

ĐỀ ÔN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI DỰ THI CẤP HUYỆN
MÔN: TOÁN - LỚP 9

Thời gian làm bài 120 phút không kể thời gian giao đề

$$A = \left(\frac{3x + \sqrt{9x - 3}}{x + \sqrt{x - 2}} + \frac{1}{\sqrt{x - 1}} + \frac{1}{\sqrt{x + 2}} - 2 \right) : \frac{1}{x - 1} \text{ với}$$

Bài 1. (5,0 điểm) Cho biểu thức:

$a > 0, a \neq 1.$

a) Chứng minh rằng $M > 4.$

b) Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Bài 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 - 9x + 4} + 3\sqrt{2x - 1} = \sqrt{2x^2 + 21x - 11}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \text{ với } x, y, z \text{ là các số dương và } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Bài 3. (4 điểm)

a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320$

b) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{3}{2}.$

Bài 4. (6 điểm)

a. Cho tam giác nhọn ABC có trục tâm H, trọng tâm I; Giao điểm 3 đường trung trực là O, trung điểm của BC là M.

Tính giá trị biểu thức: $\sqrt{\frac{IO^2 + OM^2}{IH^2 + HA^2}}$

b. Cho góc $\angle Oy$. Một đường thẳng d thay đổi luôn cắt các tia Ox; Oy tại M và N. Biết giá trị biểu thức $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ không thay đổi khi đường thẳng d thay đổi.

Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. (1 điểm)

Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn: $2xy + x + y = 83$

-----Hết-----

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

BÀI	ĐỀ -ĐÁP ÁN	ĐIỂM M
Bài 1	<p>Cho biểu thức: $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.</p> <p>a) Chứng minh rằng $M > 4$.</p> <p>b) Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên.</p>	
a	<p>Do $a > 0, a \neq 1$ nên: $\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$ và</p> <p>$\frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} = \frac{(a+1)(a-1)-\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{(a-1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$</p> <p>$\Rightarrow M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + 2$</p> <p>Do $a > 0; a \neq 1$ nên: $(\sqrt{a}-1)^2 > 0 \Leftrightarrow a+1 > 2\sqrt{a}$</p> <p>$\Rightarrow M > \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 2 = 4$</p>	
b	<p>Ta có $0 < N = \frac{6}{M} < \frac{3}{2}$ do đó N chỉ có thể nhận được một giá trị nguyên là 1</p> <p>Mà $N = 1 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{a+1+2\sqrt{a}} = 1 \Leftrightarrow a-4\sqrt{a}+1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-2)^2 = 3$</p> <p>$\Leftrightarrow \sqrt{a} = 2+\sqrt{3}$ hay $\sqrt{a} = 2-\sqrt{3}$ (phù hợp)</p> <p>Vậy, N nguyên $\Leftrightarrow a = (2 \pm \sqrt{3})^2$</p>	
Bài 2	<p>a) ĐK: $x \geq 4$ hoặc $x = 0,5$</p> <p>Biến đổi:</p> $\sqrt{2x^2-9x+4} + 3\sqrt{2x-1} = \sqrt{2x^2+21x-11}$ $\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)(2x-1)} + 3\sqrt{2x-1} = \sqrt{(x+11)(2x-1)}$ $\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)(2x-1)} + 3\sqrt{2x-1} - \sqrt{(x+11)(2x-1)} = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}(\sqrt{x-4} + 3 - \sqrt{x+11}) = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 0 \quad (1)$ <p>Hoặc $\sqrt{x-4} + 3 - \sqrt{x+11} = 0 \quad (2)$</p> <p>Giải (1) được $x = 0,5$ (thỏa mãn), giải (2) được $x = 5$ (thỏa mãn)</p>	

	$b) A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ $\text{Nên } A^2 = \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + 2 \quad (\text{vì } x^2+y^2+z^2=1)$ $= B + 2$	
	<p>Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương ta có</p> $\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \geq \sqrt{\frac{x^2y^2y^2z^2}{z^2x^2}} = 2y^2$ <p>Tương tự</p> $\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \geq 2z^2$ $\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \geq 2x^2$ <p>Cộng vế với vế ta được $2B \geq 2 \Rightarrow B \geq 1$</p> <p>Do đó $A^2 = B + 2 \geq 3$ nên $A \geq \sqrt{3}$</p> <p>Vậy Min $A = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$</p>	
Bài 3		
	<p>Từ $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320 \Leftrightarrow (x^3 - y)^2 + (x^3)^2 = 320$</p> <p>$\Rightarrow (x^3)^2 \notin 320$</p> <p>mà x nguyên nên $x \notin 2$</p> <p>Nếu $x=1$ hoặc $x=-1$ thì y không nguyên (loại)</p> <p>Nếu $x=2 \Rightarrow y=-2$ hoặc $y=6$</p> <p>Nếu $x=-2 \Rightarrow y=-6$ hoặc $y=2$</p> <p>Vậy phương trình đã cho có 4 cặp nghiệm (x;y) là:</p> <p>(2;-2); (2;6); (-2;-6); (-2;2)</p> <p>Từ $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320 \Leftrightarrow (x^3 - y)^2 + (x^3)^2 = 320$</p> <p>$\Rightarrow (x^3)^2 \notin 320$</p>	
b	<p>Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (với $a, b > 0$)</p> $\Rightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$	
	<p>Ta có: $\frac{1}{3x+3y+2z} = \frac{1}{(2x+y+z)+(x+2y+z)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} \right)$</p>	

$$\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(x+y)+(x+z)} + \frac{1}{(x+y)+(y+z)} \right] \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right) \right]$$

$$\leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right)$$

Tương tự: $\frac{1}{3x+2y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right)$

$$\frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{y+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right)$$

Cộng vế theo vế, ta có:

$$\frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{x+y} + \frac{4}{x+z} + \frac{4}{y+z} \right)$$

$$\leq \frac{4}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right) = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2}$$

Bài 4

a) Ta có $MO \parallel HA$ (cùng vuông góc với BC)

$OK \parallel BH$ (cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow \widehat{KOM} = \widehat{BHA}$ (góc có cạnh tương ứng song song)

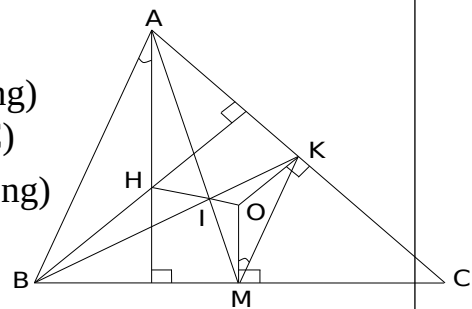
$MK \parallel AB$ (M, K là trung điểm BC và AC)

$\Rightarrow \widehat{HAB} = \widehat{OMK}$ (góc có cạnh tương ứng song song)

$\Rightarrow \Delta ABH$ đồng dạng với ΔMKO

$$\frac{MO}{AH} = \frac{MK}{AB} = \frac{1}{2}$$

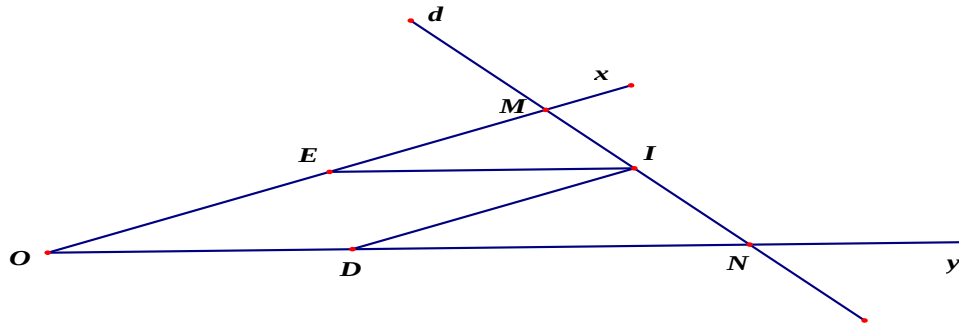
a



Xét ΔAIH và ΔMIO có $\frac{MO}{AH} = \frac{MI}{AI} = \frac{1}{2}$ và $\widehat{OMI} = \widehat{HAI}$ (so le trong)

$\Rightarrow \Delta AIH$ đồng dạng với $\Delta MIO \Rightarrow \frac{IO}{IH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{IO}{IH} = \frac{OM}{HA} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{IO^2}{IH^2} = \frac{OM^2}{HA^2} = \frac{IO^2 + OM^2}{IH^2 + HA^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{IO^2 + OM^2}{IH^2 + HA^2}} = \frac{1}{2}$$



b Giả sử $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{a}$ (1) (a là số dương cho trước). Lấy điểm D trên Oy sao cho OD = a thì OD < ON. Vẽ DI song song với Ox (I ∈ đoạn MN). Lấy E trên Ox sao cho OE = ID. Khi đó OEID là hình bình hành.
Ta có $\frac{OE}{OM} + \frac{OD}{ON} = \frac{NI}{NM} + \frac{EI}{ON} = \frac{NI}{NM} + \frac{MI}{MN} = 1 \Rightarrow \frac{1}{ON} + \frac{OE}{OD \cdot OM} = \frac{1}{OD} = \frac{1}{a}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{OM} = \frac{OE}{OD \cdot OM} \Rightarrow \frac{OE}{OD} = 1 \Rightarrow OE = OD = a$ không đổi, mà D ∈ Oy; E ∈ Ox nên D; E cố định. Mặt khác O cố định và OEID là hình bình hành nên I cố định. Vậy d luôn đi qua I cố định (ĐPCM)

Bài 5 Tìm x,y nguyên dương thỏa mãn: $2xy + x + y = 83$

$$\Leftrightarrow 4xy + 2x + 2y + 1 = 167$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(2y+1) = 167$$

Do x,y nguyên dương $\Rightarrow (2x+1); (2y+1) \in Z$

$$\Rightarrow (2x+1); (2y+1) \in U(167)$$

Lập bảng tìm được (x,y)=(0;83);(83;0).

Tìm x,y nguyên dương thỏa mãn: $2xy + x + y = 83$

$$\Leftrightarrow 4xy + 2x + 2y + 1 = 167$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(2y+1) = 167$$