyến là (d_1) và (d_2) thỏa mãn yêu cầu.

(Δ)

b) Hoàn chỉnh giao điểm của đồ thị hàm số (1) và là nghiệm phương trình:

$$x^3 + 2mx^2 - 3x = 2mx - 2 \Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 - (2m+3)x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[x^2 + (2m+1)x - 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 + (2m+1)x - 2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(Δ)
 Vậy và đồ thị hàm số (1) cắt nhau tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 + 8 > 0 \\ 1 + 2m + 1 - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, ba giao điểm là A có hoành độ là 1 và $B(x_1; 2mx_1 - 2), C(x_2; 2mx_2 - 2)$ trong đó x_1, x_2 là nghiệm phương trình (2) nên $x_1 + x_2 = -2m - 1, x_1 x_2 = -2$.

Tam giác OBC có diện tích $S = \frac{1}{2} BC \cdot d$, trong đó $d = d(O; \Delta) = \frac{2}{\sqrt{1+4m^2}}$

$$BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (2mx_2 - 2mx_1)^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] (4m^2 + 1)$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{[(2m+1)^2 + 8] (4m^2 + 1)} \Rightarrow s = \sqrt{(2m+1)^2 + 8}$$

$$\Rightarrow S = 3 \Leftrightarrow 9 = 4m^2 + 4m + 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \text{ (TM)} \end{cases} \quad \text{Vậy } m = -1.$$

Câu 2: a) Điều kiện $\cos x \neq 0$

$$\frac{\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + \sqrt{3}}{\cos x} = 4 \cos 4x$$

Phương trình đã cho tương đương

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}(2\cos^2 x - 1) + 2\sin x \cos x + \sqrt{3}}{\cos x} = 4 \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos 4x \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos 4x \quad (1)$$

Giải phương trình (1) và đối chiếu điều kiện, kết luận nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{\pi}{30} + \frac{k2\pi}{5}$$

$x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$
 b) Điều kiện:

$$xy + 2 = y\sqrt{x^2 + 2} \Leftrightarrow y(\sqrt{x^2 + 2} - x) = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} - x}$$

Ta có

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + 2} + x \quad (1).$$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ, ta có :

$$(\sqrt{x^2 + 2} + x)^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2x^2 - 4x$$

$$\Leftrightarrow 1 + x\sqrt{x^2 + 2} + 2x + (x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[1 + \sqrt{(x+1)^2 + 2}\right] = (-x)\left[1 + \sqrt{(-x)^2 + 2}\right] \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t(1 + \sqrt{t^2 + 2})$ với $t \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 2} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

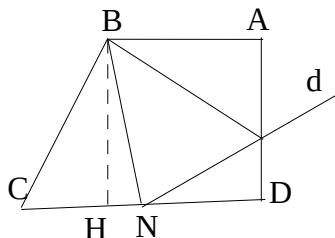
$$f(x+1) = f(-x) \Leftrightarrow x+1 = -x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Mặt khác, phương trình (*) có dạng

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Thay vào (1) ta tìm được . Vậy hệ đã cho có nghiệm là

Câu 3: a) Kẻ $BH \perp CD \Rightarrow ABHD$ là hình vuông và $\angle CBH = \angle MBA \Rightarrow \triangle CBH = \triangle MBA \Rightarrow CB = MB$



Mặt khác, $\angle MBN = \angle CBN = 45^\circ \Rightarrow \triangle CBN = \triangle MBN$

$$d(B; CD) = d(B; MN)$$

Vậy

$$d(B; MN) = \frac{|7 - 2 - 25|}{\sqrt{50}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow BH = \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow BD = BH\sqrt{2} = 4$$

mà

Điểm D thuộc BD , nên $D(x_0; 2)$ và $BD = 4$. Ta có $(x_0 - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ x_0 = -3 \end{cases}$.

Theo giả thiết $x_0 > 0$. Vậy $D(5; 2)$.

Tính được $AB = 5$.

Gọi I là trung điểm AC , ta có $\frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{25}{4} \Rightarrow IA \cdot IB = \frac{25}{2}$.

Mặt khác $IA^2 + IB^2 = AB^2 \Rightarrow IA^2 + IB^2 = 25 \Rightarrow (IA - IB)^2 = IA^2 + IB^2 - 2IA \cdot IB = 0 \Rightarrow IA = IB$

Vậy tam giác ABC vuông cân tại B .

$C \in (P) \Rightarrow C(a; b; -2b)$. Điều kiện để có điểm C là $AB \cdot BC = 0$ và $BC = 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot (a - 1) - 4(b + 2) + 3(-2b - 4) = 0 \\ (a - 1)^2 + (b + 2)^2 + (-2b - 4)^2 = 25 \end{cases}$$

Giải hệ được hai nghiệm $(a; b) = (6; -2); (-4; -2)$. Vậy có hai điểm C thỏa mãn yêu cầu có tọa độ là $(6; -2); (-4; -2)$.

Câu 4. $BC \perp AB; (SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SA$

Mà $SA \perp SB \Rightarrow SA \perp (SBC)$

Gọi d là khoảng cách từ D đến $(SBC) \Rightarrow d = SD \cdot \sin \varphi = \frac{SD}{3}$

Mặt khác: $AD // (SBC) \Rightarrow d(D; (SBC)) = d(A; (SBC))$

$$\Rightarrow d = SA \Rightarrow SA = \frac{SD}{3}$$

Do $AD // BC \Rightarrow AD \perp SA$

Xét $\triangle SAD$ vuông tại A có $AD = 2a$ và

$$SA^2 + AD^2 = SD^2 \Rightarrow AD^2 = 8SA^2 \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

Kẻ $SH \perp AB$ tại $H \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $AB \cdot SH = SA \cdot SB \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{7}}{4}$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot dt(ABCD) = \frac{a^2\sqrt{7}}{3}$$

Ta có $V_{SBCD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{a^2 \sqrt{7}}{6}$. Mà $d(C; (SBD)) = \frac{3V_{SBCD}}{dt(SBD)} \quad (1)$

ΔSBD có $SB = \frac{a\sqrt{14}}{2}, SD = 3SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}, BD = 2a\sqrt{2} \Rightarrow BD^2 = SB^2 + SD^2$

$\Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S $dt(SBD) = \frac{1}{2} SB \cdot SD = \frac{3a^2 \sqrt{7}}{4}$

Thay vào (1) ta có $d(C; (SBD)) = \frac{2a}{3}$

Câu 5. a) Đưa về $I = \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx + \int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x^3+x}}{x^4} dx$

$I_1 = \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = \left. -\frac{\ln(x+1)}{x} \right|_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{\ln 3}{2} + \ln 2 + (\ln|x| - \ln|x-1|) \Big|_1^2 = 3\ln 2 - \frac{3\ln 3}{2}$

$I_2 = \int_1^2 \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$. Đặt $t = \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}} \Rightarrow dt = \frac{2}{3x^3 \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}} dx \Rightarrow -\frac{3}{2} t^2 dt = \frac{1}{x^3} dx$

Đổi cận :

$\begin{cases} x=1 \Rightarrow t = \sqrt[3]{2} \\ x=2 \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \end{cases} \Rightarrow I_2 = -\frac{3}{2} \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{\frac{5}{4}}} t^3 dt$

$I_2 = -\frac{3}{8} t^4 \Big|_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{\frac{5}{4}}} = -\frac{3}{8} \left(\frac{5}{4} \sqrt[3]{\frac{5}{4}} - 2\sqrt[3]{2} \right) \Rightarrow I = 3\ln 2 - \frac{3\ln 3}{2} - \frac{3}{8} \left(\frac{5}{4} \sqrt[3]{\frac{5}{4}} - 2\sqrt[3]{2} \right)$

b) Số cần lập có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$, trong đó luôn có mặt chữ số 6.

Xây ra các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a_1 = 6$. Khi đó, ta chọn 4 chữ số trong 6 chữ số 0;1;2;3;4;5 cho 4 vị trí còn lại $\Rightarrow$ trường hợp này có A_6^4 số

Trường hợp 2: Nếu $a_1 \neq 6$, có 4 cách chọn vị trí của chữ số 6. Khi đó, có 5 cách chọn $a_1 \in \{1;2;3;4;5\}$.

Sau khi chọn a_1 và vị trí cho chữ số 6, còn lại 3 vị trí được chọn từ 4 chữ số còn lại, nên số cách chọn là $A_5^3 \Rightarrow$ trường hợp này có 4.5. A_5^3 số.

Vậy các số thỏa mãn yêu cầu là $A_6^4 + 4.5. A_5^3 = 1560$

Câu 6. Từ giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (1)$

Ta có: $P = (xy + yz + 2xz)^2 - \frac{8}{xy + yz + 2xz}$

$$\Rightarrow P = t^2 - \frac{8}{t+3}$$

Đặt $t = xy + yz + 2xz$

Ta luôn có $0 \leq (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1 + 2(xy + yz + zx)$

$$\Rightarrow (xy + yz + zx) \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow xy + yz + 2zx \geq -\frac{1}{2} + xz \geq -\frac{1}{2} - \frac{x^2 + z^2}{2} = -1 + \frac{y^2}{2} \geq -1$$

Dấu “=” xảy ra $\begin{cases} y=0 \\ x=-z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. Vậy $t \geq -1$

Do đó GTNN của P bằng GTNN của hàm số $f(t) = t^2 - \frac{8}{t+3}$ với $t \geq -1$

$$f(t) = 2t + \frac{8}{(t+3)^2} = 2 \frac{t^3 + 6t^2 + 9t + 4}{(t+3)^2} = \frac{2(t+1)^2(t+4)}{(t+3)^2} > 0, \forall t > -1$$

Ta có

Hàm số $f(t)$ liên tục trên $[-1; +\infty) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[-1; +\infty) \Rightarrow \min_{t \in [-1; +\infty)} f(t) = f(-1) = -3$

ĐỀ SỐ 37

Câu 1. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là :

$$\frac{2x+1}{x+1} = -x+m \Leftrightarrow x^2 - (m-3)x - m-1 = 0 \quad (1)$$

với $x \neq -1$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 13 > 0 \\ 0.m - 3 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{đúng } \forall m)$$

biệt khác -1

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1), ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m-3 \\ x_1 \cdot x_2 = -m-1 \end{cases}$

Giả sử $A(x_1; -x_1 + m), B(x_2; -x_2 + m)$

Khi đó $AB = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2}$

$$PA = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (-x_1 + m - 5)^2} = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2}$$

$$PB = \sqrt{(x_2 - 2)^2 + (-x_2 + m - 5)^2} = \sqrt{(x_2 - 2)^2 + (x_1 - 2)^2}$$

$\Rightarrow \Delta PAB$ cân tại P.

Do đó ΔPAB đều $\Leftrightarrow PA^2 = AB^2$

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 2(x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 4(x_1 + x_2) - 6x_1 \cdot x_2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases} \text{ . Vậy giá trị cần tìm là } m = 1, m = -5$$

Câu 2. a) Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 13 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $(x+2)(\sqrt{x+1} - 2) = \sqrt[3]{2x+1} - 3$

$$(x+2)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} = 2x+1 + \sqrt[3]{2x+1} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t$

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó: Phương trình (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(\sqrt[3]{2x+1}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt[3]{2x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ (x+1)^3 = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^3 - x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x=0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện được nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $x = 0$

b) Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

Ta có hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = 5 \\ (x^2 + 1) \cdot (y^2 - 1) = 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = 5 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right) = 2 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = x + \frac{1}{x} \\ v = y + \frac{1}{y} \end{cases}$

Hệ phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 5 \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 = 9 \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases} (I) \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} u+v=-3 \\ uv=2 \end{cases} (II)$

Ta có $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}; \quad (II) \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ v=-2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-2 \\ v=-1 \end{cases}$

Vì $u = x + \frac{1}{x} \Rightarrow |u| \geq 2$ nên chỉ có $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u=-2 \\ v=-1 \end{cases}$ thỏa mãn

+ $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ y + \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

+ $\begin{cases} u=-2 \\ v=-1 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x + \frac{1}{x} = -2 \\ y + \frac{1}{y} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x;y) là:

$$\left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(-1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(-1; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Câu 3. a) Diện tích đáy là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Gọi G là trọng tâm ΔABC

Gọi E là trung điểm BC

Ta có $\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp A'E \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'E)$

Gọi D là hình chiếu vuông góc của E lên đường thẳng AA'

Do đó $BC \perp DE, AA' \perp DE$

Suy ra DE là khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC

ΔADE vuông tại D $\Rightarrow \sin \angle DAE = \frac{DE}{DA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle DAE = 30^\circ$

Xét $\Delta A'AG$ vuông tại G ta có $A'G = AG \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{3}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'G \cdot S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

b) Gọi B', C', D' lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AB, AC, AD

Ta có: $V_{AGBC} = V_{AGCD} = V_{AGDB} = \frac{1}{3} V_{ABCD} (*)$

Vì $V_{AB'C'D'} = V_{AIB'C'} = V_{AIC'D'} = V_{AID'B'}$ và (*) nên

$\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{AIB'C'}}{3V_{AGBC}} + \frac{V_{AIC'D'}}{3V_{AGCD}} + \frac{V_{AID'B'}}{3V_{AGDB}}$

$\Leftrightarrow \frac{AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD} = \frac{AI \cdot AB' \cdot AC'}{3AG \cdot AB \cdot AC} + \frac{AI \cdot AC' \cdot AD'}{3AG \cdot AC \cdot AD} + \frac{AI \cdot AD' \cdot AB'}{3AG \cdot AD \cdot AB}$

$\Leftrightarrow \frac{AB'}{AB} + \frac{AC'}{AC} + \frac{AD'}{AD} = 3 \cdot \frac{AG}{AI} = 6 \Leftrightarrow \frac{BB'}{AB'} + \frac{CC'}{AC'} + \frac{DD'}{AD'} = 3$

Mặt khác ta có $\frac{BB'}{AB'} = \frac{h_B}{h_A}, \frac{CC'}{AC'} = \frac{h_C}{h_A}, \frac{DD'}{AD'} = \frac{h_D}{h_A}$

Suy ra $\frac{h_B}{h_A} + \frac{h_C}{h_A} + \frac{h_D}{h_A} = 3 \Leftrightarrow h_B + h_C + h_D = 3h_A (**)$

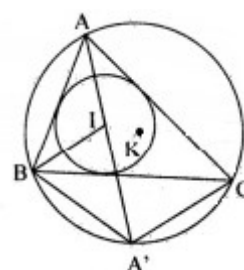
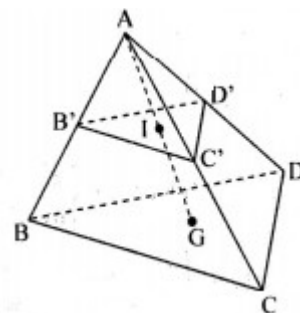
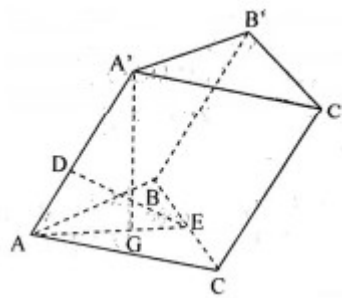
Ta có $(h_B + h_C + h_D)^2 \leq 3(h_B^2 + h_C^2 + h_D^2)$

$(h_B - h_C)^2 + (h_C - h_D)^2 + (h_D - h_A)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Kết hợp với (**) ta được $(3h_A)^2 \leq 3(h_B^2 + h_C^2 + h_D^2)$ hay $\frac{h_B^2 + h_C^2 + h_D^2}{3} \geq h_A^2$

Câu 4. Đường tròn (T) có tâm K(3;2) bán kính là R=5. Ta có AI: x-y=0, khi đó đường thẳng AI cắt đường tròn (T) tại A' (A' khác A) có tọa độ là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ x-y=0 \end{cases}$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ (loại) hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases}, \text{ Vậy } A'(6;6)$$

Ta có $A'B = A'C$ (*) (do $\overline{BA'} = \overline{CA'}$)

$$\overline{A'BC} = \overline{BAI} \quad (1) \quad (\text{vì cùng bằng } \overline{AC})$$

$$\text{Mặt khác ta có } \overline{ABI} = \overline{IBC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \overline{BIA'} = \overline{ABI} + \overline{BAI} = \overline{IBC} + \overline{A'BC} = \overline{IBA'}$$

$$\Rightarrow \Delta BA'I \text{ cân tại } A' \text{ do đó } A'B = A'I \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**) ta có } A'B = A'C = A'I$$

Do đó B, I, C thuộc đường tròn tâm A' bán kính $A'I$ có phương trình là $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 50$

$$\Rightarrow \text{Tọa độ B, C là nghiệm của hệ } \begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ (x-6)^2 + (y-6)^2 = 50 \end{cases}$$

Nên tọa độ các điểm B, C là: $(7; -1), (-1; 5)$

Khi đó I nằm trong ΔABC (thỏa mãn)

Vậy phương trình đường thẳng BC: $3x + 4y - 17 = 0$.

Câu 5. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq a + \frac{1}{2} \cdot \frac{a+4b}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{a+4b+16c}{3} = \frac{4}{3}(a+b+c)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4b = 16c$

$$\Rightarrow P \geq \frac{3}{2(a+b+c)} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}. \text{ Đặt } t = a+b+c, t > 0. \text{ Khi đó ta có: } P \geq \frac{3}{2t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{3}{2t} - \frac{3}{\sqrt{t}} \text{ với } t > 0 \text{ ta có } f'(t) = \frac{3}{2t\sqrt{t}} - \frac{3}{2t^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2t\sqrt{t}} - \frac{3}{2t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Lập bảng biến thiên, từ bảng biến thiên ta có $\min_{t>0} f(t) = -\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $t = 1$

$$\text{Vậy ta có } P \geq -\frac{3}{2}, \text{ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a+b+c=1 \\ a=4b=6c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{16}{21} \\ b=\frac{4}{21} \\ c=\frac{1}{21} \end{cases}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của P là } -\frac{3}{2} \text{ khi và chỉ khi } (a; b; c) = \left(\frac{16}{21}; \frac{4}{21}; \frac{1}{21}\right)$$

ĐỀ SỐ 38

Câu 1. Phương trình hoành độ giao điểm: $3x^2 + 3mx + 3m - 4 = 0$ (1) với $x \neq -1$. Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 36m + 48 > 0 \\ 0 \cdot m - 1 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{đúng } \forall m)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m (*) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3m-4}{3} \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1), ta có:

Giả sử $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$

Khi đó ta có $OA = \sqrt{x_1^2 + (x_1 + m)^2}; OB = \sqrt{x_2^2 + (x_2 + m)^2}$

Kết hợp (*) ta được $OA = OB = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Suy ra ΔOAB cân tại O

Ta có $AB = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} \Rightarrow \Delta OAB$ đều $\Leftrightarrow OA^2 = AB^2$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 2(x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 6x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 4 \end{cases}. \text{ Vậy giá trị cần tìm là } m = 2; m = 4.$$

Câu 2. a) Điều kiện: $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. Đặt $t = \sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} (*)$

$$t' = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}} + \frac{1}{\sqrt{1+2x}}, t' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \leq t \leq 2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{-t^4 + 4t^2}{16}$$

Ta có (*)

Khi đó phương trình trở thành: $t^4 - 4t^2 - 16t = 16m$

Xét hàm số $f(t) = t^4 - 4t^2 - 16t$ với $t \in [\sqrt{2}; 2]$

Ta có hàm số $f(t)$ liên tục trên đoạn $[\sqrt{2}; 2]$

$$f'(t) = 4t^3 - 8t - 16, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\Rightarrow \min_{t \in [\sqrt{2}; 2]} f(t) = -32; \max_{t \in [\sqrt{2}; 2]} f(t) = -4 - 16\sqrt{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $-32 \leq 16m \leq -4 - 16\sqrt{2}$

Suy ra giá trị cần tìm của m là: $-2 \leq m \leq \frac{-1 - 4\sqrt{2}}{4}$

b) Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

Hệ phương trình tương đương: $\begin{cases} (xy + x^2) + x + y = 2x^2 - 2y^2 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{2y-3} = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(1-x+2y) = 0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{2y-3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \text{ (loại)} \\ 1-x+2y=0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{2y-3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x-1 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} = 3 (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) $\begin{cases} x \geq 4 \\ 2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \sqrt{x^2 - 5x + 4} = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 5x + 4 = (7 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq x \leq 7 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 \quad (\text{thỏa mãn})$$

Với $x = 5 \Rightarrow y = 2$. Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x; y) = (5; 2)$

Câu 3. a) Diện tích đáy là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

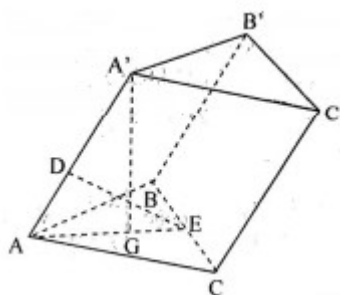
Gọi G là trọng tâm ΔABC

Gọi E là trung điểm BC

Ta có $\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'E)$

Gọi D là hình chiếu vuông góc của E lên đường thẳng AA'

Do đó $BC \perp DE, AA' \perp DE$



Suy ra DE là khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC

ΔADE vuông tại D $\Rightarrow \sin \angle DAE = \frac{DE}{DA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle DAE = 30^\circ$

Xét $\Delta A'AG$ vuông tại G ta có $A'G = AG \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{3}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'G \cdot S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvtt)

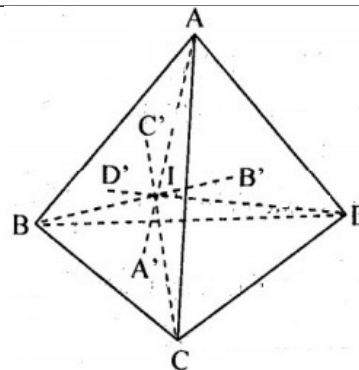
b) Gọi V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích của tứ diện ICDA, IDAB, IABC

Ta có: $\frac{AA'}{IA'} = \frac{d(A; (BCD))}{d(I; (BCD))} = \frac{V}{V_1} \Leftrightarrow 1 + \frac{IA}{IA'} = \frac{V}{V_1}$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{IA}{IA'} = \frac{V}{V_1} - 1 = \frac{V_2 + V_3 + V_4}{V_1} \quad (1);$

$\frac{IB}{IB'} = \frac{V_1 + V_3 + V_4}{V_2} \quad (2);$

Tương tự ta có: $\frac{IC}{IC'} = \frac{V_1 + V_2 + V_4}{V_3} \quad (3); \frac{ID}{ID'} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{V_4} \quad (4);$



Từ (1), (2), (3) và (4) ta có: $VT = \frac{AI}{A'I} + \frac{BI}{B'I} + \frac{CI}{C'I} + \frac{DI}{D'I}$

$= \frac{V_2 + V_3 + V_4}{V_1} + \frac{V_1 + V_3 + V_4}{V_2} + \frac{V_1 + V_2 + V_4}{V_3} + \frac{V_1 + V_2 + V_3}{V_4}$

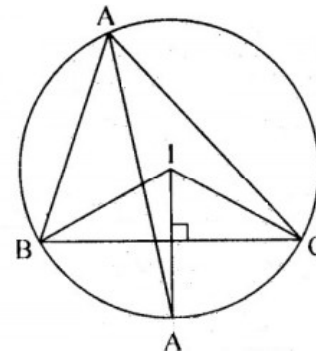
$VT = \left(\frac{V_1}{V_2} + \frac{V_2}{V_1} \right) + \left(\frac{V_2}{V_3} + \frac{V_3}{V_2} \right) + \left(\frac{V_3}{V_4} + \frac{V_4}{V_3} \right) + \left(\frac{V_4}{V_1} + \frac{V_1}{V_4} \right) + \left(\frac{V_3}{V_1} + \frac{V_1}{V_3} \right) + \left(\frac{V_2}{V_4} + \frac{V_4}{V_2} \right) \geq 12$

Đẳng thức xảy ra khi $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = \frac{V}{4} \Rightarrow V = 4V_1$ (ĐPCM)

Câu 4. Gọi d là đường phân giác trong của góc A. Đường tròn (T)

có tâm I(2;1), bán kính $R = \sqrt{5}$. Khi đó đường thẳng d cắt đường tròn (T) tại A và A' có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$



Điểm A có tung độ dương $\Rightarrow A(3;3)$ và $A'(0;0)$

Vì d là phân giác trong của góc A nên $\angle BA' = \angle CA' \Rightarrow IA' \perp BC$

Phương trình đường thẳng BC có dạng BC: $2x + y + m = 0$

Mặt khác ta có: $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle IBC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(A; BC) \cdot BC = 3 \cdot \frac{1}{2}d(I; BC) \cdot BC \Leftrightarrow d(A; BC) = 3d(I; BC)$

$$\frac{|m+9|}{\sqrt{5}} = 3 \cdot \frac{|m+5|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |m+9| = 3|m+5| \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -6 \end{cases}$$

+) Với $m = -3$ khi đó BC: $2x + y - 3 = 0$

Tọa độ các điểm B, C là $\left(\frac{6 - \sqrt{21}}{5}; \frac{3 + 2\sqrt{21}}{5}\right), \left(\frac{6 + \sqrt{21}}{5}; \frac{3 - 2\sqrt{21}}{5}\right)$, suy ra B, C nằm khác phía đối với đường thẳng d (thỏa mãn)

+) Với $m = -6$ khi đó BC: $2x + y - 6 = 0$

Tọa độ các điểm B, C là $\left(\frac{12 - 2\sqrt{6}}{5}; \frac{6 + 4\sqrt{6}}{5}\right), \left(\frac{12 + 2\sqrt{6}}{5}; \frac{6 - 4\sqrt{6}}{5}\right)$, suy ra B, C nằm khác phía đối với đường thẳng d (thỏa mãn)

Do đó phương trình đường thẳng BC là: $2x + y - 3 = 0$ và $2x + y - 6 = 0$

$$P = \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} + \frac{1}{1 + \frac{z}{y}} + \frac{3}{1 + \frac{x}{z}}$$

Câu 5. Ta có

Đặt $a = \frac{y}{x}; b = \frac{z}{y}; c = \frac{x}{z}$ kết hợp với giả thiết ta suy ra $\begin{cases} a \geq b \geq c > 0 \\ abc = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < c \leq 1 \\ ab \geq 1 \end{cases}$

Khi đó $P = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{3}{1+c}$

Ta có $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (\sqrt{ab} - 1) \geq 0$ (đúng do $ab \geq 1$)

Suy ra $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1}$

Hay $P \geq \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1} + \frac{3}{c+1} \geq \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1} + \frac{3}{\sqrt{c}+1} = \frac{3+2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1}$ vì $0 < c \leq 1 \Rightarrow c \leq \sqrt{c}$

Đặt $t = \sqrt{c} \Rightarrow 0 < t \leq 1$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t+3}{t+1}; 0 < t \leq 1$

Ta có hàm số $f(t)$ liên tục trên $(0;1]$, $f'(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} < 0, \forall t \in (0;1)$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;1]$ $\Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{5}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{2}$ khi và chỉ khi $x = y = z$

ĐỀ SỐ 39

(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Bình Phước)

$$y = \frac{2x-3}{x-2} \quad (1)$$

Câu 1. (4,0 điểm) Cho hàm số

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đó cắt đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần

lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{2}IB$,
với $I(2; 2)$.

Câu 2. (5,0 điểm)

$$\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \frac{(x-y)^2}{2} \\ (x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

a) Giải hệ phương trình:

$$\frac{\sin 2x + 3 \tan 2x + \sin 4x}{\tan 2x - \sin 2x} = 2.$$

b) Giải phương trình:

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có A(5; 7), điểm C thuộc đường $x - y + 4 = 0$.

thẳng có phương trình: Đường thẳng đi qua D và trung điểm của đoạn AB có
 $3x - 4y - 23 = 0$.
phương trình: Tìm tọa độ của B và C, biết điểm B có hoành độ dương.

b) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi P, Q lần lượt là các điểm di động trên cung $\widehat{AB}, \widehat{AC}$

nhỏ sao cho P, Q, O thẳng hàng. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên các đường thẳng BC, AB tương ứng và D', E' lần lượt là hình chiếu vuông góc của Q lên các đường thẳng BC, AC. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng DE và D'E'. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác KDD' (theo R).

Câu 4. (3,0 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng SCD và mặt phẳng đáy bằng 60° .

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và DB theo a.

Câu 5. (2,0 điểm) Cho a, b, c là ba số dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 1}} - \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}.$$

Câu 6. (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) được xác định:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{2}{2013} \\ u_n^2(2 - 9u_{n+1}) = 2u_{n+1}(2 - 5u_n), n \geq 1 \end{cases}$$

Xét dãy số $v_n = \frac{u_1}{1 - u_1} + \frac{u_2}{1 - u_2} + \dots + \frac{1}{1 - u_n}$. Tìm $\lim v_n$.

ĐỀ SỐ 40 (Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Hải Dương)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 - 3x$ (1) và đường thẳng $\Delta: y = 2mx - 2$ (với m là tham số). Tìm m để đường thẳng (Δ) và đồ thị hàm số (1) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho diện tích tam giác OBC bằng $\sqrt{17}$ (với A là điểm có hoành độ không đổi và O là gốc tọa độ).

b) Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x + m$. Chứng minh rằng d cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi số thực m. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại A và B. Tìm m để $P = (k_1)^{2013} + (k_2)^{2013}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sin 4x + \cos 4x = 4\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) - 1$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3xy(1 + \sqrt{9y^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} & (x, y \in \mathbb{R}). \\ x^3(9y^2 + 1) + 4(x^2 + 1)\sqrt{x} = 10 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức:

$$S = \frac{1}{1.0!.2013!} + \frac{1}{2.1!.2012!} + \frac{1}{3.2!.2011!} + \frac{1}{4.3!.2010!} + \dots + \frac{1}{2014.2013!.0!}.$$

b) Cho dãy (u_n) thỏa mãn:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + 2 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$
 Tìm $\lim(\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k})$.

Câu 4. (3,0 điểm)

- a) Cho khối chóp S. ABC có SA = 2a, SB = 3a, SC = 4a, $\angle ASB = \angle SAC = 90^\circ$, $\angle BSC = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt trên các đoạn SB và SC sao cho SM = SN = 2a. Chứng minh tam giác AMN vuông. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) theo a.
- b) Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, hai điểm M, N chạy tương ứng trên các đoạn AB và CD sao cho BM = DN. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của MN.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x \cdot y \cdot z = 2\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^8 + y^8}{x^4 + y^4 + x^2 y^2} + \frac{y^8 + z^8}{y^4 + z^4 + y^2 z^2} + \frac{z^8 + x^8}{z^4 + x^4 + z^2 x^2} \geq 8.$$

ĐỀ SỐ 41

(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Thanh Hóa)

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m - 1)x + 1$ (1) với đồ thị (C_m) ($m \in \mathbb{R}$).

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) với $m = 1$.
- b) Tìm m để đường thẳng (d): $y = 2x + 1$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho điểm C(0;1) nằm giữa A và B đồng thời đoạn thẳng AB có độ dài bằng $\sqrt{55}$.

Câu 2. (4.0 điểm)

$$\frac{(\cos x + 1)(\sin 2x - \sin x - \cos x - 2)}{\sin x(1 - 2 \cos x)} = 1.$$

a) Giải phương trình:

$$\begin{cases} 5 + 16 \cdot 4^{(x^2 - 2)} = (5 + 16^{x^2 - 2y}) 7^{2y - x^2 + 2} \\ x^3 + 17x + 10y + 17 = 2(x^2 + 4)\sqrt{4y + 11} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$$

b) Giải hệ phương trình:

Câu 3. (4.0 điểm)

a) Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{8a + 3b + 4(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc})}{1 + (a + b + c)^2}.$$

- b) Tìm các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} \log_2(x + y) \leq 0 \\ x + y + \sqrt{2xy + m} \geq 1 \end{cases}$ có nghiệm thực duy nhất.

Câu 4. (4.0 điểm)

a) Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy ra chỉ có mặt ba chữ số khác nhau.

b) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD với M, N lần lượt là trung điểm của đoạn AB và BC. Gọi H là chân đường cao kẻ từ B xuống CM. Tìm tọa độ các đỉnh của hình

vuông ABCD biết $N(-1; -\frac{5}{2}), H(-1; 0)$ và điểm D nằm trên đường thẳng (d): $x - y - 4 = 0$.

Câu 5. (4.0 điểm)

a) Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB = a, AD = b$. SA vuông góc với đáy và

$SA = 2a$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SA sao cho $AM = x$ ($0 < x < 2a$). Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MBC). Tìm x theo a để mặt phẳng(MBC) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.

- b) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai điểm $A(3;4;1)$, $B(7;-4;-3)$. Tìm điểm M trên (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất, biết điểm M có hoành độ lớn hơn 2.

ĐỀ SỐ 42
(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Hà Nội)

Câu 1. (5.0 điểm)

Cho hàm số: $y = x^3 - 3x + 4$ có đồ thị (C).

- a) Tìm các điểm M, N cùng nằm trên (C) sao cho điểm $I(-\frac{1}{2}; 2)$ là trung điểm của đoạn thẳng MN.
b) Cho ba điểm phân biệt A, B, C cùng thuộc (C). Các tiếp tuyến của (C) tại A, B, C cắt (C) tại điểm thứ hai lần lượt A', B', C'. Chứng minh rằng: Nếu A, B, C thẳng hàng thì A', B', C' cũng thẳng hàng.

Câu 2. (5.0 điểm)

- a) Giải phương trình: $2x^2 + 2x + 5 = (4x - 1)\sqrt{x^2 + 3}$.

- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \\ 2\sqrt{4 - x^2} - 3\sqrt{3 + 2y - y^2} - 3x + 2 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 3. (2.0 điểm)

Cho các số thực a, b, c sao cho $a \geq 0, b \geq 0, 0 \leq c \leq 1$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ

nhất của biểu thức sau:
$$P = 2ab + 3bc + 3ca + \frac{6}{a + b + c}.$$

Câu 4. (5.0 điểm)

Trong không gian cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Đặt $\angle Oy = \alpha, \angle Oz = \beta, \angle Ox = \gamma$. Lấy các điểm A, B, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz sao cho OA = OB = OC = a với $a > 0$.

- a) Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho BM = 2MC và I là trung điểm của đoạn thẳng AM. Tính độ dài của đoạn thẳng OI theo a trong trường hợp $\alpha = \gamma = 60^\circ, \beta = 90^\circ$.

- b) Chứng minh rằng:
$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > -\frac{3}{2}.$$

Câu 5. (3.0 điểm)

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2014} + \frac{2013}{2014}u_n, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- a) Chứng minh rằng (u_n) là dãy số tăng.

- b) Với mỗi $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, đặt $v_n = \frac{u_n}{u_{n+1} - 1}$.

Chứng minh rằng: $v_1 + v_2 + \dots + v_n < 2014$ với mọi $n \geq 1$.

ĐỀ SỐ 43
(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Vĩnh Phúc)

Câu 1. (2.0 điểm)

Giải phương trình: $\sqrt{3} \sin 2x + \sqrt{3} + 1 = 2 \cos^2 x$.

Câu 2. (2.0 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + m^4(1)$, m là tham số thực.

- a) Tìm m để đường thẳng $y = -x + m^4$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt.
b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 2, trong đó $C(0;-1)$.

Câu 3. (2.0 điểm)

Cho hệ phương trình sau với m là tham số thực

$$\begin{cases} 3x^3 + x^2y - 3x^2 - xy = 2m \\ x^2 + 2x + y = 6 - m \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

- a) Giải hệ khi $m = 2$.
b) Tìm m để hệ đã cho có nghiệm.

Câu 4. (2.0 điểm)

Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là trung điểm của AM. Biết $HB = HC = a$, $\angle HBC = 30^\circ$; góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp S.HBC và tính cosin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHC).

Câu 5. (1.0 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D; $AB = 2AD$; $CD = 3AD$. Đường thẳng BD có phương trình $x - 2y + 1 = 0$, đường thẳng AC đi qua điểm $M(4;2)$. Tìm tọa độ đỉnh A biết rằng diện tích ABCD bằng 10 và điểm A có hoành độ nhỏ hơn 2.

Câu 6. (1.0 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 3abc - 2014a - b - c$.

ĐỀ SỐ 44
(Đề thi học sinh giỏi lớp 12 THPT chuyên, Vĩnh Phúc)

Câu 1. (2.5 điểm)

Cho trước số thực $a > 0$ và cho dãy số thực (x_n) xác định bởi $x_1 = a$ và $x_{n+1} = \sqrt{17 + 16x_n}$ với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng với mọi $a > 0$ dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

Câu 2. (1.5 điểm)

Cho 3 số x, y, z không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{y+z}{2}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{z+x}{2}\right)^2} \geq \sqrt{6}.$$

Chứng minh rằng

Câu 3. (1.5 điểm)

Tim các số tự nhiên x, y thỏa mãn phương trình:

$$(x^2 + y)(y^2 + x) = 2(x - y)^3.$$

Câu 4. (3.0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T.

Gọi D là điểm đối xứng của A qua O; đường thẳng OT cắt đường thẳng BD tại điểm E.

a) Chứng minh rằng AE song song với CD.

b) Đường thẳng BE cắt đường thẳng AT tại F. Giả sử đường tròn ngoại tiếp AEF cắt EO tại G khác E.

Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác AGB nằm trên (O).

Câu 5. (1.5 điểm)

Một số nguyên dương k được gọi là “đẹp” nếu có thể phân hoạch tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$

thành k tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_k$ sao cho với mỗi số nguyên dương $n \geq 15$ và với mọi $i \in \{1; 2; \dots; k\}$ đều tồn tại hai số thuộc tập A_i có tổng là n .

a) Chứng minh rằng $k = 3$ là đẹp.

b) Chứng minh rằng mọi $k \geq 4$ đều không đẹp.

ĐỀ SỐ 45

(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Quảng Nam)

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+1} = 2x^2 - x - 3$.

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = \frac{8}{y^3} - \frac{8}{y} & (x, y \in \mathbb{R}). \\ y^2 + 4 = 5y^2(x^2 + 2x + 2) \end{cases}$$

b) Giải hệ phương trình:

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{2014}{2013} \\ 2u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Đặt $S_n = \frac{1}{u_1 + 2} + \frac{1}{u_2 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$. Tính $\lim S_n$.

b) Tìm tất cả các hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(3x - y + \alpha) = 3f(x) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ trong đó } \alpha \text{ là số thực cho trước.}$$

Câu 3. (5,0 điểm)

- a) Cho tam giác ABC có diện tích bằng 1. Gọi M là điểm bất kỳ nằm trong mặt phẳng chứa tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = MA.h_a + MB.h_b + MC.h_c$ (với h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao vẽ từ A, B, C).
- b) Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định và đỉnh A thay đổi. Gọi H và G lần lượt là trực tâm và trọng tâm tam giác ABC. Gọi E là điểm đối xứng với H qua G. Tìm tập hợp các điểm A, biết rằng điểm E thuộc đường thẳng BC.

Câu 4. (3,0 điểm)

- a. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho: $a + 2b = c$ và $a^3 + 8b^3 = c^2$.
- b. Cho đa thức $f(x)$ có bậc $n > 1$, có các hệ số đều là các số nguyên và thỏa mãn các điều kiện $f(a+b)=a.b$, với a, b là hai số nguyên cho trước (a, b khác 0).
Chứng minh rằng $f(a)$ chia hết cho b và $f(b)$ chia hết cho a.

Câu 5. (3,0 điểm) Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a.b.c = 8$.

Chứng minh rằng với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{a^{2^k}}{(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\dots(a^{2^{k-1}}+b^{2^{k-1}})} + \frac{b^{2^k}}{(b+c)(b^2+c^2)(b^4+c^4)\dots(b^{2^{k-1}}+c^{2^{k-1}})} \\ & + \frac{c^{2^k}}{(c+a)(c^2+a^2)(c^4+a^4)\dots(c^{2^{k-1}}+a^{2^{k-1}})} \geq \frac{3}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

ĐỀ SỐ 46
(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Hà Tĩnh)

Câu 1.

Giải phương trình:

a)
$$\frac{(\sin x - \sqrt{3} \cos 2x)(2 \cos 2x + 1)}{(2 \cos x - 1)^2} = \sin 2x + \sin x.$$

b)
$$\log_{\sqrt{5}-2}(x - \sqrt{x} + 1) + \log_{9+4\sqrt{5}}(2x^2 - 30x + 2) = 0.$$

Câu 2.

Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - m$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có góc 30° .

Câu 3.

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau đúng với mọi giá trị $x \in [-1; 1]$:

$$m\sqrt{1-x} + 12\sqrt{1-x^2} \geq 16x + 3m\sqrt{1+x} + 2m + 15.$$

b) Chứng minh rằng hệ phương trình sau có đúng một nghiệm:
$$\begin{cases} x^7 - 9y^2 - 6y = 1 \\ y^7 - 9x^2 - 6x = 1 \end{cases}$$

Câu 4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H, M lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD và G là

trọng tâm tam giác SCD . Biết khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SMC) bằng $\frac{3a\sqrt{15}}{20}$. Tính thể tích khối chóp $G.BCMH$.

Câu 5. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y + 2 = 3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức:
$$P = (x - y)^2 \left(\frac{x^2}{y^4} + \frac{y^2}{x^4} - \frac{3}{xy} \right).$$

ĐỀ SỐ 47
(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Bắc Giang)

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Cho (C_m) là đồ thị hàm số $y = x^4 - (2m+1)x^2 + 2m$ (m là tham số). Tìm m để (C_m) tiếp xúc với trục Ox tại hai điểm phân biệt.

b) Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ hai điểm M, N thuộc đồ thị (C) sao cho $\triangle OMN$ vuông cân tại O, với O là gốc tọa độ.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right) + \sin 3x + \sin x = \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

b) Giải phương trình: $4^{-|x-2|} \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 4x + 6) + 2^{-x^2+4x-3} \log_{\frac{1}{3}}(2|x-2|+2) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x^2+y^2+1} - \sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
.

b) Tính tích phân
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x \sqrt{2+2\sin 2x}}.$$

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả là các mặt hình thoi cạnh a. $\angle BAD = \angle BAA' = \angle A'AD = 60^\circ$.

a) Tính thể tích hình hộp đã cho theo a.

b) Tính cosin của góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng đáy của hình hộp.

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - 19 = 0$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 4 = 0$.

a) Chứng minh (P) cắt (S) theo một đường tròn. Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

b) Lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua tâm của (S), vuông góc với đường thẳng

$(d): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = 3 \end{cases}$ và tạo với mặt phẳng (P) một góc 30° .

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho bốn số thực a, b, c và d thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = 16 \left(\frac{a+c}{a+d} \right)^2 + 25 \left(\frac{c+d}{a+b} \right)^2.$$

ĐỀ SỐ 48**(Đề thi học sinh giỏi lớp 12 THPT chuyên, Bắc Giang)****Câu 1. (5,0 điểm)**a) Giải phương trình $2\sin 3x(1 - 4\sin^2 x) = 1$.b) Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ hai điểm M, N thuộc đồ thị (C) sao cho tam giác OMN vuông cân tại O, với O là gốc tọa độ.**Câu 2. (4,0 điểm)**

$$4^{-|x-2|} \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 4x + 6) + 2^{-x^2+4x-3} \log_{\frac{1}{3}}(2|x-2|+2) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Giải phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ x^2 + 2y + 2 + \sqrt{x+y} = \sqrt{4x+3y} + \sqrt{4x+5y} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

b) Giải hệ phương trình:

Câu 3. (4,0 điểm)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x \sqrt{2+2\sin 2x}}.$$

a) Tính tích phân

b) Tìm số phức z biết rằng $|z| = |2\bar{z} - \sqrt{3} + i|$ và $\frac{(1+i)z}{1 - \sqrt{3} + (1+\sqrt{3})i}$ có argumen bằng $-\frac{\pi}{6}$.**Câu 4. (6,0 điểm)**1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả là các mặt hình thoi cạnh a . $\angle BAD = \angle BAA' = \angle A'AD = 60^\circ$.a) Tính thể tích hình hộp đã cho theo a .b) Tính cosin của góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng đáy của hình hộp.c) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ và hai điểm $A(1; 5; 0)$, $B(3; 3; 6)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc đường thẳng d sao cho chu vi tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất.**Câu 5. (1,0 điểm)**Cho bốn số thực a, b, c và d thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = 16 \left(\frac{a+c}{a+d} \right)^2 + 25 \left(\frac{c+d}{a+b} \right)^2.$$

Đề số 49**(Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Hà Nam)****Câu 1. (4 điểm)**a) Cho hàm số $y = x^3 + x^2 - x + 2$ có đồ thị (C). Đường thẳng d đi qua điểm $M(0; 2)$ và có hệ số góc k . Tìm k để đường thẳng d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt M, N, P và hai điểm N, P có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\frac{x_1^3 - (k+3)x_1}{x_1+1} + \frac{x_2^3 - (k+3)x_2}{x_2+1} + 2 = 0.$$

b) Cho hàm số $y = \frac{2x+4}{x+1}$ có đồ thị (H) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (H) . Tìm trên (H) điểm M sao cho khoảng cách từ I đến tiếp tuyến tại M của (H) có giá trị lớn nhất.

Câu 2. (4 điểm)

a) Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm thực thuộc đoạn $[-1; 1]$:

$$3\sqrt{4-3x^2} - 2\sqrt{x^3+4x^2+4} \geq m.$$

b) Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:
$$\begin{cases} 2^x + \log_2 \frac{x}{2-y} = 2^{2-y} \\ x(2-y) + 5y - 4 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (2 điểm)

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3(5x+4)}} + \frac{\sqrt{5x+4}}{1+\sqrt{5x+4}} \right) dx$$

Tính tích phân :

Câu 4. (6 điểm)

1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = a$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng AB, CD .

b) Chứng minh rằng trọng tâm tứ diện $ABCD$ cách đều tất cả các mặt của tứ diện.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng 1. Tính thể tích khối chóp đó theo x và tìm x để thể tích đó lớn nhất.

Câu 5. (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 0; 0), M(1; 1; 1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM cắt Oy, Oz lần lượt tại $B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $b > 0, c > 0$. Chứng

minh rằng $b+c = \frac{bc}{2}$. Từ đó tìm b, c sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

Câu 6. (2 điểm)

Cho hai đa thức $f(x) = x^4 - (1+e^2)x^2 + e^2$ và $g(x) = x^4 - 1$ (với e là cơ số của lôgarit tự nhiên). Chứng minh rằng dương a, b phân biệt thỏa mãn $a^b = b^a$ thì $f(a).f(b) < 0$ và $g(a).g(b) > 0$.

Đề số 50

(Đề thi học sinh giỏi 12, phú thọ - ngày thứ nhất)

Câu 1. (5,0 điểm)

Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh bất đẳng thức:

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right] \geq \frac{19}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào.

Câu 2. (5,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện: $f(52) = 2014$ và $f(x) - 2f(3x) + f(9x) = 13x^3 + 8x^2 + 4x$, với mọi số thực x .

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn, các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại E , AC và BD cắt nhau tại O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD tương ứng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại N và Q , đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại M và P . Giả sử A nằm giữa B và E . Chứng minh rằng:

a) $EA \cdot EB \cdot CD = 2EC \cdot EN \cdot DQ$.

b) Các điểm O, P, Q thẳng hàng.

Câu 4. (5,0 điểm)

Trên một đường tròn cho n điểm phân biệt ($n \geq 6$). Hai điểm bất kì được nối với nhau bởi một đoạn thẳng. Kí hiệu S là tập hợp gồm các điểm đã cho và các giao điểm của các đoạn thẳng nói trên. Giả sử không có ba đoạn thẳng nào đồng quy tại một điểm nằm bên trong đường tròn, hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là ba điểm của S .

Đề số 51

(Đề thi học sinh giỏi lớp 12 phú thọ - ngày thứ hai)

Câu 1. (7.0 điểm)

Tìm tất cả các đa thức $P(x), Q(x)$ với hệ số thực và hệ số cao nhất bằng 1 thỏa mãn điều kiện $P(1) + P(2) + \dots + P(n) = Q(1 + 2 + \dots + n)$ với mọi số nguyên dương n .

Câu 2. (7.0 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương n có đúng 12 ước nguyên dương $d_1, d_2, \dots, d_{12}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{11} < d_{12} = n$.

ii) $d_{d_4-1} = d_8 (d_1 + d_2 + d_4)$.

Câu 3. (6.0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC ; I_a, I_b, I_c lần lượt là tâm các đường tròn bàng tiếp ứng với các góc A, B, C của tam giác ABC ; X, Y, Z lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OCA, OAB tương ứng; K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ ; P là điểm đối xứng với I qua O .

Chứng minh rằng:

a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_a I_b I_c$ có tâm P và bán kính $2R$.

b) Điểm K nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC .

(Đường thẳng Euler của một tam giác là đường thẳng đi qua trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó).

D. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI**ĐỀ SỐ 39****Câu 1.**

a) Ta có $y = \frac{2x-3}{x-2}$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2 \quad \text{phương trình tiệm cận ngang } y = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty \quad \text{phương trình tiệm cận đứng } x = 2$$

$$y' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in D$$

hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định

hàm số không có cực trị.

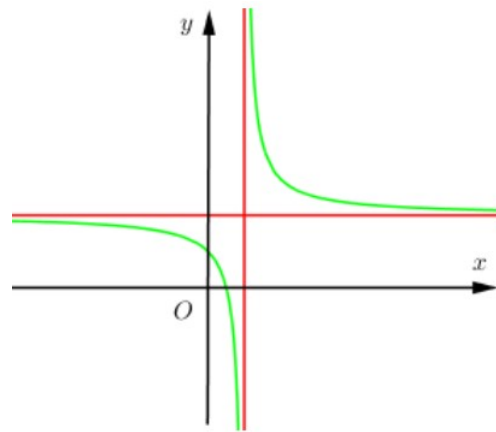
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	2

Đồ thị

Giao điểm với trục tung: $A\left(0; \frac{3}{2}\right);$

Giao điểm với trục hoành: $B\left(\frac{3}{2}; 0\right)$



b) Gọi $M\left(x_0; \frac{2x_0 - 3}{x_0 - 2}\right) \in (C)$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M : $y = -\frac{1}{(x_0 - 2)^2}x + \frac{2x_0^2 - 6x_0 + 6}{(x_0 - 2)^2}$

$AB = \sqrt{2}IB$ và ΔAIB vuông tại I $IA = IB$ nên hệ số góc của tiếp tuyến $k = 1$ hoặc $k = -1$

$$y' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in D$$

Mà hệ số góc của tiếp tuyến bằng -1

$$\frac{-1}{(x_0 - 2)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

có hai phương trình tiếp tuyến $y = -x + 2$ $y = -x + 6$

Câu 2:

a) Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}; y \geq -\frac{1}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + (3y+3)x + 2y^2 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+2y+4=0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Phương trình

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y) + 2 + 2\sqrt{4xy + 2(x+y) + 1} = \left[\frac{(x+y)^2 - 4xy}{2} \right]^2$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{4xy+3} = (4xy+3)(4xy-5)$$

$$\Leftrightarrow 4xy+3=0 \text{ hoặc } (4xy-5)\sqrt{4xy+3}=0 \text{ (loại) do } 1=(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow 4xy-5 < 0$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Hệ đã cho tương đương với

$$\text{Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm } \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{b) Điều kiện: } \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \tan 2x - \sin 2x \neq 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{Phương trình tương đương } 3\sin 2x + \tan 2x + \sin 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin 2x \cos 2x + \sin 2x + \sin 4x \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + 1)(\sin 2x + \sin 4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x + 1 = 0 \\ \sin 2x + \sin 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

$$\text{Đối chiếu điều kiện (*) nghiệm của phương trình là } x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Câu 3:

$$\text{a) Gọi } C(c; c+4) \in d_1, M \text{ là trung điểm của } AB, I \text{ là giao điểm của } AC \text{ và } d_2: 3x - 4y - 23 = 0$$

$$\Delta AIM \text{ đồng dạng với } \Delta CID \quad CI = 2AI \quad CI = 2IA \Rightarrow I\left(\frac{c+10}{3}; \frac{c-10}{3}\right)$$

Ta có

$$\text{Mà } I \in d_2 \text{ nên ta có } 3\frac{c+10}{3} - 4\frac{c-10}{3} - 23 = 0 \Leftrightarrow c = 1$$

Vậy $C(1; 5)$

$$\text{Ta có } M \in d_2 \Rightarrow M\left(t; \frac{3t-23}{4}\right) \Rightarrow B\left(2t-5; \frac{3t-9}{2}\right)$$

$$AB = \left(2t-10; \frac{3t+5}{2}\right), CB = \left(2t-6; \frac{3t-19}{2}\right)$$

$$AB.CB = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{29}{5} \end{cases}$$

Do

$$B(-3; -3) \text{ (loại) hoặc } B\left(\frac{33}{5}; \frac{21}{5}\right)$$

$$\text{Vậy } B\left(\frac{33}{5}; \frac{21}{5}\right)$$

b)

+) $\angle KDK' = 90^\circ$. Kẻ KH vuông góc với BC (H thuộc BC), ta có

$$\angle KKH = \angle KKP \text{ (KH // PD)}$$

$$\angle KKP = \angle PBA \text{ (tứ giác PEBD nội tiếp)}$$

$$\angle KKH = \angle PBA = \frac{1}{2} \text{sd} \angle A$$

Suy ra

$$\angle KKH = \frac{1}{2} \text{sd} \angle Q$$

Tương tự chứng minh được:

$$\angle KDK' = \angle KKH + \angle KKH = \frac{1}{2} \text{sd} \angle Q = 90^\circ$$

Vậy (do PQ là đường kính)

+) $DD' \leq 2R$: Thật vậy xét hình thang vuông DPQD' vuông tại D và D' nên $DD' \leq PQ = 2R$; dấu = xảy ra khi PQ // BC.

$$\text{Xét } \triangle KDK', \text{ ta có } S = \frac{1}{2} KD.KD' \leq \frac{KD^2 + KD'^2}{4} = \frac{DD'^2}{4} \leq \frac{4R^2}{4} = R^2$$

Vậy diện tích lớn nhất của $\triangle KDK'$ bằng R^2 khi PQ // BC.

Câu 4: Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB và CD.

$$\left. \begin{array}{l} SH \perp AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Góc giữa (SCD) và mặt đáy là $\angle SMH = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } HM = \frac{SH}{\tan 60^\circ} = \frac{a}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

b) Kẻ đường thẳng d đi qua A và d // BD. Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ đường thẳng Δ đi qua H, $\Delta \perp d$ và Δ cắt d tại J, Δ cắt BD tại I. Trong (SHI) kẻ HK vuông góc với SI tại K.

Khi đó $d_{(BD;SA)} = d_{(I;(S;d))} = 2d_{(H;(S;d))} = 2HK$.

$$\text{Ta có } \triangle BIH \text{ đồng dạng với } \triangle BAD \text{ do đó } \frac{IH}{AD} = \frac{BH}{BD} \Leftrightarrow IH = \frac{BH.AD}{BD} = \frac{a\sqrt{5}}{10}.$$

$$\text{Xét } \triangle SHI \text{ vuông tại H ta có } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{Vậy } d_{(BD;SA)} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Câu 5. Ta có: } a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} = \frac{1}{2} [(a+b)^2 + (c+1)^2] \geq \frac{1}{4} (a+b+c+1)^2;$$

$$(a+1)(b+1)(c+1) \leq \left(\frac{a+1+b+1+c+1}{3} \right)^3 = \left(\frac{a+b+c+3}{3} \right)^3$$

Vậy
$$P \leq \frac{2}{a+b+c+1} - \frac{54}{(a+b+c+3)^3} = \frac{2}{t} - \frac{54}{(t+2)^3} = f(t) \quad \text{với } t = a+b+c+1, (t > 1)$$

$$f'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{162}{(t+2)^4}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=1(\text{ktm}) \end{cases}$$

t	1	4	$+\infty$
$f'(t)$		-	+
$f(t)$	$\frac{1}{4}$		
	0		0

$$P = \frac{1}{4} \text{ khi } \begin{cases} a+b+c=3 \\ a=b=c \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1.$$

Vậy Giá trị lớn nhất của

Câu 6. Ta có $u_n \neq 0, \forall n \geq 1$.

Khi đó
$$u_n^2(2 - 9u_{n+1}) = 2u_{n+1}(2 - 5u_n) \Leftrightarrow \frac{2 - 9u_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2}{u_n^2}(2 - 5u_n) \Leftrightarrow \frac{2}{u_{n+1}} - 9 = \frac{4}{u_n^2} - \frac{10}{u_n}$$

Đặt
$$x_n = \frac{2}{u_n} \quad \forall n \geq 1.$$

Khi đó ta có dãy mới (x_n) được xác định bởi:
$$\begin{cases} x_1 = 2013 \\ x_{n+1} = x_n^2 - 5x_n + 9 \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh (x_n) là dãy tăng:

Xét hiệu

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - 5x_n + 9 - x_n = (x_n - 3)^2 \geq 0.$$

Do $x_1 = 2013 > 3$ nên $x_{n+1} - x_n > 0$ suy ra (x_n) là dãy tăng

Chứng minh (x_n) không bị chặn hay $\lim x_n = +\infty$:

Giả sử (x_n) bị chặn, do dãy tăng và bị chặn nên tồn tại giới hạn hữu hạn

Giả sử (x_n) có giới hạn hữu hạn, đặt $\lim x_n = a, (a > 2013)$.

Từ công thức truy hồi $x_{n+1} = x_n^2 - 5x_n + 9$.

Lấy giới hạn hai vế ta được: $a = a^2 - 5a + 9 \Leftrightarrow a = 3$ (không thỏa mãn).

Do đó dãy đã cho không có giới hạn hữu hạn.

$$v_n = \frac{u_1}{1-u_1} + \dots + \frac{u_n}{1-u_n} = 2 \left(\frac{1}{\frac{2}{u_1} - 2} + \dots + \frac{1}{\frac{2}{u_n} - 2} \right) = 2 \left(\frac{1}{x_1 - 2} + \dots + \frac{1}{x_n - 2} \right), \forall n \geq 1.$$

Ta có:

$$\text{Mà } \frac{1}{x_n - 2} = \frac{1}{x_n - 3} - \frac{1}{x_{n+1} - 3}.$$

$$\text{Do đó, ta có } v_n = 2 \left(\frac{1}{x_1 - 3} - \frac{1}{x_{n+1} - 3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2013 - 3} - \frac{1}{x_{n+1} - 3} \right)$$

$$\text{Mà } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \text{ nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{1005}.$$

Đề số 40.

Câu 1. a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và (Δ) là nghiệm phương trình:

$$x^3 + 2mx^2 - 3x = 2mx - 2 \Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 - (2m+3)x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[x^2 + (2m+1)x - 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 + (2m+1)x - 2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Vậy (Δ) và đồ thị hàm số (1) cắt nhau tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 + 8 > 0 \\ 1 + (2m+1) - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Khi đó, ba giao điểm là $A(1; 2m-2), B(x_1; 2mx_1-2), C(x_2; 2mx_2-2)$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (2) nên $x_1 + x_2 = -2m-1; x_1 \cdot x_2 = -2$

Tam giác OBC có diện tích $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot d$ trong đó $d = d_{(O; \Delta)} = \frac{2}{\sqrt{1+4m^2}}.$

$$BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (2mx_2 - 2mx_1)^2 = (4m^2 + 1)[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 \cdot x_2]$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{[(2m+1)^2 + 8](4m^2 + 1)} \Rightarrow S = \sqrt{(2m+1)^2 + 8}.$$

$$S = \sqrt{17} \Leftrightarrow \sqrt{4m^2 + 4m + 9} = \sqrt{17} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy b) Ta có $y = \frac{2x+3}{x+2}$. Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và d:

$$\frac{2x+3}{x+2} = -2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ 2x^2 + (6-m)x + 3-2m = 0(*) \end{cases}$$

Xét phương trình (*), ta có $\Delta > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ và $x = -2$ không là nghiệm của phương trình (*) nên d luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m .

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A, tại B lần lượt là $k_1 = \frac{1}{(x_1+2)^2}, k_2 = \frac{1}{(x_2+2)^2}$ trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (*), ta thấy

$$k_1 k_2 = \frac{1}{(x_1 + 2)^2} \frac{1}{(x_2 + 2)^2} = \frac{1}{(x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4)^2} = 4 (k_1 > 0, k_2 > 0)$$

Có $P = (k_1)^{2003} + (k_2)^{2003} \geq 2\sqrt{(k_1 k_2)^{2013}} = 2^{2014} \Rightarrow \min P = 2^{2014}$ khi $k_1 = k_2$

Suy ra $\frac{1}{(x_1 + 2)^2} = \frac{1}{(x_2 + 2)^2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4 \Leftrightarrow m = -2$
(do $x_1 \neq x_2$)

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 2:

a) Ta có $\sin 4x + \cos 4x = 4\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 2\sin 2x \cos 2x + 2\cos^2 2x = 4(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)[(\sin x + \cos x)(\sin 2x + \cos 2x) + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ (\sin x + \cos x)(\sin 2x + \cos 2x) + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \cos x + \sin 3x + 2 = 0 \end{cases} (2)$$

Ta có $\cos x \geq -1; \sin 3x \geq -1 \forall x$ nên $\cos x + \sin 3x + 2 \geq 0$

Do đó $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

b) Ta có $\begin{cases} 3xy(1 + \sqrt{9y^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} & (1) \\ x^3(9y^2 + 1) + 4(x^2 + 1)\sqrt{x} = 10 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $x \geq 0$

Nhận xét: $x = 0$ không phải là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x > 0$, phương trình $(1) \Leftrightarrow 3y + 3y\sqrt{9y^2 + 1} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{x}$

$$\Leftrightarrow 3y + 3y\sqrt{(3y)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 1} \quad (3)$$

Từ (1) và $x > 0$ ta có $y > 0$. Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 1}, t > 0$

Ta có: $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0$

Do đó hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình $(3) \Leftrightarrow f(3y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \Leftrightarrow 3y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Thế vào phương trình (2) ta được phương trình $x^3 + x^2 + 4(x^2 + 1)\sqrt{x} = 10$

Đặt $g(x) = x^3 + x^2 + 4(x^2 + 1)\sqrt{x} - 10, x > 0$. Ta có $g'(x) > 0, \forall x > 0$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, mà $g(1) = 0$

phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(1; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 3:

a) Ta có

$$S = \frac{1}{1.0!.2013!} + \frac{1}{2.1!.2012!} + \frac{1}{3.2!.2011!} + \frac{1}{4.3!.2010!} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(k+1)k!.(2013-k)!} + \dots + \frac{1}{2014.2013!.0!}$$

$$\Rightarrow S = \sum_{k=0}^{2013} \frac{1}{(k+1)k!(2013-k)!} \Rightarrow S.2013! = \sum_{k=0}^{2013} \frac{C_{2013}^k}{(k+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{C_{2013}^k}{k+1} = \frac{2013!}{(k+1)!.(2013-k)!} = \frac{2014!}{2014.(k+1)![2014-(k+1)]!} = \frac{C_{2014}^{k+1}}{2014} \quad (k=0;1;\dots;2013)$$

Do đó, $S.2013! = \sum_{k=0}^{2013} \frac{C_{2014}^{k+1}}{2014} = \frac{1}{2014} \sum_{k=1}^{2014} C_{2014}^k \Rightarrow S.2013! = \frac{1}{2014} (2^{2014} - 1) \Rightarrow S = \frac{2^{2014} - 1}{2014!}$

b) Ta có
$$\begin{cases} u_1 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + 2 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 - 4u_n + 4) \geq 0, \forall n \Rightarrow$ Dãy không giảm.

Nếu có số $M : u_n \leq M$ với mọi n , thì tồn tại $\lim u_n = L$. Vì $u_n \geq u_1 \Rightarrow L \geq u_1$.

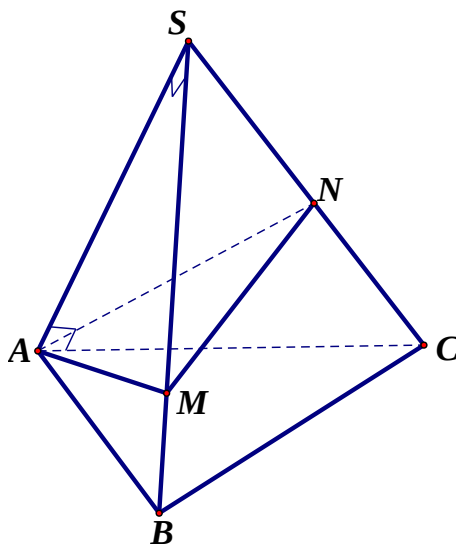
Khi đó ta có, $L = \frac{1}{2}L^2 - L + 2 \Leftrightarrow L = 2$ (vô lý) $\Rightarrow \lim u_n = +\infty$.

Ta có: $u_n^2 - 2u_n + 4 = 2u_{n+1} \Leftrightarrow u_n(u_n - 2) = 2(u_{n+1} - 2) \Leftrightarrow \frac{1}{u_n(u_n - 2)} = \frac{1}{2(u_{n+1} - 2)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{u_n - 2} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n+1} - 2} \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - 2} - \frac{1}{u_{n+1} - 2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Do đó, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1 - 2} - \frac{1}{u_{n+1} - 2} \Rightarrow \lim \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} \right) = \frac{1}{u_1 - 2} = 2$

Câu 4. a)



Dùng định lý Cauchy tính được: $MN = 2a\sqrt{3}$; $AM = 2a\sqrt{2}$; $AN = 2a$

($\triangle SAC$ vuông có $SC = 2SA$ nên $\angle ASC = 60^\circ$) $\Rightarrow \triangle AMN$ vuông tại A .

Gọi H là trung điểm của MN , vì $SA = SM = SN$ và $\triangle AMN$ vuông tại $A \Rightarrow SH \perp (AMN)$.

$$SH = a; V_{S.AMN} = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}; \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM \cdot SN}{SB \cdot SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = 2\sqrt{2}a^3$$

Tính được,

$$d(C; (SAB)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}} = \frac{6a^3\sqrt{2}}{3a^2} = 2a\sqrt{2}$$

Vậy

$$\text{b) Đặt } \frac{BM}{BA} = x \quad 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{DN}{DC} = x$$

Khi đó ta có: $BM = xBA$ và $DN = xDC$

$$\text{Ta có } DN = xDC \Leftrightarrow BN - BD = x(BC - BD) \Leftrightarrow BN = xBC + (1-x)BD$$

$$\text{Do đó: } MN = BN - BM = xBC + (1-x)BD - xBA$$

$$\begin{aligned} MN^2 &= x^2a^2 + (1-x)^2a^2 + x^2a^2 + 2x(1-x)\frac{a^2}{2} - 2x^2 \cdot \frac{a^2}{2} - 2x(1-x)\frac{a^2}{2} \\ &= a^2(x^2 + (1-x)^2 + x^2 + x(1-x) - x^2 - x(1-x)) = (2x^2 - 2x + 1)a^2 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ trên đoạn $[0; 1]$ ta có:

$$\max f(x) = f(0) = f(1) = 1; \min f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

MN đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ khi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

MN đạt giá trị lớn nhất bằng a khi $M \equiv B, N \equiv D$ hoặc $M \equiv A, N \equiv C$.

$$\frac{x^8 + y^8}{x^4 + y^4 + x^2y^2} + \frac{y^8 + z^8}{y^4 + z^4 + y^2z^2} + \frac{z^8 + x^8}{z^4 + x^4 + z^2x^2} \geq 8$$

Câu 5.

Đặt $a = x^2, b = y^2, c = z^2$, từ giả thiết ta có $a > 0, b > 0, c > 0$ và $a.b.c = 8$.

Do $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ nên $a^2 + b^2 + ab \leq \frac{3(a^2 + b^2)}{2}$. Dấu “=” có $\Leftrightarrow a = b$.

Ta có: $\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2 + ab} \geq \frac{a^4 + b^4}{\frac{3}{2}(a^2 + b^2)} \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2)$ (1).

Thật vậy: $(1) \Leftrightarrow 2(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)^2 \Leftrightarrow (a^2 + b^2)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Do đó ta được: $\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2 + ab} \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2)$. Dấu “=” có $\Leftrightarrow a = b$.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có: $\frac{b^4 + c^4}{b^2 + c^2 + bc} \geq \frac{1}{3}(b^2 + c^2)$. Dấu “=” có $\Leftrightarrow b = c$.

$\frac{c^4 + a^4}{c^2 + a^2 + ca} \geq \frac{1}{3}(c^2 + a^2)$. Dấu “=” có $\Leftrightarrow c = a$.

Cộng các vế bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{b^4 + c^4}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{c^4 + a^4}{c^2 + a^2 + ca} \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (2)$$

Dấu “=” có $\Leftrightarrow a = b = c$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2\sqrt{a^2 b^2 c^2} = 8$.

Dấu “=” có $\Leftrightarrow a = b = c$. Do đó ta có ĐPCM. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow |x| = |y| = |z| = \sqrt{2}$.

ĐỀ SỐ 41

Câu 1. a) Với $m = 1$ ta có $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Sự biến thiên: Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$.

Ta có: $y' = 6x(x - 1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:



Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$;

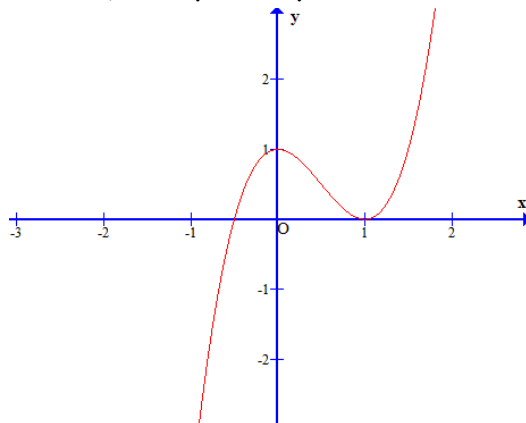
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$;

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = 1$;

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CD} = 0$;

Đồ thị: Ta có $y'' = 12x - 6 = 0 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là điểm uốn của đồ thị.

Đồ thị (C) cắt trục Oy tại điểm $A(0;1)$, cắt trục Ox tại điểm $B(1;0), C\left(-\frac{1}{2};0\right)$.



b) Hoành độ giao điểm của (d) và đồ thị (C_m) của hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1$ là nghiệm của phương trình:

$$2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x(2x^2 - 3mx + m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3mx + m - 3 = 0 (*) \end{cases}$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (C_m) tại 3 điểm C, A, B phân biệt và C nằm giữa A và B khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 2.(m-3) < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Khi đó tọa độ A và B thỏa mãn $\begin{cases} x_A + x_B = \frac{3m}{2} \\ x_A \cdot x_B = \frac{m-3}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} y_A = 2x_A + 1 \\ y_B = 2x_B + 1 \end{cases}$

(trong đó x_A, x_B là nghiệm của phương trình $(*)$).

$$AB = \sqrt{55} \Leftrightarrow \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{55}$$

$$\Leftrightarrow (x_B - x_A)^2 = 11 \Leftrightarrow (x_B + x_A)^2 - 4x_B \cdot x_A = 11 \Leftrightarrow \frac{9m^2}{4} - 4 \cdot \frac{m-3}{2} = 11$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 8m - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{10}{9} (TM) \end{cases}$$

Vậy $m = 2; m = -\frac{10}{9}$ là giá trị cần tìm.

$$\frac{(\cos x + 1).(\sin 2x - \sin x - \cos x - 2)}{\sin x.(1 - 2\cos x)} = 1 \quad (1)$$

Câu 2. a)

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Điều kiện:

$$(1) \Leftrightarrow (\cos x + 1).(\sin 2x - \sin x - \cos x - 2) = \sin x - \sin 2x \quad (2)$$

Ta có

$$\text{Khi đó: } (2) \Leftrightarrow (\cos x + 1).(\sin 2x - \sin x - \cos x - 1) - (\cos x + 1) = \sin x - \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1) \cdot (\sin 2x - \sin x - \cos x - 1) + (\sin 2x - \sin x - \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 2) \cdot (\sin 2x - \sin x - \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x - \sin x - \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x + 1) \cdot (\sin x + \cos x - 2) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là : $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

$$\begin{cases} 5 + 16 \cdot 4^{x^2 - 2y} = \left(5 + 16^{x^2 - 2y}\right) \cdot 7^{2y - x^2 + 2} \\ x^3 + 17x + 10y + 17 = 2(x^2 + 4)\sqrt{4y + 11} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$$

b) Ta có:

Đặt $t = x^2 - 2y$ phương trình (1) có dạng $5 + 16 \cdot 4^t = (5 + 16^t) \cdot 7^{2-t} \Leftrightarrow \frac{5 + 4^{2+t}}{7^{2+t}} = \frac{5 + 4^{2t}}{7^{2t}} (*)$.

Xét hàm số $f(x) = 5\left(\frac{1}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x \Rightarrow f(x)$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (*) có dạng $f(t+2) = f(2t) \Leftrightarrow t+2 = 2t \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2y = 2$.

Khi đó phương trình (2) có dạng $x^3 + 5x^2 + 17x + 7 = 2(x^2 + 4)\sqrt{2x^2 + 7}$

$$\Leftrightarrow (x+2)^3 + (x+2)^2 + (x+2) = (2x^2 + 7)\sqrt{2x^2 + 7} + (2x^2 + 7) + \sqrt{2x^2 + 7}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + t, f(t)$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Phương trình trên có dạng $f(x+2) = f(\sqrt{2x^2 + 7}) \Leftrightarrow x+2 = \sqrt{2x^2 + 7} \Leftrightarrow x = 1$ và $x = 3$.

Hệ phương trình có 2 cặp nghiệm $\left(1; \frac{-1}{2}\right), \left(3; \frac{7}{2}\right)$.

$$P = \frac{8a + 3b + 4(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc})}{1 + (a + b + c)^2}$$

Câu 3. a)

$$P = \frac{8a + 3b + 4(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc})}{1 + (a + b + c)^2}$$

Ta có:

$$\leq \frac{8a + 3b + 4\left(\frac{a+4b}{4} + \frac{b+4c}{4} + \frac{a+4b+16c}{12}\right)}{1 + (a + b + c)^2} = \frac{28}{3} \cdot \frac{a + b + c}{1 + (a + b + c)^2}.$$

Đặt $a + b + c = t, t > 0$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ với $t > 0$.

$$f'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \quad f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\pm 1 \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)=0; \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)=0$$

Ta có

Bảng biến thiên:

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		+	0
$f(t)$		$\frac{1}{2}$	0

Từ bảng biến thiên ta suy ra GTLN của P bằng $\frac{14}{3}$ khi $a = \frac{16}{21}; b = \frac{4}{21}; c = \frac{1}{21}$.

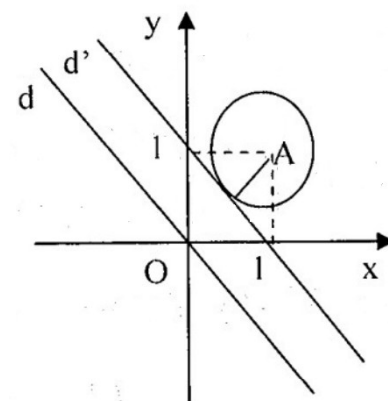
$$\begin{cases} \log_2(x+y) \leq 0 \\ x+y+\sqrt{2xy+m} \geq 1 \end{cases}$$

b) Ta có:

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 0 < x+y \leq 1 \\ \sqrt{2xy+m} \geq 1-(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+y \leq 1 \\ 2xy+m \geq 1-2x-2y+(x+y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+y \leq 1 & (1) \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq m+1 & (2) \end{cases}$$



Tập nghiệm của (1) là phần nằm giữa hai đường thẳng $d: y = -x; d': y = -x + 1$ và trên d' .

Nếu $m \leq -1$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $m > -1$ thì tập nghiệm của (2) là hình tròn (C) (kể cả biên) có tâm $A(1;1)$ bán kính $R = \sqrt{m+1}$

Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi d' là tiếp tuyến của đường tròn (C)

$$\sqrt{m+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Nghĩa là:

$$m = -\frac{1}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 4. a) Xét phép thử: $T =$ "Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0". Ta có: $|\Omega| = 9^5 = 59049$.

Gọi A là biến cố cần tìm xác suất, ta có:

Số cách chọn 3 chữ số phân biệt a, b, c từ 9 chữ số thập phân khác 0 là C_9^3 . Chọn 2 chữ số còn lại từ 3 chữ số đó, có 2 trường hợp rời nhau sau đây:

Trường hợp 1. Cả hai chữ số còn lại cùng bằng 1 trong 3 chữ số a, b, c : có 3 cách; mỗi hoán vị từ 5! hoán vị của 5 chữ số (chẳng hạn) a, a, a, b, c tạo ra một số tự nhiên n ; nhưng cứ $3!$ hoán vị của các vị trí mà a, a, a chiếm chỗ thì chỉ tạo ra cùng một số n , nên trong trường hợp 1 này có cả thảy $3 \cdot \frac{5!}{3!} = 60$ số tự nhiên.

Trường hợp 2.1 trong 2 chữ số còn lại bằng 1 trong 3 chữ số a, b, c và chữ số kia bằng 1 chữ số khác trong 3 chữ số đó: có 3 cách; mỗi hoán vị từ $5!$ hoán vị của 5 chữ số (chẳng hạn) a, a, b, b, c tạo ra một số tự nhiên n ; nhưng cứ $2!$ hoán vị của các vị trí mà a, a chiếm chỗ và $2!$ hoán vị của các vị trí mà b, b chiếm chỗ thì chỉ tạo ra cùng một số n , nên trong trường hợp 2 này có cả thảy $3 \cdot \frac{5!}{2!2!} = 90$ số tự nhiên.

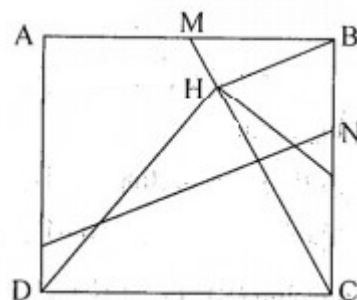
$$|\Omega_A| = (60 + 90) C_9^3 = 150 \cdot \frac{9!}{3!6!} = 150 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 = 12600$$

Vậy:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{12600}{59049} = \frac{1400}{6561} \approx 0,213382106$$

b) Trong $\triangle BCH$ vuông ta có:
 Mặt khác: BH và DN song song với nhau (vì cùng vuông góc với MC)

Từ đó: H và C đối xứng qua DN
 $\Rightarrow \angle BHN = \angle DCN = 90^\circ \Rightarrow DH \perp HN$



Gọi $D(m; m-4)$. Sử dụng điều kiện $HD \cdot HN = 0 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow D(4; 0)$

Nhận xét H và C đối xứng qua DN tìm được $C(1; -4)$

Từ đó tìm được: $A(0; 3), B(-3; -1)$

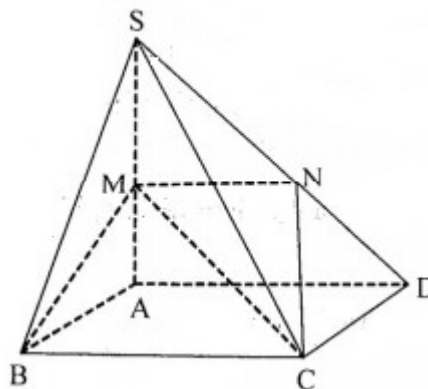
Câu 5. a) Thiết diện là hình thang vuông $MNCB$,
 vuông tại B và M .

$$S_{MNCB} = \frac{1}{2}(MN + CB)MB$$

Tính diện tích thiết diện: ;

$$= \sqrt{BA^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + x^2};$$

$$\triangle SMN \sim \triangle SAD \Rightarrow MN = \frac{SM \cdot AD}{SA} = \frac{(2a-x) \cdot b}{2a}$$



$$S_{MNCB} = \frac{1}{2} \left(\frac{2ab - bx}{2a} + b \right) \sqrt{a^2 + x^2}$$

Vậy

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{2a^2b}{3} = V$$

Gọi V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$

$$V_1 = V_{S.MBC} + V_{S.MNC}$$

Gọi là thể tích của khối chóp $SMNCB$:

$$\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM.SB.SC}{SA.SB.SC} = \frac{SM}{SA} = \frac{2a-x}{2a}$$

Ta có

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA.S_{ABC} = \frac{1}{6}.2a^2b = \frac{V}{2} \Rightarrow V_{SMBC} = \frac{2a-x}{2a} \cdot \frac{V}{2} = \frac{2a-x}{2a} \cdot \frac{ab^2}{3} = \frac{(2a-x)}{6} ab$$

$$\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM.SN.SC}{SA.SC.SD} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = \left(\frac{MN}{AD} \right)^2 = \left(\frac{2a-x}{2a} \right)^2$$

Ta có

$$\Rightarrow V_{S.ACD} = \frac{V}{2} = \frac{a^2b}{3} \Rightarrow V_{S.MNC} = \frac{(2a-x)^2}{4a^2} \cdot \frac{a^2b}{3} = \frac{(2a-x)^2}{12} \cdot b$$

$$V_1 = \frac{V}{2} = \frac{a^2b}{3} \Leftrightarrow \frac{(2a-x)ab}{6} + \frac{(2a-x)^2 \cdot b}{12} = \frac{a^2b}{3}$$

(loại)

mãn)

$$\Leftrightarrow x^2 - 6ax + 4a^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a(3 + \sqrt{5}) > 2a \\ x = a(3 - \sqrt{5}) \end{cases}$$

$$x = a(3 - \sqrt{5})$$

Vậy với thì mặt phẳng (MBC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau.

b) Nhận thấy đường thẳng AB song song với (P). Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB , I là trung điểm của

$$AB, \text{ suy ra } I(5; 0; -1) \quad ; \quad IA = \sqrt{24}.$$

$$(x - 5)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 24$$

Phương trình (S): .

Vì AB có độ dài không đổi và song song với (P) nên điểm M cần tìm nằm trên mặt phẳng (Q) đi qua AB và vuông góc với (P).

$$AB(4; -8; -4); n_p(1; 1; -1) \quad n_Q = [n_p; AB] = (12; 0; 12).$$

Ta có suy ra VTPT của (Q) là

Phương trình (Q): $x + z - 4 = 0$.

Điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là điểm đồng thời thuộc (P), (Q) và (S).

$$\begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \\ (x - 5)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 24 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \\ z = 1 \end{cases}$$

Do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình suy ra .

$$M(3; -4; 1)$$

Vậy .

ĐỀ SỐ 42

$$M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = x_0^3 - 3x_0 + 4$$

Câu 1. a) Gọi (1)

$$\Rightarrow N(-1 - x_0; 4 - y_0).$$

Vì I là trung điểm của MN

$$N(-1-x_0; 4-y_0) \in (C) \quad 4-y_0 = (-1-x_0)^3 - 3(-1-x_0) + 4$$

Vì nên (2)

$$4 - (x_0^3 - 3x_0 + 4) = (-1 - x_0)^3 - 3(-1 - x_0) + 4 \Leftrightarrow x_0^2 + x_0 - 2 = 0$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 2.$$

+) Với

$$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2.$$

+) Với

$$M(-2; 2) \quad N(1; 2)$$

Vậy cặp điểm cần tìm là và .

$$A(a; f(a)); B(b; f(b)); C(c; f(c))$$

b) Gọi với a, b, c đôi một khác nhau.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

Ta có A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi:

$$\Leftrightarrow b^2 + ab + a^2 - 3 = c^2 + ac + a^2 - 3 \Leftrightarrow a + b + c = 0$$

.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Phương trình tiếp tuyến tại A là: .

Phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến tại A và (C) là:

$$(3a^2 - 3)(x - a) + a^3 - 3a + 4 = x^3 - 3x + 4 \Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0$$

$\Rightarrow$

$$A'(-2a; f(-2a))$$

tiếp tuyến tại A cắt (C) tại điểm thứ hai .

$$B'(-2b; f(-2b)), C'(-2c; f(-2c))$$

Tương tự .

$$a + b + c = 0 \Rightarrow (-2a) + (-2b) + (-2c) = 0 \Rightarrow$$

Vì A', B', C' thẳng hàng.

$$t = \sqrt{x^2 + 3} \Rightarrow t^2 = x^2 + 3 \Rightarrow$$

Câu 2. a) Đặt phương trình trở thành:

$$2t^2 + 2x - 1 = (4x - 1)t \Leftrightarrow 2t^2 - (4x - 1)t + 2x - 1 = 0.$$

$$\Delta = (4x - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 2x - 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + 3 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

Trường hợp 1: Với loại

$$t = 2x - 1$$

Trường hợp 2: Với ta có:

$$\sqrt{x^2 + 3} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 4x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$$

Vậy là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases} \quad x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0$$

b) Điều kiện: . Ta có:

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y \quad f(t) = t^3 + 3t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t$$

(*). Xét hàm số

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ $\cup$ $\cup$
 $f(t)$ là hàm đồng biến trên . Từ đó (*) $f(x+1) = f(y)$ $y = x+1$.

$$2\sqrt{4 - x^2} - 3\sqrt{3 + 2y - y^2} - 3x + 2 = 0$$

Thay $y = x + 1$ vào ta được:

$$\sqrt{4-x^2} = -3x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ 4-x^2 = 9x^2-12x+4 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=1.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là (0;1).

Câu 3. Ta có:

$$P = (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 + bc + ca + \frac{6}{a+b+c} \geq (a+b+c)^2 - 3 + \frac{6}{a+b+c}.$$

$$t = a+b+c \Rightarrow t \in [\sqrt{3}; 3] \quad f(t) = t^2 - 3 + \frac{6}{t} \quad t \in [\sqrt{3}; 3]$$

Đặt . Xét , với .

$$f'(t) > 0, \forall t \in [\sqrt{3}; 3] \Rightarrow f(t) \geq f(\sqrt{3}) = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Vì .

$$a=c=0, b=\sqrt{3} \quad b=c=0, a=\sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi hoặc .

$$P_{\min} = \frac{6}{\sqrt{3}} \quad a=c=0, b=\sqrt{3} \quad b=c=0, a=\sqrt{3}$$

Vậy khi hoặc .

$$P = (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 + bc + ca + \frac{6}{a+b+c}$$

Ta có:

$$\leq (a+b+c)^2 - 3 + \frac{a^2+b^2+2c^2}{2} + \frac{6}{a+b+c}$$

$$\leq (a+b+c)^2 - 1 + \frac{6}{a+b+c}$$

.

$$t = a+b+c \Rightarrow t \in [\sqrt{3}; 3] \quad g(t) = t^2 - 1 + \frac{6}{t} \quad t \in [\sqrt{3}; 3]$$

Đặt . Xét , với .

$$g'(t) > 0, \forall t \in [\sqrt{3}; 3] \Rightarrow g(t) \leq g(3) = 10$$

Vì

$$P_{\max} = 10$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy khi $a = b = c = 1$.

Câu 4. a) Ta có:

$$OI = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}(OB + BM) = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OB + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BC = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OB + \frac{1}{3}BC$$

$$BC = OC - OB$$

Mặt khác: nên

$$OI = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{6}OB + \frac{1}{3}OC \Rightarrow 6OI = 3OA + OB + 2OC$$

$$36OI^2 = 9OA^2 + OB^2 + 4OC^2 + 6.OA.OB + 4OB.OC + 12OA.OC$$

Từ đó

$$\Leftrightarrow 36OI^2 = 9a^2 + a^2 + 4a^2 + 3a^2 + 6a^2 = 23a^2 \quad OI = \frac{a\sqrt{23}}{6}$$

. Vậy .

$$OA + OB + OC \neq 0 \Rightarrow (OA + OB + OC)^2 > 0$$

b) Vì Ox, Oy, Oz không đồng phẳng nên

$$\Leftrightarrow a^2 + a^2 + a^2 + 2a^2 \cos \beta + 2a^2 \cos \gamma > 0 \Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > -\frac{3}{2}$$

$$u_n \geq 2, \forall n \geq 1$$

Câu 5. a) Trước hết ta chứng minh bằng qui nạp. Thật vậy:

$$u_1 = 2 \Rightarrow$$

Với $n = 1$, ta có mệnh đề đúng khi $n = 1$.

$$u_k \geq 2$$

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, tức là .

$$u_{k+1} \geq 2$$

Ta phải chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh .

$$u_{k+2} = \frac{u_{k+1}^2}{2014} + \frac{2013}{2014} u_{k+1} \geq \frac{4}{2014} + \frac{2013}{2014} \cdot 2 = \frac{2015}{1007} > 2$$

Thật vậy: .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n - 1)}{2014} > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad u_n \geq 2, \forall n \geq 1$$

Xét , vì .

$$u_{k+1} - u_k = \frac{u_k(u_k - 1)}{2014} \Rightarrow u_k(u_k - 1) = 2014(u_{k+1} - u_k)$$

b) Ta có: .

$$\Rightarrow \frac{u_k}{u_{k+1} - 1} = 2014 \left(\frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1} \right)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 2014 \left(\frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) = 2014 - \frac{2014}{u_{n+1} - 1}$$

Từ đó:

$$u_n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 1} > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad v_1 + v_2 + \dots + v_n < 2014$$

Vì , nên .

ĐỀ SỐ 43

Câu 1. Phương trình tương đương: $\sqrt{3} \sin 2x + \sqrt{3} + 1 = 1 + \cos 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

$$x^3 - 3mx^2 + m^4 = -x + m^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3mx + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Câu 2. a) phương trình hoành độ giao điểm:

Yêu cầu bài toán tương đương với (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m < -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Các giá trị cần tìm của m là $m > \frac{2}{3}$ hoặc $m < -\frac{2}{3}$.

b) Ta có $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2m$.

Đồ thị có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$ (*).

Các điểm cực trị của đồ thị là $A(0; m^4), B(2m; m^4 - 4m^3)$.

Suy ra $AC = |m^4 + 1| = m^4 + 1$; $C \in Oy \Rightarrow d(B; AC) = 2|m|$.

Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot d(B; AC) = |m|(m^4 + 1) = 2$.

Đặt $|m| = t > 0$ ta được $t^5 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^4 + t^3 + t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Do đó $m = \pm 1$ (thỏa mãn điều kiện (*)). Vậy $m = \pm 1$.

Câu 3. a) Với $m = 2$ ta có hệ $\begin{cases} 3x^3 + x^2y - 3x^2 - xy = 4 \\ x^2 + 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - x)(3x + y) = 4 \\ (x^2 - x) + (3x + y) = 4 \end{cases}.$

Đặt $x^2 - x = a$; $3x + y = b$, ta có hệ $\begin{cases} ab = 4 \\ a + b = 4 \end{cases}.$

Giải hệ $\begin{cases} ab = 4 \\ a + b = 4 \end{cases}$ ta được $a = b = 2$. Suy ra $\begin{cases} x^2 - x = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases}.$

Giải hệ ta được $(x; y) = (-1; 5); (2; -4)$.

b) Hệ tương đương $\begin{cases} (x^2 - x)(3x + y) = 2m \\ (x^2 - x) + (3x + y) = 6 - m \end{cases}.$

Đặt $x^2 - x = a, a \geq -\frac{1}{4}$; $3x + y = b$, ta có hệ $\begin{cases} ab = 2m \\ a + b = 6 - m \end{cases}.$

$$\begin{cases} ab = 2m \\ a + b = 6 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(6 - m - a) = 2m \\ b = 6 - m - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6a - a^2}{a + 2} = m \quad (1) \\ b = 6 - m - a \end{cases}.$$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm thỏa mãn $a \geq -\frac{1}{4}$

Xét hàm số $f(a) = \frac{6a - a^2}{a + 2}; a \geq -\frac{1}{4}$

Ta có $f'(a) = -\frac{a^2 + 4a - 12}{(a + 2)^2}$.

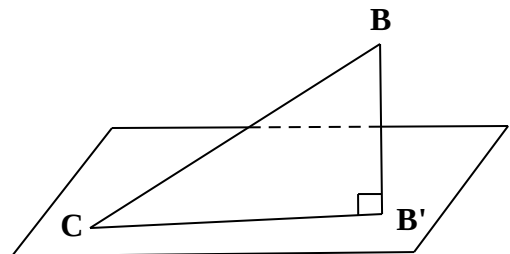
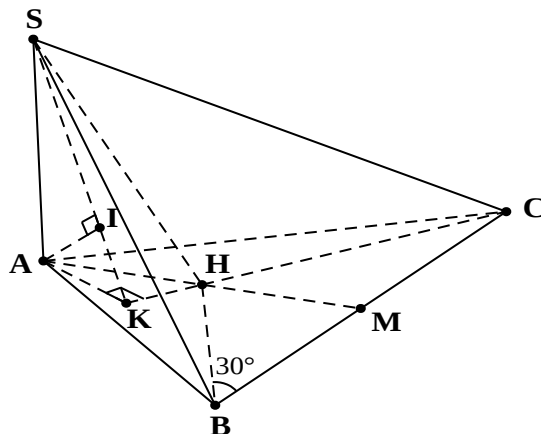
Với $a \geq -\frac{1}{4}$ thì $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Bảng biến thiên:

a	$-\frac{1}{4}$	2	$+\infty$
$f'(a)$		$+$	$-$
$f(a)$		2	
	$-\frac{25}{28}$		$-\infty$

Suy ra giá trị cần tìm của m là : $m \leq 2$.

Câu 4:



$$S_{HBC} = \frac{1}{2} HB \cdot HC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên HC.

Ta có: $AH = HM = HB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow AK = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$

Góc giữa (SHC) và (ABC) là $\angle SKA = 60^\circ \Rightarrow SA = AK \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{4}$

Vậy $V_{S.HBC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{HBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{16}.$

Gọi B' là hình chiếu của B trên (SHC), suy ra góc giữa BC và (SHC) là $\angle BCB'.$

Gọi I là hình chiếu của A trên SK $\Rightarrow AI \perp (SHC).$

Ta có $BB' = d(B; (SHC)) = 2d(M; (SHC)) = 2d(A; (SHC)) = 2AI$.

Trong tam giác vuông SAK, ta có:

$$AI = \frac{AK \cdot AS}{\sqrt{AK^2 + AS^2}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{3a}{8} \Rightarrow BB' = \frac{3a}{4}.$$

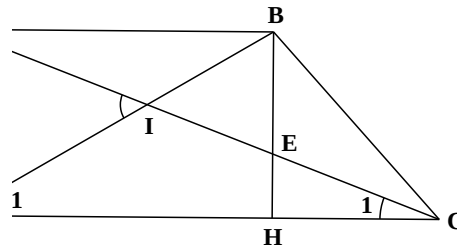
Do đó $\sin \angle CB' = \frac{BB'}{BC} = \frac{3a}{4 \cdot 2BM} = \frac{3a}{8 \cdot HB \cdot \cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

Vậy $\cos \angle CB' = \sqrt{1 - \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$

Câu 5. Gọi $I = AC \cap BD$, H là hình chiếu của B trên CD.

Ta có $\tan \angle AID = \tan(D_1 + C_1)$

$$= \frac{\tan D_1 + \tan C_1}{1 - \tan D_1 \cdot \tan C_1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$



$$\Rightarrow \angle AID = 45^\circ.$$

Đường thẳng AC có dạng:

$$a(x - 4) + b(y - 2) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 4a - 2b = 0 \quad (a^2 + b^2 > 0).$$

Góc giữa AC và BD bằng 45° nên $\cos 45^\circ = \frac{|a - 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{5}} \Leftrightarrow 3a^2 + 8ab - 3b^2 = 0.$

Chọn $b = 1$ ta được $a = \frac{1}{3}; a = -3$.

Từ đó suy ra phương trình AC là $x + 3y - 10 = 0$ hoặc $3x - y - 10 = 0$.

Gọi $E = BH \cap AC$, ta có $\frac{BE}{EH} = \frac{AB}{CH} = 2 \Rightarrow \frac{IA}{IE} = \frac{AD}{BE} = \frac{3}{2}.$

Ta có $S_{ABCD} = \frac{(2AD + 3AD) \cdot AD}{2} = 10 \Leftrightarrow AD = 2.$ Từ đó tìm được $AI = \frac{4\sqrt{10}}{5}.$

+) Nếu $AC: x + 3y - 10 = 0 \Rightarrow I\left(\frac{17}{5}; \frac{11}{5}\right).$

Gọi $A(10 - 3t; t)$ thì từ $AI = \frac{4\sqrt{10}}{5}$ ta có:

$$\left(10 - 3t - \frac{17}{5}\right)^2 + \left(t - \frac{11}{5}\right)^2 = \frac{32}{5} \Leftrightarrow t = 3; t = \frac{7}{5} \Rightarrow A(1; 3), A\left(\frac{29}{5}; \frac{7}{5}\right).$$

Do $x_A < 2 \Rightarrow A(1; 3)$.

+) Nếu $AC: 3x - y - 10 = 0$, suy ra $I\left(\frac{21}{5}; \frac{13}{5}\right)$.

Gọi $A(t; 3t - 10)$ thì từ $AI = \frac{4\sqrt{10}}{5}$ ta có:

$$\left(t - \frac{21}{5}\right)^2 + \left(3t - 10 - \frac{13}{5}\right)^2 = \frac{32}{5} \Leftrightarrow t = 5; t = \frac{17}{5} \text{ (không thỏa mãn } x_A = t < 2).$$

Vậy điểm A cần tìm là $A(1; 3)$.

Câu 6. Ta có: $a \leq b \leq c \Rightarrow (a^2 - b^2)(a^2 - c^2) \geq 0 \Rightarrow b^2c^2 \geq a^2(b^2 + c^2 - a^2) = a^2(3 - 2a^2)$.

Suy ra $bc \geq a\sqrt{3 - 2a^2}$

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9 \Rightarrow a + b + c \leq 3$$

$$\Rightarrow P \geq 3abc - 2013a - 3 \geq 3a^2\sqrt{3 - 2a^2} - 2013a - 3.$$

Xét hàm $f(a) = 3a^2\sqrt{3 - 2a^2} - 2013a - 3; a \in [0; 1]$.

Ta có:

$$f'(a) = 3\left(2a\sqrt{3 - 2a^2} - a^2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3 - 2a^2}}\right) - 2013 = \frac{18a(1 - a^2)}{\sqrt{3 - 2a^2}} - 2013 \leq 18a(1 - a^2) - 2013.$$

$$Ta \text{ có } a^2(1 - a^2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2a^2(1 - a^2)(1 - a^2) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2a^2 + 1 - a^2 + 1 - a^2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}.$$

$$Suy \text{ ra } a(1 - a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow f'(a) \leq 18 \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} - 2013 \leq 4\sqrt{3} - 2013 < 0.$$

Suy ra $f(a)$ nghịch biến trên $[0; 1]$. Do đó $f(a) \geq f(1) = -2013$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -2013 khi $a = b = c = 1$.

ĐỀ SỐ 44

Câu 1: Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được $x_n > 0, \forall n$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{17+16x}, x > 0$. Ta có $f'(x) = \frac{8}{\sqrt{17+16x}} > 0, \forall x > 0$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, suy ra dãy (x_n) đơn điệu.

Xét hàm $g(x) = f(x) - x, x > 0$. Ta thấy $g(x) = \frac{17+16x - x^2}{\sqrt{17+16x} + x} = \frac{(17-x)(x+1)}{\sqrt{17+16x} + x}$, suy ra $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 17; g(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 17; g(x) < 0 \Leftrightarrow x > 17$.

+) Nếu $a = 17$ thì $x_n = 17, \forall n \geq 1$ do đó dãy (x_n) hội tụ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 17$

+) Nếu $0 < a < 17$ thì $x_2 = f(a) > a = x_1$ suy ra (x_n) đơn điệu tăng.

Dễ thấy (x_n) bị chặn trên bởi 17. Suy ra dãy hội tụ về a mà $g(a) = 0$, do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 17$.

+) Nếu $a > 17$ thì $x_2 = f(a) < a = x_1$ suy ra (x_n) đơn điệu giảm.

Dễ thấy (x_n) bị chặn dưới bởi 17. Suy ra dãy hội tụ về a mà $g(a) = 0$, do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 17$.

Vậy với mọi $a > 0$ thì dãy hội tụ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 17$.

Câu 2. Bình phương hai vế của bất đẳng thức cần chứng minh ta được bất đẳng thức tương đương:

$$3 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 - \left(\frac{z+x}{2}\right)^2 + 2 \sum_{\text{cyc}} \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y+z}{2}\right)^2} \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y+z}{2}\right)^2} \geq \frac{7}{4} + \frac{xy + yz + zx}{4} \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } 1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \frac{x^2 + y^2 + (z^2 + 1)}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{4} + \frac{z^2 + 1}{2}$$

$$\text{Tương tự: } 1 - \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \frac{(y-z)^2}{4} + \frac{x^2 + 1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y+z}{2}\right)^2} &= \sqrt{\frac{(x-y)^2}{4} + \frac{z^2 + 1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{(y-z)^2}{4} + \frac{x^2 + 1}{2}} \\ &\geq \frac{(x-y)(z-y)}{4} + \frac{\sqrt{(x^2 + 1)(z^2 + 1)}}{2} \geq \frac{(x-y)(z-y)}{4} + \frac{xz + 1}{2} = \frac{y^2 + xz - yz - xy}{4} + \frac{xz + 1}{2} \end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức tương tự ta được:

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y+z}{2}\right)^2} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)}{4} + \frac{xy + yz + zx + 3}{2}$$

$$\text{Hay } \sum_{\text{cyc}} \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y+z}{2}\right)^2} \geq \frac{7}{4} + \frac{xy + yz + zx}{4}.$$

$$x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

Câu 3. $(x^2 + y) \cdot (y^2 + x) = 2(x - y)^3$ (1)

Nếu $x = 0$ thì $y = 0$ và ngược lại. Ta xét x, y nguyên dương. Từ (1) suy ra $x > y$.

Biến đổi (1):

$$4(x^2 + y) \cdot (y^2 + x) = 8(x - y)^3 \Leftrightarrow (x^2 + y + y^2 + x)^2 - (x^2 + y - y^2 - x)^2 = 8(x - y)^3$$

Mà $x^2 + y - y^2 - x = (x - y)(x + y - 1)$ nên ta được

$$(x^2 + y + y^2 + x)^2 = (x - y)^2 [8(x - y) + (x + y - 1)^2]$$

Do đó $8(x - y) + (x + y - 1)^2$ là số chính phương

Ta có: $(x + y - 1)^2 < 8(x - y) + (x + y - 1)^2 < (x + y + 3)^2$ (2)

Mặt khác từ (1) suy ra x, y cùng tính chẵn lẻ.

Kết hợp với (2) và $8(x - y) + (x + y - 1)^2$ lẻ

$$\Rightarrow 8(x - y) + (x + y - 1)^2 = (x + y + 1)^2 \Leftrightarrow x = 3y$$

Khi đó $(x^2 + y) \cdot (y^2 + x) > x^3 = 27y^3$ và $2(x - y)^3 = 16y^3$ mâu thuẫn với (1)

Vậy (1) có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; 0)$.

Câu 4. a) Gọi M là trung điểm của BC thì $OM \perp BC$

mà $OA \perp AT$ suy ra tứ giác AOMT nội

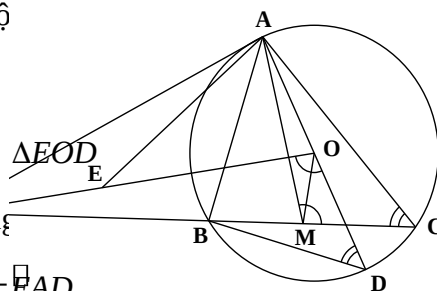
$$\Rightarrow \angle AOT = \angle AMT \Rightarrow \angle EOD = \angle AMC$$

Kết hợp với $\angle BDA = \angle ACB \Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle EOD$

Mà M là trung điểm của BC, O là trung

của AD $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EAD \Rightarrow \angle ABC = \angle EAD$

Mà $\angle ABC = \angle ADC \Rightarrow \angle EAD = \angle ADC \Rightarrow AE \parallel CD$ (ĐPCM).

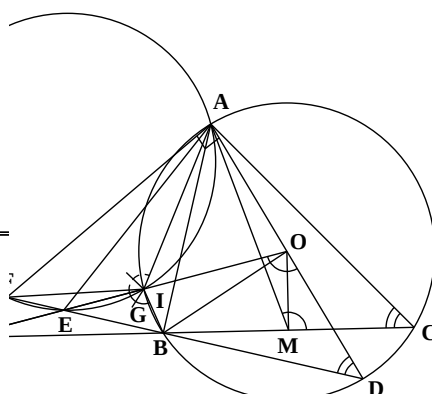


b) Từ phần a) ta có: $\angle PAE = \angle BAC$

$$\Rightarrow \angle PGE = \angle BGC = \angle PBT$$

$\Rightarrow$ Tứ giác FGBT nội tiếp

Từ đó $\angle FGB = \angle FBT = \angle EGA$.



Do đó GO là phân giác AGB

Mặt khác $OA = OB$ suy ra O là giao điểm

phân giác trong góc AGB và trung trực của

AB. Do đó tứ giác AGBO nội tiếp

Gọi I là giao điểm của đoạn GO với (O).

Do $OA = OB = OI$ suy ra I chính là tâm nội tiếp $\triangle AGB \Rightarrow \text{ĐPCM}$.

Câu 5. a) Với $k = 3$ ta chỉ ra cách phân hoạch tập $\mathbb{Z}^+$ thành 3 tập A_1, A_2, A_3 thỏa mãn như sau:

$$A_1 = \{1; 2; 3\} \cup \{3m \mid m \geq 4\};$$

$$A_2 = \{4; 5; 6\} \cup \{3m - 1 \mid m \geq 4\};$$

$$A_3 = \{7; 8; 9\} \cup \{3m - 2 \mid m \geq 4\}.$$

Vậy $k=3$ là đẹp.

b) Xét $k \geq 4$.

Giả sử tồn tại cách chia $\mathbb{Z}^+$ thành k tập $A_1, A_2, \dots, A_k$ thỏa mãn đề bài

Khi đó phân hoạch $\mathbb{Z}^+$ thành 4 tập A_1, A_2, A_3 và $(A_4 \cup A_5 \cup \dots \cup A_k)$ cũng thỏa mãn đề bài. Do vậy chỉ cần xét với $k = 4$ là đủ.

Đặt $B_i = A_i \cap \{1; 2; 3; \dots; 23\}$ với $i = 1; 2; 3; 4$.

Ta thấy mỗi số thuộc tập $\{15; 16; 17; \dots; 24\}$ (gồm 10 số) đều viết được thành tổng của hai số thuộc tập B_i (với mọi $i = 1; 2; 3; 4$).

Như vậy nếu $|B_i| = m$ thì tổng là $C_m^2 \geq 10 \Rightarrow m \geq 5$.

Vậy mỗi tập B_i đều có ít nhất 5 phần tử.

Mà $|B_1| + |B_2| + |B_3| + |B_4| = 23$ nên không thể xảy ra $|B_i| \geq 6, \forall i = 1; 2; 3; 4$

Do đó phải tồn tại tập B_i sao cho $|B_i| = 5$. Giả sử $B_i = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5\}$.

Khi đó $\{a_i + a_j; 1 \leq i < j \leq 5\} = \{15; 16; 17; \dots; 24\}$.

Suy ra $\sum_{1 \leq i < j \leq 5} (a_i + a_j) = 15 + 16 + 17 + \dots + 24$ hay $4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 195$, vô lý.

Vậy mọi $k \geq 4$ đều không đẹp.

Câu 1. a) Ta có: $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+1} = 2x^2 - x - 3$ (1)

Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}$ (*)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+1}} = (2x-3)(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=0 & (2) \\ \frac{1}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+1}} = x+1 & (3) \end{cases}$$

Khi đó

Từ $(2) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (thỏa (*)).

Vì $x \geq \frac{2}{3}$ nên $\frac{1}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+1}} < 1$ và $x+1 > 1 \Rightarrow (3)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = \frac{3}{2}$.

b) Ta có:
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = \frac{8}{y^3} - \frac{8}{y} & (1) \\ y^2 + 4 = 5y^2(x^2 + 2x + 2) \end{cases}$$

Điều kiện: $y \neq 0$ (*)

Khi đó
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x^2 + 2x - 15) = \frac{2}{y} \left(\frac{4}{y^2} - 4 \right) \\ 1 + \frac{4}{y^2} = 5[(x+1)^2 + 1] \end{cases}$$

Đặt $a = x+1, b = \frac{2}{y} (b \neq 0)$, hệ trên trở thành:

$$\begin{cases} a(a^2 - 16) = b(b^2 - 4) \\ 1 + b^2 = 5(a^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 16a - 4b \\ b^2 - 5a^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow a^3 - b^3 = (b^2 - 5a^2)(4a - b)$$

$$\Leftrightarrow 21a^3 - 5a^2b - 4ab^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } a = -\frac{b}{3} \text{ hoặc } a = \frac{4b}{7}.$$

Thay $a = 0$ vào (2) được $b^2 = 4$ và tìm được hai nghiệm $(-1; -1), (-1; 1)$.

Thay $a = -\frac{b}{3}$ vào (2) được $b^2 = 9$ và tìm được hai nghiệm $\left(-2; \frac{2}{3}\right), \left(0; -\frac{2}{3}\right)$.

Thay $a = \frac{4b}{7}$ vào (2) được $-\frac{31}{49}b^2 = 4$ (vô nghiệm).

Kết luận đúng.

Câu 2. a) $u_1 = \frac{2014}{2013}, 2u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\frac{1}{u_k + 2} = \frac{u_k}{u_k(u_k + 2)} = \frac{1}{u_k} - \frac{2}{u_k(u_k + 2)} = \frac{1}{u_k} - \frac{2}{2u_{k+1}} = \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} \Rightarrow S_n = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{k+1}}; (u_1 > 1).$$

Chứng minh: $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2u_n}{2} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ tăng.

Giả sử (u_n) bị chặn trên thì (u_n) tồn tại giới hạn hữu hạn: $\lim u_n = a (a \geq 1)$.

$$\Rightarrow 2a = a^2 + 2a \Rightarrow a = 0. \text{ Mâu thuẫn với } a \geq 1 \Rightarrow \lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \left(\frac{1}{u_{n+1}} \right) = 0.$$

$$\lim S_n = \frac{1}{u_1} = \frac{2013}{2014}.$$

Vậy:

b) $f(3x - y + \alpha) = 3f(x) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$

Trong (1) thay $x = y = \frac{3x' - y'}{2}$ ta được $f(3x' - y' + \alpha) = 2f\left(\frac{3x' - y'}{2}\right), \forall x', y' \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(3x - y + \alpha) = 2f\left(\frac{3x - y}{2}\right), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $f\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y\right) = \frac{3}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$

Thay $x = 0, y = 0$ vào (3) ta được: $f(0) = \frac{3}{2}f(0) - \frac{1}{2}f(0) \Rightarrow f(0) = b, b$ tùy ý.

$$(3) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y\right) - f(0) = \frac{3}{2}[f(x) - f(0)] - \frac{1}{2}[f(y) - f(0)], \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$, ta có: $g(0) = 0$ và:

$$\Rightarrow g\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y\right) = g\left(\frac{3}{2}x\right) + g\left(-\frac{1}{2}y\right), \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x + y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Vì g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên:

$$g(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ với } g(1) = a \text{ (a tùy ý)} \Rightarrow f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R} \quad (4) \text{ (với a, b tùy ý)}$$

Thay (4) vào (1) ta được: $b = a\alpha$

Vậy $f(x) = ax + a\alpha$, với a tùy ý.

Câu 3. a) $T = MA.h_a + MB.h_b + MC.h_c$

Ta có: $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a}, h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2}{b}, h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2}{c}$

$$\Rightarrow T = 2 \left(\frac{MA.GA}{a.GA} + \frac{MB.GB}{b.GB} + \frac{MC.GC}{c.GC} \right) = 3 \left(\frac{MA.GA}{a.m_a} + \frac{MB.GB}{b.m_b} + \frac{MC.GC}{c.m_c} \right)$$

$$a.m_a = \frac{1}{2} a \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{3a^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)} \Rightarrow a.m_a \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{Tương tự: } b.m_b \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}, c.m_c \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$$

$$T \geq \frac{6\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} (MA.GA + MB.GB + MC.GC) \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

$$\begin{aligned} \vec{MA}.GA + \vec{MB}.GB + \vec{MC}.GC &\geq \vec{MA}.GA + \vec{MB}.GB + \vec{MC}.GC \\ &= (\vec{MG} + \vec{GA}).GA + (\vec{MG} + \vec{GB}).GB + (\vec{MG} + \vec{GC}).GC \end{aligned}$$

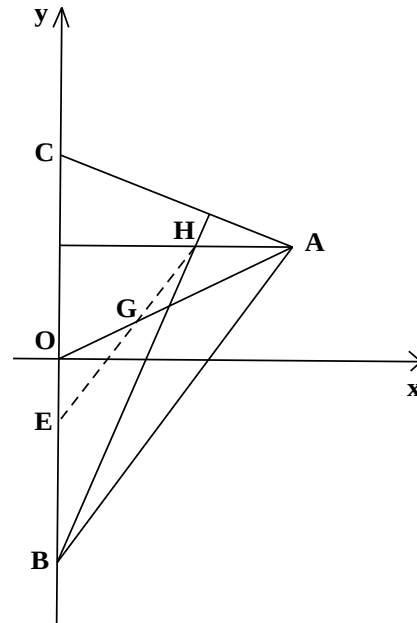
$$= GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9} (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{MA}, \vec{GA}$ cùng hướng, $\vec{MB}, \vec{GB}$ cùng hướng, $\vec{MC}, \vec{GC}$ cùng hướng
 $\Leftrightarrow M$

trùng G .

Từ (1) và (2) suy ra: $T \geq 2\sqrt{3}$. vậy $\min T = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều và M trùng G .

b) Xây dựng hệ tọa độ như hình vẽ.



Đặt $BC = 2b (b > 0)$, ta có: $B(0; -b), C(0; b)$

Giả sử $A(x_0; y_0) (x_0 \neq 0)$. Ta có: $G\left(\frac{x_0}{3}; \frac{y_0}{3}\right)$.

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = y_0 \\ x_0 x + (y_0 - b)(y + b) = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{b^2 - y_0^2}{x_0}; y_0\right)$$

E là điểm đối xứng với H qua G khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x_E = 2x_G - x_H = \frac{2x_0}{3} - \frac{b^2 - y_0^2}{x_0} \\ y_E = 2y_G - y_H = -\frac{y_0}{3} \end{cases}$$

$$E \in BC \Leftrightarrow x_E = 0 \Leftrightarrow \frac{2x_0}{3} - \frac{b^2 - y_0^2}{x_0} = 0 \Leftrightarrow 2x_0^2 + 3y_0^2 = 3b^2 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{3b^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_0^2}{3b^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm A trong mặt phẳng Oxy là elip: loại trừ 2 điểm B, C.

Vậy tập hợp các điểm A là elip có trục nhỏ BC; trục lớn có độ dài bằng $\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot BC$; loại trừ B, C.

Câu 4. a) $a + 2b = c$ (1), $a^3 + 8b^3 = c^2$ (2)

Từ (2) $\hat{U} (a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2) = c^2$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra: (2) $\hat{U} a^2 - 2ab + 4b^2 = (a + 2b) \hat{U} 4b^2 - 2(a + 1)b + a^2 - a = 0$ (4)

$D' = (a + 1)^2 - 4(a^2 - a) = -3a^2 + 6a + 1$.

(4) có nghiệm $\hat{U} D' \geq 0 \hat{U} 3a^2 - 6a \leq 1 \hat{U} 3(a - 1)^2 \leq 4 \hat{U} a = 1$ hoặc $a = 2$ (vì $a \in \mathbb{N}^*$).

+) $a = 1 \Rightarrow b = 1, c = 3$.

+) $a = 2 \Rightarrow b = 1, c = 4$.

Vậy $(a, b, c) = (1; 1; 3)$ hoặc $(a, b, c) = (2; 1; 4)$.

b) Giả sử: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Ta có: $f(a + b) - f(a) = a_n \frac{(a + b)^n}{b} - a_n \frac{a^n}{b} + a_{n-1} \frac{(a + b)^{n-1}}{b} - a_{n-1} \frac{a^{n-1}}{b} + \dots + a_1 b$

$= a_n b \frac{(a + b)^{n-1}}{b} + a(a + b)^{n-2} + \dots + a^{n-2}(a + b) + a^{n-1} \frac{b}{b} + a_{n-1} b \frac{(a + b)^{n-2}}{b} + a(a + b)^{n-3} + \dots$
 $+ a^{n-3}(a + b) + a^{n-2} \frac{b}{b} + \dots + a_1 b$.

Suy ra: $f(a + b) - f(a)$ chia hết cho b.

Mà $f(a+b)$ chia hết cho b nên $f(a)$ chia hết cho b . Tương tự, $f(b)$ chia hết cho a .

Câu 5. Đặt P là vế trái của bất đẳng thức đã cho và:

$$Q = \frac{b^{2^k}}{(a+b)(a^2+b^2)\dots(a^{2^{k-1}}+b^{2^{k-1}})} + \frac{c^{2^k}}{(b+c)(b^2+c^2)\dots(b^{2^{k-1}}+c^{2^{k-1}})} \\ + \frac{a^{2^k}}{(c+a)(c^2+a^2)\dots(c^{2^{k-1}}+a^{2^{k-1}})}$$

Ta có: $P - Q = (a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$

Đ 2P = P + Q = $\frac{a^{2^k} + b^{2^k}}{(a+b)(a^2+b^2)\dots(a^{2^{k-1}}+b^{2^{k-1}})} + \frac{b^{2^k} + c^{2^k}}{(b+c)(b^2+c^2)\dots(b^{2^{k-1}}+c^{2^{k-1}})} \\ + \frac{c^{2^k} + a^{2^k}}{(c+a)(c^2+a^2)\dots(c^{2^{k-1}}+a^{2^{k-1}})}$.

Ta có: $2(a^2+b^2)^3 (a+b)^2$

$2(a^4+b^4)^3 (a^2+b^2)^2$

...

$2(a^{2^k}+b^{2^k})^3 (a^{2^{k-1}}+b^{2^{k-1}})^2$.

Suy ra $\frac{a^{2^k} + b^{2^k}}{(a+b)(a^2+b^2)\dots(a^{2^{k-1}}+b^{2^{k-1}})} \geq \frac{a+b}{2^k}$

Tương tự với các số hạng khác của $P + Q$, suy ra:

$2P \geq \frac{a+b}{2^k} + \frac{b+c}{2^k} + \frac{c+a}{2^k}$ Đ 2P $\geq \frac{a+b+c}{2^k} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{2^k} = \frac{3}{2^{k-1}}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

ĐỀ SỐ 46

Câu 1. a) Điều kiện: $\cos x \neq \frac{1}{2} \wedge x \neq \frac{\pm\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin x - \sqrt{3} \cos 2x)(4 \cos^2 x - 1)}{(2 \cos x - 1)^2} = \sin x (2 \cos x + 1)$$

Phương trình

$$\Leftrightarrow 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3} \cos 2x = \sin x (2 \cos x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-1}{2} \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pm 2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin x \quad \Leftrightarrow \sin 2x + \frac{\pi}{3} = \sin x (1)$$

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ &= -\frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Giải (1) ta có

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x < \frac{15 - \sqrt{221}}{2} \\ x &> \frac{15 + \sqrt{221}}{2} \end{aligned}$$

b) Điều kiện:

$$\sqrt{5} - 2 = (\sqrt{5} + 2)^{-1}; 9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2$$

Ta thấy

$$\log_{\sqrt{5}-2}(x - \sqrt{x} + 1) + \log_{9+4\sqrt{5}}(2x^2 - 30x + 2) = 0$$

nên

$$\hat{U} - \log_{\sqrt{5}+2}(x - \sqrt{x} + 1) + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}+2}(2x^2 - 30x + 2) = 0$$

$$\hat{U} \log_{\sqrt{5}+2}(x - \sqrt{x} + 1) = \log_{\sqrt{5}+2}(2x^2 - 30x + 2) \hat{U} x - \sqrt{x} - 1 = \sqrt{2x^2 - 30x + 2} \quad (1)$$

Ta thấy $x = 0$ không thỏa mãn (1).

$$\text{Với } x > 0, \text{ chia 2 vế của (1) cho } \sqrt{x} \text{ ta được } \hat{U} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \sqrt{2x + \frac{1}{x} - 30} \quad (2)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = t \quad (t \geq 2) \text{ . Phương trình (2) trở thành:}$$

$$\sqrt{2t^2 - 34} = t - 1 \hat{U} 2t^2 - 34 = t^2 - 2t + 1 \hat{U} t^2 + 2t - 35 = 0 \quad \begin{matrix} t = 5 \\ t = -7 \end{matrix}$$

Đối chiếu với điều kiện chọn $t = 5$.

$$\text{Ta có } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 5 \hat{U} x + \frac{1}{x} = 25 \hat{U} x^2 - 23x + 1 = 0 \hat{U} x = \frac{23 \pm 5\sqrt{21}}{2}$$

$$x = \frac{23 \pm 5\sqrt{21}}{2}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có

Câu 2. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4mx^2 = 4x(x^2 - m) \hat{U} y' = 0 \hat{U} \begin{matrix} x = 0 \\ x^2 = m \end{matrix}$$

Để hàm số (1) có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\hat{U} m > 0$.

$$\text{Khi đó } y' = 0 \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x^2 = m \end{matrix} \hat{U} \begin{matrix} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{matrix}$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow y = m^2 - m; x = \pm\sqrt{m} \Rightarrow y = -m$$

Vậy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị: $A(0; m^2 - m); B(-\sqrt{m}; -m); C(\sqrt{m}; -m)$.

Ta có $AB = AC = \sqrt{m^4 + m}; BC = 2\sqrt{m}$ và A, B, C không thẳng hàng nên $\triangle ABC$ cân tại A .

Trường hợp 1. $\angle BAC = 30^\circ$

Áp dụng định lý cô sin ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 30^\circ$.

$$\hat{U} \quad 4m = 2(m^4 + m) - \sqrt{3}(m^4 + m) \quad \hat{U} \quad (2 - \sqrt{3})m^4 = (2 + \sqrt{3})m$$

$$\hat{U} \quad m^3 = (2 + \sqrt{3})^2 \quad (\text{do } m > 0) \quad \hat{U} \quad m = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{3})^2} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Trường hợp 2. $\angle ABC = 30^\circ$ hoặc $\angle ACB = 30^\circ \Rightarrow \angle BAC = 120^\circ$

Áp dụng định lý cô sin ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ$.

$$\hat{U} \quad 4m = 2(m^4 + m) + (m^4 + m) \quad \hat{U} \quad 3m^4 = m$$

$$\hat{U} \quad m^3 = \frac{1}{3} \quad (\text{do } m > 0) \quad \hat{U} \quad m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

$$\text{Vậy} \quad \hat{U} \quad m = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{3})^2}; \quad \hat{U} \quad m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Câu 3.a) Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

$$m(\sqrt{1-x} - 3\sqrt{1+x})^3 - 16x - 12\sqrt{1-x^2} + 2m + 15$$

$$\hat{U} \quad 2\sqrt{1-x} - 6\sqrt{(1-x)(1+x)} + (1-x) + m(3\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + 2) - 5 \leq 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } 3\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = t, \quad (1) \text{ trở thành } 2t^2 + m(t+2) - 5 \leq 0 \quad (2)$$

$$\text{Xem } t \text{ là hàm số của } x, \text{ ta có } t' = \frac{3}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0 \quad x \in (-1; 1)$$

$$\forall t(-1) = -\sqrt{2}; t(1) = 3\sqrt{2} \text{ nên } -\sqrt{2} \leq t \leq 3\sqrt{2} \text{ và mỗi } t \in [-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}] \text{ có duy nhất}$$

$$x \in [-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$$

Do đó bài toán tương đương tìm m để bất phương trình (2) nghiệm đúng $t \in [-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$

$$\text{Do } t+2 > 0 \quad t \in [-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}] \text{ nên } (2) \hat{U} \quad m \leq \frac{-2t^2 + 5}{t+2}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{-4t(t+2) - (-2t^2 + 5)}{(t+2)^2} = \frac{-2t^2 - 8t - 5}{(t+2)^2} < 0 \quad t \in [-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$$

$$\text{Do đó } \min_{t \in [-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]} f(x) = f(3\sqrt{2}) = \frac{-31}{3\sqrt{2} + 2}$$

$$m \leq f(t) \quad t \in [-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}] \hat{U} \quad m \leq \min_{t \in [-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]} f(t) \hat{U} \quad m \leq \frac{-31}{3\sqrt{2} + 2}.$$

$$\text{b) Hệ đã cho } \begin{cases} x^7 = (3y+1)^2 \\ y^7 = (3x+1)^2 \end{cases} \text{ P } \begin{cases} x^3 = 0 \\ y^3 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do } x, y^3 = 0 \text{ P } x^7, y^7 = 1 \text{ P } x, y^3 = 1.$$

$$\text{Từ hệ đã cho ta có: } x^7 + (3x+1)^2 = y^7 + (3y+1)^2 (*)$$

$$+ \text{) Nếu } x > y \text{ ta có } VT(*) > VP(*) \text{ do } x, y^3 = 0$$

$$+ \text{) Nếu } x < y \text{ ta có } VT(*) < VP(*) \text{ do } x, y^3 = 0$$

$$+ \text{) Nếu } x = y \text{ thỏa mãn } (*)$$

$$\text{Với } x = y \text{ ta có } x^7 = (3x+1)^2 \text{ P } \sqrt{x^7} = 3x+1 \text{ (do } x^3 = 0) \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh phương trình (1) có nghiệm duy nhất } x^3 = 1.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t \text{ (} t^3 = 1 \text{)}, \text{ phương trình (1) trở thành } f(t) = t^7 - 3t^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Ta có hàm số } f(t) \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ và } f'(t) = 7t^6 - 6t > 0 \text{ " } t^3 = 1$$

$$\text{Lại có } f(1).f(2) < 0 \text{ nên phương trình } f(t) = 0 \text{ có nghiệm duy nhất thuộc } (1; 2)$$

$$\text{Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất } x^3 = 1.$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm duy nhất.}$$

$$\text{Chú ý : Ta có thể giải như sau : } x^7 = 9x^2 + 6x + 1 \text{ P } \frac{2x^7}{x^5} + 6\frac{x^6}{x^4} + 9\frac{x^5}{x^3} - 1 = 0$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = t^7 + 6t^6 + 9t^5 - 1, t > 0 \text{ ta có ĐPCM.}$$

$$\text{Câu 4. Gọi I và K lần lượt là hình chiếu của H trên MC và SI. Vì } MC \wedge (SHI) \text{ nên } MC \wedge HK \text{ do đó}$$

$$HK \wedge (SMC) \text{ P } HK = d(H; (SMC))$$

$$\text{Ta có : } S_{MHC} = S_{ABCD} - S_{AHM} - S_{BHC} - S_{CMD} = \frac{3a^2}{8}$$

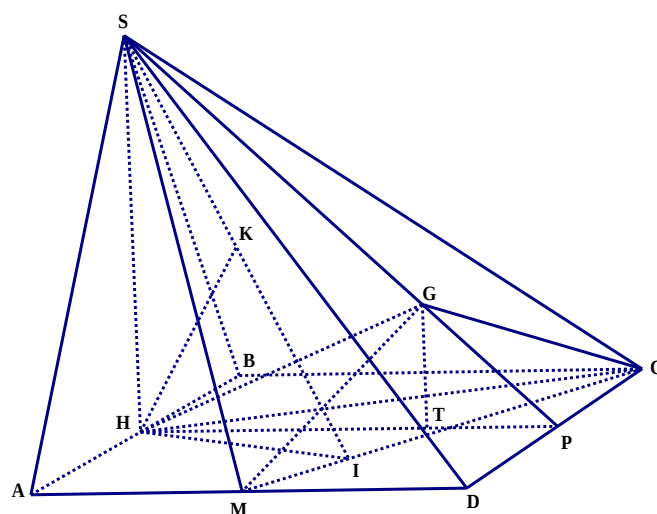
$$\text{Mặt khác } CM = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ nên}$$

$$HI = \frac{2S_{HMC}}{MC} = \frac{\frac{3a^2}{4}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{3\sqrt{5}a}{10}$$

$$\text{Xét tam giác vuông, ta có : } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HS^2}$$

$$\text{P } HS = \frac{HI \cdot HK}{\sqrt{HI^2 - HK^2}} = \frac{3a\sqrt{15}}{20}$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } HK = \frac{3a\sqrt{15}}{20}$$



$$S_{\text{BCMH}} = S_{\text{ABCD}} - S_{\text{AHM}} - S_{\text{CMD}} = \frac{5a^2}{8}$$

Gọi P là trung điểm của CD và T là hình chiếu vuông góc của G lên (ABCD).

$$V_{\text{I}}(\text{SHP}) \wedge (\text{ABCD}) \text{ nên } T \in \text{HP}, \text{ do đó } GT = \frac{1}{3}SH = \frac{a\sqrt{15}}{10}$$

$$\text{Vậy } V_{\text{G.BCMH}} = \frac{1}{3}GT.S_{\text{BCMH}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{10} \cdot \frac{5a^2}{8} = \frac{a^3\sqrt{15}}{48} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 5. Từ giả thiết ta có :

$$3\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = (x+y) + 3\frac{x}{y} + \frac{1}{y} + 2 \quad 2\sqrt{3(x+y)\left(\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\right)} + 2$$

$$3\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\sqrt{3\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} + 6 + 2 \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}$$

$$\begin{cases} x+y = 3\frac{x}{y} + \frac{1}{y} \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} x=3; y=1 \\ x=1; y=3 \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$P = (x^2 - 2xy + y^2)\left(\frac{x^2}{y^4} + \frac{y^2}{x^4} - \frac{3}{xy}\right) = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - 2\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 6$$

Đặt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t$, ta có $t = \frac{10}{3}$ và $P = t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 3t + 6$.

Đặt $f(t) = t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 3t + 6$, $t = \frac{10}{3}$

$$f'(t) = 4t^3 - 6t^2 - 6t + 3 = 2t^2(t-3) + 2t(t^2-3) + 3 > 0 \quad \text{với } t = \frac{10}{3}.$$

Do đó $f(t) \geq f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{2596}{81}$, dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{10}{3}$ hay $\begin{cases} x=3, y=1 \\ x=1, y=3 \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $\frac{2596}{81}$.

ĐỀ SỐ 47

Câu 1. a) Đồ thị (C_m) tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^4 - (2m+1)x^2 + 2m = 0 & (1) \\ 4x^3 - 2(2m+1)x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 - (2m+1)x^2 + 2m = 0 & (1) \\ 4x^3 - 2(2m+1)x = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) tương đương $x=0$ hoặc $x^2 = \frac{2m+1}{2}$.

+) Với $x=0$ thay vào hệ ta được $\begin{cases} x=0 \\ m=0 \end{cases}$.

Vậy với $m = 0$ thì đồ thị (C_m) tiếp xúc với trục hoành tại một điểm (không thỏa mãn).

+) Với $x^2 = \frac{2m+1}{2}$ thay vào (1) ta tìm được $m = \frac{1}{2}$.

Thay $m = \frac{1}{2}$ vào hệ ta tìm được $x = \pm 1$.

Với $m = \frac{1}{2}$ thì đồ thị (C_m) tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt.

b) Lấy hai điểm phân biệt $M(a; \frac{2a}{a-1})$ và $N(b; \frac{2b}{b-1})$ thuộc đồ thị (C)

$$a^2 + \frac{4a^2}{(a-1)^2} = b^2 + \frac{4b^2}{(b-1)^2} \quad (3)$$

$$\begin{cases} OM = ON \\ OM \cdot ON = 0 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} ab + \frac{4ab}{(a-1)(b-1)} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

DOMN vuông cân tại O khi và chỉ khi

$$(a-1)(b-1) = -4$$

Từ (4) suy ra $ab = 0$.

Nếu $ab = 0$ suy ra M hoặc N trùng với O (không thỏa mãn).

Biến đổi phương trình (3) thành $5(a+b) - 2ab = 0$.

$$\begin{cases} (a-1)(b-1) = -4 \\ 5(a+b) - 2ab = 0 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} a = -5 \\ b = \frac{5}{3} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ b = -5 \end{cases}$$

Ta được hệ:

$$M_1(-5; \frac{5}{3}); N_1(\frac{5}{3}; -5) \quad \text{hoặc} \quad M_2(\frac{5}{3}; -5); N_2(-5; \frac{5}{3})$$

Vậy ta tìm được các cặp điểm

Câu 2. a) Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sin \frac{\pi}{6} - 4x \sin \frac{\pi}{6} + (\sin 3x + \sin x) = 0 \quad \hat{U} \quad -2 \cos \frac{\pi}{6} - 2x \sin 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos x = 0$$

$$\begin{cases} 2 \sin 2x \cos x - \cos \frac{\pi}{6} - 2x \sin 2x = 0 \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{\pi}{6} - k2\pi \end{cases}$$

b) Phương trình đã cho tương đương với:

$$\hat{U} \quad 2^{1-2|x-2|} \cdot \log_3(x^2 - 4x + 6) = 2^{-x^2+4x-3} \cdot \log_3(2|x-2|+2)$$

$$\hat{U} \quad 2^{x^2-4x+3} \cdot \log_3(x^2 - 4x + 6) = 2^{2|x-2|+1} \cdot \log_3(2|x-2|+2)$$

$$\hat{U} \quad 2^{x^2-4x+6} \cdot \log_3(x^2 - 4x + 6) = 2^{2|x-2|+2} \cdot \log_3(2|x-2|+2) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_3 t$ trên $[2; +\infty)$ ta có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \log_3 t + 2^t \cdot \frac{1}{t \cdot \ln 3} > 0, \forall t \geq 2$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$.

Khi đó (*) $\hat{U} f(x^2 - 4x + 6) = f(2|x - 2| + 2)$

$$\hat{U} x^2 - 4x + 6 = 2|x - 2| + 2 \hat{U} (x - 2)^2 - 2|x - 2| = 0$$

Giải phương trình trên được tập nghiệm phương trình đã cho $\{0; 2; 4\}$.

Câu 3: a) Điều kiện $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} (u, v \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{u} - \sqrt{v} = 2 \\ \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases}$$

Đặt

$$\hat{U} \begin{cases} u + v = 4 + 2\sqrt{uv} \end{cases} \quad (1)$$

$$\hat{U} \begin{cases} \sqrt{\frac{(u + v)^2 - 2uv + 2}{2}} = 3 + \sqrt{uv} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Thế (1) vào (2) ta được } \sqrt{\frac{(4 + 2\sqrt{uv})^2 - 2uv + 2}{2}} = 3 + \sqrt{uv} \Rightarrow \sqrt{uv} = 0$$

+) Với $u = 0 \Rightarrow v = 4$ (loại)

+) Với $v = 0 \Rightarrow u = 4 \Rightarrow x = y = 2$ (thỏa mãn).

$$\text{b) } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x \sqrt{2 + \sin 2x}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{2 \tan^2 x + 2 \tan x + 2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\tan x)}{\sqrt{\tan x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \frac{3}{4}}}$$

$$\tan x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan u, u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; \frac{1}{2} du \tan x = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 u) du$$

Đặt

$$x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{\pi}{3}$$

Đổi cận

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 + \tan^2 u) du}{\sqrt{\tan^2 u + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan^2 u + 1} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos u} du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln \left| \frac{1 + \sin u}{1 - \sin u} \right| \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

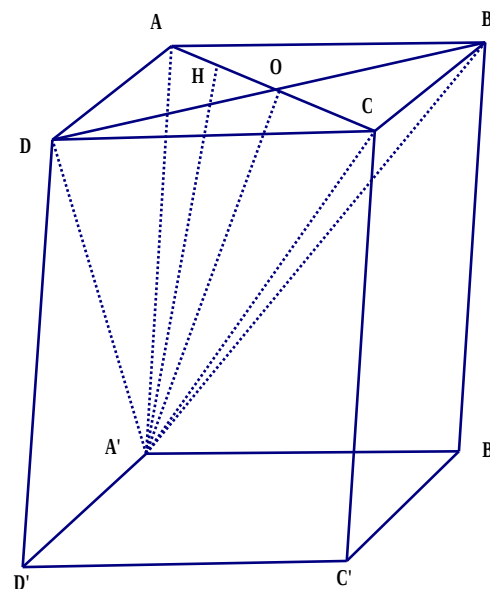
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sin u}{1 - \sin u} \right| \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}$$

Câu 4.1. a) Chứng minh được tam giác $A'BD$ đều cạnh bằng a .

Suy ra tứ diện $A'ABD$ là tứ diện đều cạnh a .

$$V_{A'ABD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

Tính được thể tích $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$ Chỉ ra được thể tích khối hộp bằng sáu lần $V_{A'ABD}$. Do vậy thể tích khối hộp bằng $\frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$.



b) Gọi H là trọng tâm của $\triangle ABD$.

Theo chứng minh trên ta có tứ diện $A'ABD$ là tứ diện đều suy ra

$A'H$ vuông góc với mặt phẳng (ABD) .

Góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\angle A'CA$.

$$A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}; CH = \frac{2a}{\sqrt{3}}; A'C = a\sqrt{2}.$$

Xét $\triangle A'HC$ ta có

$$\cos \angle A'CA = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Tính được

2. a) Tâm $I(1; 1; -2)$, bán $R = 5$, $d(I; (P)) = 3 < R$ nên (P) cắt (S) theo một đường tròn (C) bán kính $r = 4$. Tâm H của (C) là hình chiếu của I lên (P) , (P) có VTPT $n = (1; -2; 2)$, viết phương trình đường thẳng IH từ đó tìm được $H(2; -1; 0)$.

b) Gọi $u = (a; b; c)^T \neq 0$ là một VTCP của Δ ; $u_1 = (1; -2; 0)$ là một VTCP của d .

Ta có $u \wedge u_1$ nên $a - 2b = 0$ (1)

$$\text{Góc } (\Delta; (P)) = 30^\circ \text{ nên } (\Delta; IH) = 60^\circ \text{ hay } \left| \cos(\vec{n}, u) \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|a - 2b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{7}c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 3\sqrt{5}b \quad (*)$$

$$\text{Từ (1) được } 16c^2 = 9(5b^2 + c^2) \Rightarrow \frac{\sqrt{7}c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = -3\sqrt{5}b \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ chọn } a = 14, b = 7, c = -3\sqrt{35}. \text{ Viết } \Delta_1: \frac{x-1}{14} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+2}{3\sqrt{35}}$$

$$\text{Từ } (**) \text{ chọn } a = 14, b = 7, c = -3\sqrt{35}. \text{ Viết } \Delta_1: \frac{x-1}{14} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+2}{-3\sqrt{35}}$$

$$\text{Câu 5: } \frac{a+c}{a+d} \neq \frac{a+\frac{2}{3}}{a+d} = 1 + \frac{\frac{2}{3}-d}{a+d} \neq \frac{7}{3(1+2d)};$$

$$\frac{c+d}{a+b} \neq \frac{\frac{2}{3}+d}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(3d+2)$$

$$T \neq 16 \cdot \frac{49}{9(2d+1)^2} + 25 \frac{(3d+2)^2}{9} = \frac{1}{9}f(d)$$

Vậy

$$f'(d) = \frac{150(3d+2)(2d+1)^3 - 3136}{(2d+1)^3} > 0, "d \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Suy ra } f(d) \text{ đồng biến, từ đó } f(d) \neq f\left(\frac{2}{3}\right) = 544$$

$$\text{Kết luận } \max T = \frac{544}{9} \quad \wedge \quad a = b = \frac{1}{2}; c = d = \frac{2}{3}.$$

ĐỀ SỐ 48

$$\text{Câu 1. a)} \quad 2\sin 3x(1 - 4\sin^2 x) = 1 \quad \wedge \quad 2\sin 3x(4\cos^2 x - 1) = 0 \quad (1)$$

$$\cos x = 0 \quad \wedge \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

+) Xét thay vào (1) không thỏa mãn.

$$\cos x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

+) Xét .

Nhân hai vế của (1) với $\cos x$ ta được :

$$2\sin 3x \cdot \cos 3x = \cos x \quad \wedge \quad \sin 6x = \sin \frac{\pi}{2} - x \quad \wedge \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7}; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \end{cases}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Kết hợp ta được tập nghiệm

$$x = \frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7}; x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}, k \in 7n+5; k \in 5n+1; k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) Lấy hai điểm phân biệt } M\left(a; \frac{2a}{a-1}\right); N\left(b; \frac{2b}{b-1}\right) (a \neq 1, b \neq 1, a \neq b) \text{ thuộc đồ thị (C).}$$

$$\Delta OMN \text{ vuông cân tại O khi và chỉ khi } \begin{cases} OM = ON \\ OM \cdot ON = 0 \end{cases}$$

$$\wedge \quad a^2 + \frac{4a^2}{(a-1)^2} = b^2 + \frac{4b^2}{(b-1)^2} \quad (3)$$

$$\wedge \quad ab + \frac{4ab}{(a-1)(b-1)} = 0 \quad (4)$$

$$\begin{cases} (a-1)(b-1) = -4 \\ ab = 0 \end{cases}$$

Từ (4) suy ra

Nếu $ab = 0$ suy ra M hoặc N trùng với O (không thỏa mãn).

Biến đổi phương trình (3) thành $5(a + b) - 2b = 0$

$$(a - 1)(b - 1) = -4$$

Ta được hệ $5(a + b) - 2ab = 0$

$$a = -5$$

$$b = \frac{5}{3}$$

Giải hệ được $a = \frac{5}{3}$; $b = -5$

Vậy ta tìm được cặp điểm : $M_1(\frac{5}{3}; 5); N_1(5; \frac{5}{3})$ hoặc $M_2(\frac{5}{3}; -5); N_2(-5; \frac{5}{3})$

Xem thêm tại Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>
