MỤC LỤC:

Phần1 : MỞ ĐẦU Trang 1

1.1. Lý do chọn đề tài Trang 1

1.2. Mục đích nghiên cứu Trang 1

1.3. Đối tương nhiên cứu Trang 1

1.4. Phương pháp nghiên cứu Trang 1

Phần 2 : NỘI DUNG

2.1. Cơ sở lý luận Trang 2

2.2. Thực trạng Trang 2

2.3. Giải quyết vấn đề Trang 2

2.4. Hiệu quả Sáng kiến Trang 19

Phần 3: KẾT LUẬN Trang 20

PHẦN I: MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài.

Trong chương trình hình học lớp 10- THPT có một chương rất quan trọng của bộ môn hình học và luôn nằm trong cấu trúc của các đề thi THPT Quốc gia cũng như trong các kỳ thi học sinh giỏi đó là chương: "phương pháp toạ độ trong mặt phẳng", đây là phần tiếp nối của hình học phẳng ở cấp THCS nhưng được nhìn nhận dưới quan điểm toạ độ và véc tơ. Như vậy mỗi bài toán hình học trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy đều liên quan đến một bài toán hình học phẳng nào đó.

Hiện nay trong các đề THPT Quốc gia, đề thi học sinh giỏi, phần "phương pháp toạ độ trong mặt phẳng" các câu hỏi thường ở mức độ vân dụng cao, kiến thức áp dụng rất rộng được xuyên xuốt từ THCS đến THPT, nên khi giải các bài toán hình học toạ độ ở các đề thi trên học sinh thường lúng túng trong việc tìm lời giải bài toán cũng như tính toán dẫn đến hiệu quả giải toán không cao. Qua nhiều năm giảng dạy tôi thấy có một nguyên nhân quan trọng là do học sinh thường không khai thác hết bản chất hình học của bài toán ấy, vì vậy khi dạy phần này giáo viên cần phải trang bị cho học sinh một hệ thống các dạng toán và phương pháp suy luận lôgic để giải các bài toán này. Với ý định đó và trong khuôn khổ của sáng kiến kinh nghiệm tôi trình bày đề tài: ***" Hướng dẫn học sinh giải các bài toán về hình vuông trong mặt phẳng toạ độ Oxy"***.

2. Mục đích nghiên cứu

Giúp học sinh hình thành phương pháp, rèn luyện kỹ năng giải toán; bồi dưỡng năng lực tư duy sáng tạo. Từ đó nâng cao khả năng giải các bài toán hình học trong mặt phẳng toạ độ Oxy nói chung, đặc biệt là: "***Các bài toán về hình vuông trong mặt phẳng toạ độ Oxy"***.

3. Đối tượng nghiên cứu

- Học sinh lớp 10A1 năm học 2014-2015. Học sinh lớp 10A1 năm học 2015-2016 trường THCS& THPT Thống Nhất- Yên Định- Thanh Hoá.
- Tuyển tập các đề thi Đại học các khối A,B,D từ các năm 2009 đến 2014 và đề thi THPT Quốc gia năm 2015. Các đề thi học sinh giỏi môn Toán tỉnh Thanh Hoá từ năm 2009 đến năm 2016.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Nghiên cứu tài liệu Toán lớp 10.
- Phân tích, tổng hợp kết quả học tập của học sinh lớp 10A1 năm học 2014-2015. Học sinh lớp 10A1 năm học 2015-2016 sau khi học chuyên đề được trình bày trong sáng kiến kinh nghiệm. Đánh giá kết quả học tập, kết quả các kì thi THPT Quốc gia và kỳ thi học sinh giỏi của học sinh lớp 12A1 năm học 2014-2015 trường THCS& THPT Thống Nhất.
- Phân tích, đánh giá, tổng hợp các bài toán hình học trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Đặc biệt là các bài toán liên quan đến hình vuông trong mặt phẳng toạ độ Oxy trong các kì thi tuyển sinh Đại học, cao đẳng, kỳ thi THPT Quốc gia, các kì thi học sinh giỏi tỉnh Thanh Hoá trong những năm gần đây.

PHẦN II: NỘI DUNG

2.1. Cơ sở lý luận:

Ở chương tình toán THCS học sinh đã được làm quen với hệ trục tọa độ Oxy trong mặt phẳng, đến lớp 10 cấp THPT học sinh được tiếp thu kiến thức một cách hoàn chỉnh. Để đảm bảo tính kế thừa các kiến thức đã học ở cấp THCS cũng như để phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động sáng tạo của học sinh phù hợp với đặc trưng bộ môn; bồi dưỡng năng lực tự học, tự rèn luyện; kỹ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn. Các bài toán về phương pháp toạ độ trong mặt phẳng trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, cao đẳng, Kỳ thi THPT Quốc gia và kỳ thi học sinh giỏi những năm gần đây thường ở mức độ vận dụng cao vì vậy đòi hỏi học sinh phải có năng lực tư duy và kỹ năng giải toán tương ứng từ đó yêu cầu giáo viên cũng phải có cách truyền thụ thích hợp.

2.2. Thực trạng

Qua thực tiễn giảng dạy và quá trình học tập của học sinh ở phần này, tôi nhận thấy khi giải các bài toán hình học trong mặt phẳng toạ độ Oxy học sinh thường không tự tin, đôi khi lúng túng và đặt ra câu hỏi: " Phải định hướng tìm lời giải bài toán như thế nào". Một số học sinh có thói quen không tốt là khi đọc đề chưa kỹ đã vội làm ngay, dẫn đến hiệu quả giải toán như thế là không cao. Đồng thời nhiều học sinh không chú ý đến bản chất hình học phẳng của bài toán; nên mặc dù làm nhiều bài toán hình học trong mặt phẳng toạ độ Oxy nhưng vẫn không nhớ, không phân loại được dạng toán cơ bản cũng như bản chất của các bài toán.

Với thực trạng ấy để giúp học sinh định hướng tốt hơn trong quá trình giải các bài toán hình học trong trong mặt phẳng toạ độ Oxy, theo tôi giáo viên cần tạo cho học sinh kỹ năng xem xét bài toán dưới nhiều góc độ, khai thác các yếu tố đặc trưng hình học của bài toán để tìm lời giải và quan trọng là chia dạng toán để học sinh có định hướng áp dụng khi tìm lời giải. Trong đó việc hình thành cho học sinh khả năng tư duy theo các các dạng toán là một điều cần thiết. Việc rèn luyện qua quá trình giải toán sẽ giúp học sinh hoàn thiện kỹ năng định hướng tìm lời giải bài toán. Trong sáng kiến kinh nghiệm này tôi sẽ nêu ra một số dạng toán của: " ***Các bài toán về hình vuông trong mặt phẳng toạ độ Oxy"***.

2.3 Giải quyết vấn đề

Để giải các bài toán về hình vuông trong mặt phẳng toạ độ Oxy thông thường ta làm theo hai bước:

Bước 1: Vẽ hình và khai thác các tính chất hình học phẳng có trong giả thiết của bài toán, trong hình vẽ trực quan, chú ý đến các tính chất đặc biệt của hình vuông .

Bước 2: Sử dụng các công cụ toạ độ gồm: Toạ độ của điểm, toạ độ của véc tơ, các công thức tính góc, tính khoảng cách, phương trình đường thẳng, phương trình đường tròn, ... để giải bài toán .

Để thuận lợi cho quá trình học tập cũng như hệ thống hoá kiến thức của học sinh tôi chia các bài toán liên quan đến hình vuông trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy thành 5 dạng toán cơ bản như sau:

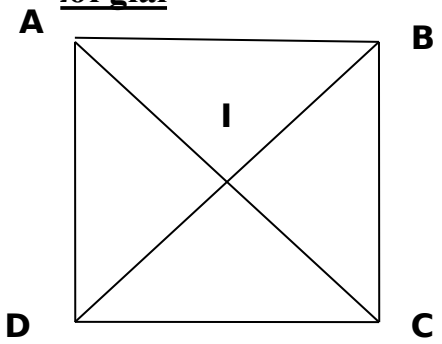
Dạng1. Sử dụng tính chất đối xứng qua tâm của hình vuông.

Bài 1:

Trong mặt phẳng toạ độ cho hình vuông ABCD có tâm $I(\frac{5}{2};\frac{5}{2})$, hai điểm A,B lần lượt nằm trên hai đường thẳng có phương trình x+y-3=0(d) và x+y-4=0(d'). Xác định toạ độ đỉnh D của hình vuông biết D có hoành độ lớn hơn 2.

Lời giải

Bước 1:



Do ABCD là hình vuông ta có, I là tâm đối xứng và IA ⊥ IB nên $\begin{cases} \overline{IA}.\overline{IB}=0 \\ IA=IB \end{cases}$

Bước 2:

Do điểm A thuộc đt (d) ta có A(a;3-a) và điểm B thuộc đt (d') ta có B(b;4-b),

suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{IA}=\left(a-\frac{5}{2};\frac{1}{2}-a\right) \\ \overrightarrow{IB}=\left(b-\frac{5}{2};\frac{3}{2}-b\right) \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} \overline{IA}.\overline{IB}=0 \\ IA=IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a-\frac{5}{2}\right)\left(b-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{3}{2}-b\right)=0 \\ \left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-a\right)^2=\left(b-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-b\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \end{array}\right.$

Với a=2; b=1 ta có B(1;3) suy ra D(4;2) thoả mãn

Với a=1; b=3 ta có B(3;1) suy ra D(2;4) không thoả mãn.

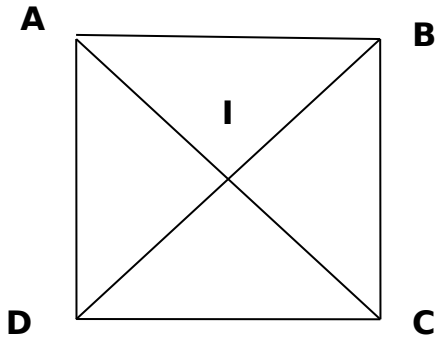
Vậy điểm D cần tìm là D(4;2).

Bài 2 Trong mặt phẳng với hệ tọa độOxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh $A(-3;5)$, tâm I thuộc đường thẳng d: y=-x+5 và diện tích của hình vuông ABCD bằng 25. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết rằng tâm I có hoành độ dương.

Lời giải

Bước 1: Do ABCD là hình vuông, ta có I là tâm đối xứng và IA ⊥ IB .

Theo giả thiết diện tích hình vuông là $S = AB.AD = 2AI^2 = 25$ nên $AI = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.



Bước 2: Do điểm I thuộc đường thẳng d ta có I(a;5-a) với $a > 0$, $AI^2 = 2a^2 + 6a + 9$.

Do $AI = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2a^2 + 6a + 9 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{-7}{2} \text{ (loai)} \\ a = \frac{1}{2} \text{ (tm)} \end{array}\right.$.

Với $a = \frac{1}{2}$ ta có tọa độ tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$, vi I trung điểm AC nên tọa độ đỉnh $C(4;4)$.

Đường thẳng Δ vuông góc AI có $\overrightarrow{n_\Delta} = (7;-1)$ nên phương trình là $\Delta: 7x - y + 1 = 0$. Vì điểm B thuộc $\Delta: 7x - y + 1 = 0$ nên $B(b;1+7b)$. Ta có

$$BI = AI \Leftrightarrow \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 + 7b - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

Với $b = 0 \Rightarrow B(0;1)$ do I trung điểm BD nên $D(1;8)$;

Với $b = 1 \Rightarrow B(1;8)$ và $D(0;1)$.

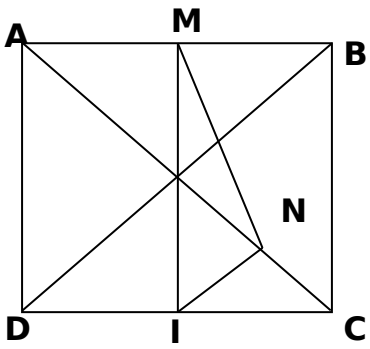
Vậy tọa độ các đỉnh B, C, D là: $B(1;8), C(4;4), D(0;1)$ *hoặc* $B(0;1), C(4;4), D(1;8)$

Dạng 2. Sử dụng công thức tính độ dài, tính khoảng cách.

Bài 1: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho AN=3NC. Viết phương trình đường thẳng CD biết M(1;2) và N(2;-1).

Lời giải

Bước 1:



Ta có $MN = \sqrt{10}$. Gọi a là độ dài cạnh của hình vuông ABCD,

Ta có AM=$\frac{a}{2}$ và AN=$\frac{3AC}{4}=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$ theo định lý cosin ta có

$MN^2=AM^2+AN^2-2AN.AM.\cos\widehat{MAN}=\frac{5a^2}{8}$ Do đó $\frac{5a^2}{8}=10\Leftrightarrow a=4$

<u>*Bước 2:*</u> Gọi I(x;y) là trung điểm của CD. Ta có IM=AD=4 và $IN=\frac{BD}{2}=\sqrt{2}$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=16\\(x-2)^2+(y+1)^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}\right.$
$\left.\begin{cases}x=\frac{17}{5}\\y=-\frac{6}{5}\end{cases}\right.$

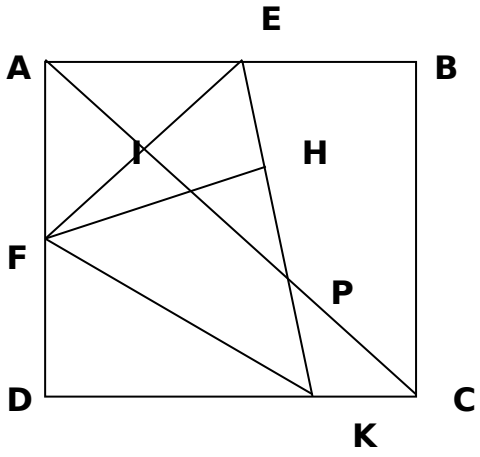
Với x=1;y=-2 ta có I(1;-2) và $\overrightarrow{IM}=(0;4)$. Đường thẳng CD đi qua I và nhận $\overrightarrow{IM}=(0;4)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình y+2=0.

Với x=$\frac{17}{5}$; y=$-\frac{6}{5}$ ta có I($\frac{17}{5};-\frac{6}{5}$) và $\overrightarrow{IM}=(-\frac{12}{5};\frac{16}{5})$. Đường thẳng CD đi qua I và nhận $\overrightarrow{IM}=(-\frac{12}{5};\frac{16}{5})$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình 3x-4y-15=0.

Vậy phương trình đường thẳng CD là: 3x-4y-15=0.

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy,* cho hình vuông *ABCD*. Điểm $F\left(\frac{11}{2};3\right)$ là trung điểm của cạnh *AD*. Đường thẳng *EK* có phương trình $19x-8y-18=0$ với *E* là trung điểm của cạnh *AB*, điểm *K* thuộc cạnh *DC* và *KD = 3KC*. Tìm tọa độ điểm *C* của hình vuông *ABCD* biết điểm E có hoành độ nhỏ hơn 3.

<u>Lời giải</u>



<u>*Bước 1:*</u>

Gọi AB=a (với a>0) . Ta có:

$S_{\Delta EFK}=S_{ABCD}-S_{\Delta AEF}-S_{\Delta FDK}-S_{\Delta KCBE}=\frac{5a^2}{16}$

Ta có $S_{\Delta EFK}=\frac{1}{2}FH.EK$ suy ra $FH=d(F,EK)=\frac{25}{2\sqrt{17}};EK=\frac{a\sqrt{17}}{4}\Rightarrow a=5$

Vậy ABCD là hình vuông cạnh bằng 5 suy ra $EF=\frac{BD}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Bước 2 Do $EF=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ nên E thuộc đường tròn $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{25}{2}$

Suy ra tọa độ E là nghiệm: $\begin{cases}\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{25}{2}\\ 19x-8y-18=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ x=\frac{58}{17}(\text{loai})\\ y=\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow E\left(2;\frac{5}{2}\right)$

AC qua trung điểm I của EF và $AC\perp EF\Rightarrow$ AC: $7x+y-29=0$

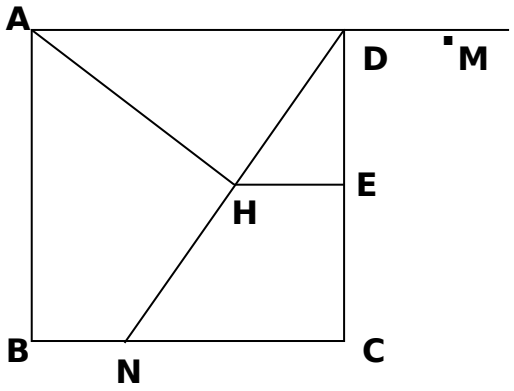
Do P là giao điểm AC và EK toạ độ P là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases}7x+y-29=0\\ 19-8y-18=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{10}{3}\\ y=\frac{17}{3}\end{cases}\Rightarrow P\left(\frac{10}{3};\frac{17}{3}\right)$$

Ta xác định được: $\overrightarrow{IC}=\frac{9}{5}\overrightarrow{IP}\Rightarrow C(3;8)$. *Vậy toạ độ điểm C cần tìm là C(3 ;8)*

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Điểm $N(1;-2)$ thoả mãn $2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=0$ và điểm $M(3;6)$ thuộc đường thẳng chứa cạnh AD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh A xuống đường thẳng DN. Xác định toạ độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết khoảng cách từ điểm H đến cạnh CD bằng $\frac{12\sqrt{2}}{13}$ và đỉnh A có hoành độ là một số nguyên lớn hơn -2.

Lời giải



Bước 1:

Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên CD

$\Rightarrow HE=\frac{12\sqrt{2}}{13}$

Giả sử cạnh hình vuông bằng *a (a>0)*

Ta có $2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

nên N nằm giữa B và C sao cho $CN=\frac{2}{3}CB=\frac{2a}{3}.\Rightarrow DN=\sqrt{CD^2+CN^2}=\frac{a\sqrt{13}}{3}$

Có $\Delta ADH\sim\Delta DNC(g.g)\Rightarrow\frac{AD}{DN}=\frac{DH}{NC}=\frac{a}{\frac{a\sqrt{13}}{3}}=\frac{3}{\sqrt{13}}\Rightarrow DH=\frac{2a}{\sqrt{13}}$

$$\Delta DHE\sim\Delta DNC(g.g)\Rightarrow\frac{HE}{NC}=\frac{DH}{DN}=\frac{\frac{2a}{\sqrt{13}}}{\frac{a\sqrt{13}}{3}}=\frac{6}{13}\Rightarrow NC=\frac{13}{6}HE=2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a}{3}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow a=3\sqrt{2}$$

Bước 2: Giả sử véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AD là $n=(a;b)$

Ta có phương trình đường thẳng AD: $ax+by-3a-6b=0$

$\Rightarrow d(N,AD)=3\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|-2a-8b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\sqrt{2} \Leftrightarrow 7a^2-16ab-23b^2=0$

$\Leftrightarrow (a+b)(7a-23b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ 7a-23b=0 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $a+b=0$ Suy ra phương trình đường thẳng $AD: x-y+3=0$

Do NP $\perp$ AD ta có phương trình đường thẳng NP là x+y+1=0 . Do P là giao điểm AD và NP ta có toạ độ P là nghiệm của hệ pt: $\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ vậy P(-2;1)

Do A thuộc đường thẳng AD ta có A(m;m+3). Ta có $AP=BN=\frac{1}{3}BC=\sqrt{2} \Rightarrow$

$(m+2)^2+(m+2)^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=-1 & (\text{tm}) \\ m=-3 & (\text{loai}) \end{array}\right.$ Vậy A(-1;2)

Ta có $\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{AP} \Rightarrow D(-4;-1)$ Từ đó ta tìm được $B(2;-1), C(-1;-4)$

TH 2: $7a-23b=0$ Suy ra phương trình đường thẳng $AD: 23x+7y-111=0$

Do NP $\perp$ AD ta có phương trình đường thẳng NP là 7x-23y-53=0 . Do P là giao điểm AD và NP ta có toạ độ P là nghiệm của hệ pt: $\begin{cases} 23x+7y-111=0 \\ 7x-23y-53=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{86}{17} \\ y=\frac{-13}{17} \end{cases}$

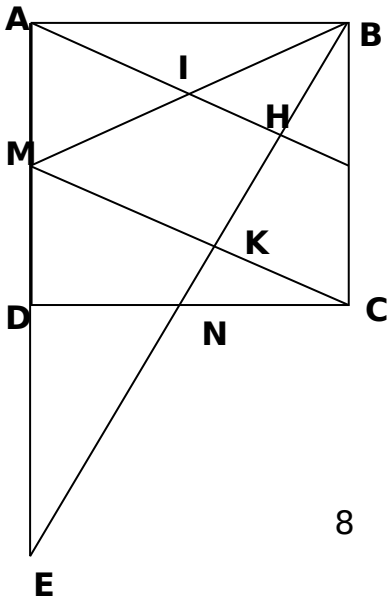
vậy $P\left(\frac{86}{17};\frac{-13}{17}\right)$. Do A thuộc đường thẳng AD ta có A(m;m+3).

Ta có $AP=BN=\frac{1}{3}BC=\sqrt{2} \Rightarrow (m-\frac{86}{17})^2+(m+\frac{64}{17})^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=\frac{93}{17} & (\text{loai}) \\ m=\frac{79}{17} & (\text{loai}) \end{array}\right.$

Vậy toạ độ các đỉnh hình vuông là: $A(-1;2), B(2;-1), C(-1;-4), D(-4;-1)$

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình vuông *ABCD* có $A(-1;2)$. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của cạnh *AD* và *DC*; *K* là giao điểm của *BN* với *CM*. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác *BMK*, biết *BN* có phương trình $2x+y-8=0$ và điểm *B* có hoành độ lớn hơn 2.

Lời giải



Bước 1:

Gọi E = BN ∩ AD ⇒ D là trung điểm của AE

Dựng AH ⊥ BN tại H ⇒ $\text{AH}=\text{d}(\text{A};\text{BN})=\frac{8}{\sqrt{5}}$

Trong tam giác vuông ABE: $\frac{1}{\text{AH}^2}=\frac{1}{\text{AB}^2}+\frac{1}{\text{AE}^2}=\frac{5}{4\text{AB}^2}$

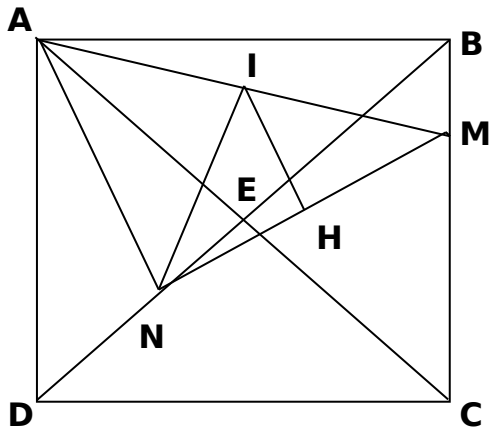
$\Rightarrow \text{AB}=\frac{\sqrt{5}.\text{AH}}{2}=4$

Bước 2: Do B thuộc đường thẳng BN ta có B(b; 8 - 2b) (b > 2)
Với AB = 4 suy ra B(3; 2) Ta có phương trình đường thẳng AE: x + 1 = 0
Gọi E = AE ∩ BN ⇒ E(-1; 10) ⇒ D(-1; 6) ⇒ M(-1; 4). Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK ta có I là trung điểm của BM, Suy ra I(1; 3) và $R = \frac{BM}{2} = \sqrt{5}$.
Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK là: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD, điểm M(5;7) nằm trên cạnh BC. Đường tròn đường kính AM cắt BBC tại B và cắt BD tại N(6;2). Đỉnh C thuộc đường thẳng d: 2x-y-7=0. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết hoành độ đỉnh C nguyên và hoành độ đỉnh A bé hơn 2.

Lời giải

Bước 1: Gọi I là tâm đường tròn đường kính AM thì I là trung điểm AM.
Ta có $\widehat{MIN}$ = sđ cung MN = $2\widehat{MBN} = 90^0$. Do đó tam giác MIN vuông cân tại I



Bước 2: Do C thuộc đường thẳng d 2x-y-7=0 nên C(c;2c-7)
Gọi H là trung điểm của MN ta có $H(\frac{11}{2};\frac{9}{2})$
Phương trình đường thẳng Δ là đường trung trực của MN là x-5y+17=0 .
Do I thuộc Δ ta có I(5a-17; a).
Ta có $\overrightarrow{MN} = (1;-5) \Rightarrow MN = \sqrt{26}$
$\overrightarrow{IM} = (22 - 5a; 7 - a) \Rightarrow IM = \sqrt{(22 - 5a)^2 + (7 - a)^2}$
Vì ΔMIN vuông cân tại I và $MN = \sqrt{26} \Rightarrow IM = \sqrt{13} \Leftrightarrow 26a^2 - 234a + 520 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = 4 \end{array}\right.$
Với a=5 ta có I(8;5) suy ra A(11;9) (loại).
Với a=4 ta có I(3;4) suy ra A(1;1)
Gọi E là tâm hình vuông ta có E là trung điểm AC
Nên $E(\frac{c+1}{2}; c - 3) \Rightarrow \overrightarrow{EN} = (\frac{11 - c}{2}; 5 - c)$. Do $AC \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EN} = 0$

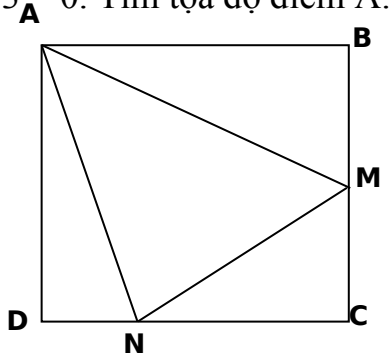
$$\Leftrightarrow (c-1)(\frac{11-c}{2})+(2c-8)(5-c)=0 \Leftrightarrow 5c^2-48c+91=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=7 \\ c=\frac{13}{5}(loai) \end{array}\right.$$

Với c=7 Suy ra C(7;7) ⇒ E(4;4).Ta có phương trình đường thẳng BD: x+y-8=0; phương trình đường thẳng BC: x-7=0 suy ra B(7;1) ⇒ D(1;7)

Vậy toạ độ các đỉnh của hình vuông là: A(1;1), C(7;7), B(7;1), D(1;7)

Dạng 3. Sử dụng phương pháp tính góc.

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho CN = 2ND. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình 2x – y – 3 = 0. Tìm tọa độ điểm A.



Lời giải

Bước 1: Ta có : $AN=\frac{a\sqrt{10}}{3}$; $AM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$; $MN=\frac{5a}{6}$;

$$\cos A=\frac{AM^2+AN^2-MN^2}{2AM.AN}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{MAN}=45^o$$

Bước 2: Phương trình đường thẳng AM : $ax+by-\frac{11}{2}a-\frac{1}{2}b=0=0$

$\cos\widehat{MAN}=\frac{|2a-b|}{\sqrt{5(a^2+b^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ Đặt $t=\frac{a}{b}$ Ta có $3t^2-8t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Với t = 3 ta có phương trình đường thẳng AM là 3x+y-17=0

Suy ra tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ 3x+y-17=0 \end{cases}$ ⇒ A (4; 5)

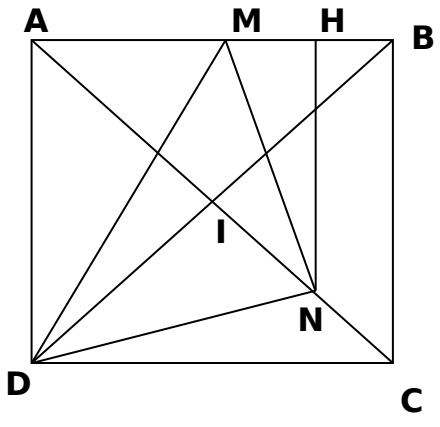
Với $t=-\frac{1}{3}$ ta có phương trình đường thẳng AM là x-3y-17=0

tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ x-3y-4=0 \end{cases}$ ⇒ A (1; -1)

Vậy toạ độ điểm A là: A(4;5) và A(1;-1)

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình vuông *ABCD*. Điểm $M\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ là trung điểm của *AB*; Điểm *N* nằm trên đoạn *AC* sao cho $AN=3NC$. Tìm tọa độ điểm *A* biết phương trình đường thẳng *DN* là $2x-y=9$.

Lời giải



Bước 1:

Gọi cạnh hình vuông là a.

Tính được

$MN^2=DN^2=\frac{5}{8}a^2, MD^2=\frac{5}{4}a^2$

$\Rightarrow MD^2=MN^2+DN^2$

nên tam giác DMN vuông cân tại N.

Và $\widehat{AMD}=\widehat{AN}D$ và $\cos\widehat{AMD}=\frac{AM}{DM}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

Bước 2:

Gọi $N(x;2x-9)$ ta có $MN\perp DN\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_{DN}}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{5}{2}\right)+2\left(2x-9-\frac{7}{2}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{11}{2}$

Suy ra, $N\left(\frac{11}{2};2\right)$, $MN^2=\frac{45}{4}=\frac{5a^2}{8}\Rightarrow a=3\sqrt{2}$.

Do $\widehat{AMD}=\widehat{AN}D$ và $\cos\widehat{AMD}=\frac{AM}{DM}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Gọi vtpt của đường thẳng AN là $n(u;v),u^2+v^2\neq 0$

Ta có $\left|\cos\left(\vec{n};\overrightarrow{n_{DN}}\right)\right|=\left|\frac{2u-v}{\sqrt{5}\sqrt{u^2+v^2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow 3u^2-4uv=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\3u=4v\end{array}\right.$

Với $u=0$ ta có phương trình của đường thẳng AN là $y-2=0$

Gọi tọa độ $A(x;2)$ vì $AM=\frac{a}{2}\Rightarrow\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow A(1;2)\\x=4\Rightarrow A(4;2)\end{array}\right.$

Với $3u=4v$ ta có ta có phương trình của đường thẳng AN là :

$4\left(x-\frac{11}{2}\right)+3(y-2)=0\Leftrightarrow 4x+3y-28=0$ Gọi tọa độ $A\left(x;\frac{28-4x}{3}\right)$

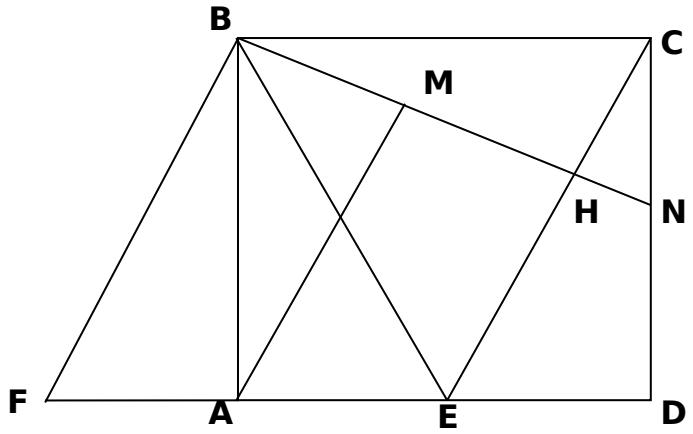
do $AM=\frac{a}{2}\Rightarrow\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{28-4x}{3}-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{14}{5}\Rightarrow A\left(\frac{14}{5};\frac{28}{5}\right)\\x=\frac{23}{5}\Rightarrow A\left(\frac{23}{5};\frac{16}{5}\right)\end{array}\right.$

Thử lại, ta có hai điểm thỏa mãn là $A(1;2)$ *và* $A\left(\frac{14}{5};\frac{28}{5}\right)$

Bài 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hình vuông ABCD. Gọi E là trung điểm của AD và $H(\frac{11}{5};-\frac{2}{5})$ là hình chiếu của B lên CE, $M(\frac{3}{5};-\frac{6}{5})$ là trung điểm của BH. Xác định toạ độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết A có hoành độ âm.

Lời giải

Bước 1:



Gọi F là điểm đối xứng của E qua A. Ta có $\Delta BEF = \Delta EBC$

$\Rightarrow \widehat{FBE} = \widehat{BEC} \Rightarrow BF // EC$

Suy ra tứ giác BFEC là hình bình hành. Do AM là đường trung bình của tứ giác BFEH nên $AM \perp BH$. Ta có $\widehat{ECB} = \widehat{BAM} \Rightarrow \cos\widehat{BAM} = \cos\widehat{ECD} = \frac{CD}{CE} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Bước 2: Vì M là trung điểm BH ta suy ra toạ độ B(-1;-2)

Phương trình đường thẳng BH: x-2y-3=0.

Phương trình đường thẳng CE: 2x+y-4=0.

Phương trình đường thẳng AM: 2x+y=0.

Gọi A(a;-2a) (a<0) $\overrightarrow{AB} = (a+1; -2a+2)$

ta có $\cos\widehat{BAM} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{AM}}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{u_{AM}}\right|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{\left|1(a+1) - 2(-2a+2)\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}.\sqrt{(a+1)^2+(-2a+2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow 5a^2 - 6a - 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = \frac{11}{5} \end{array}\right. \Rightarrow A(-1;2)$

Đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với AB nên có phương trình: y-2=0

E là giao điểm CE và AD nên toạ độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình :

$\left\{\begin{array}{l} y-2=0 \\ 2x+y-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right. \Rightarrow E(1;2)$

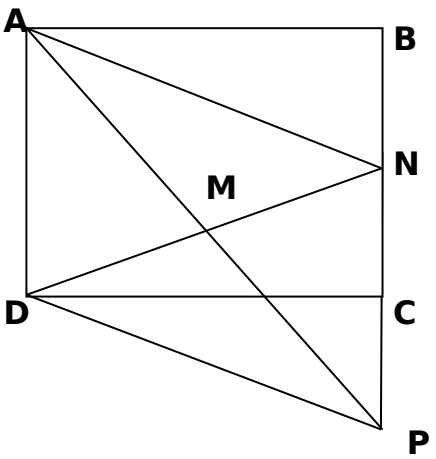
Vì E là trung điểm của AD nên D(3;2) Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow C(3;-2)$.

Vậy toạ độ 4 điểm cần tìm là A(-1;2), B(-1;-2), C(3;-2), D(3;2).

Bài 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hình vuông ABCD có N(1;2) là trung điểm cạnh BC, biết đường trung tuyến của tam giác AND có phương trình là 5x-y+1=0. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông ABCD.

Lời giải

Bước 1:



Gọi M là trung điểm của DN và AM kéo dài cắt BC tại P. Theo định lý talets ta có $\frac{MA}{MP} = \frac{MD}{MN} = 1$ suy ra M là trung điểm của AP do đó ANPD là hình bình hành.Suy ra NP=AD=AB

$\Rightarrow BP = \frac{3}{2}AB \Rightarrow \tan\widehat{APB} = \frac{AB}{BP} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \cos\widehat{APB} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\widehat{APB}}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

Bước 2: Đường thẳng BC đi qua N có dạng a(x-1) + b(y-2)=0 ta có

$\Rightarrow \cos\widehat{APB} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow 7a^2 - 10ab - 17b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ a = \frac{17}{7}b \end{array}\right.$

Trường hợp 1: với a=-b ta có phương trình BC là x-y+1=0

ta có toạ độ điểm P là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x - y + 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{P}(0;1) \Rightarrow \mathrm{C}\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right) \Rightarrow B(\frac{3}{2};\frac{5}{2})$$

Đường thẳng AB đi qua B và nhận véc tơ chỉ phương của BC làm véc tơ pháp tuyến nên ta có phương trình AB là x+y-4=0. Toạ độ điểm A là nhiệm của hệ

$$\begin{cases} 5x - y + 1 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow A(\frac{1}{2};\frac{7}{2}) \text{ Do } \vec{AB} = \vec{CD} \Rightarrow D\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$$

Trường hợp 2: 7a=17b khi đó phương trình đường thẳng BC là: 7x-17y+14=0

Tương tự ta tìm được toạ độ các điểm là

$$P\left(\frac{6}{13};\frac{43}{13}\right),\ \mathrm{C}\left(\frac{19}{26};\frac{69}{26}\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{33}{26};\frac{35}{26}\right),\ \mathrm{A}\left(-\frac{1}{26};\frac{21}{26}\right),\ \mathrm{D}\left(\frac{53}{26};\frac{83}{26}\right)$$

Do D và N nằm khác phía AM nên không thoả mãn.

Vậy toạ độ các đỉnh của hình vuông là :

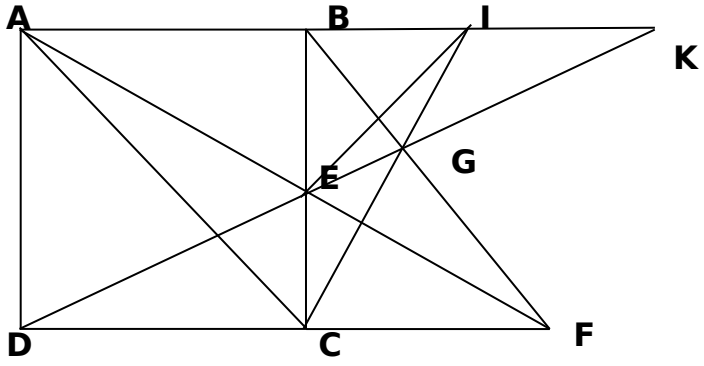
$$A(\frac{1}{2};\frac{7}{2})\ ; D\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right); \mathrm{C}\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);\ B(\frac{3}{2};\frac{5}{2})$$

Dạng 4 . Sử dụng phương pháp chứng minh vuông góc

Bài 1: Trong mặt phẳng toạ độ cho hình vuông ABCD có C(3;-3). Gọi E là một điểm trên cạnh BC, đường thẳng AE cắt CD tại F, đường thẳng DE cắt BF tại G. Biết $G\left(\frac{1}{2};-1\right)$, $\mathrm{E}(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ và đỉnh A nằm trên đường thẳng d: 2x-5y+12=0. Tìm toạ độ đỉnh B.

Lời giải

Bước 1:



Gọi I,K lần lượt là giao điểm của CG với AB ; DG với AB.

Do IK//DF nên theo định lý Talets ta có: $\frac{IK}{CD}=\frac{IG}{GC}=\frac{IB}{CF}\Rightarrow \frac{IK}{IB}=\frac{CD}{CF}$ (1)

Tương tự do AK//DF ta có $\frac{KE}{ED}=\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{CF}$ (2)

Từ (1) và (2) kết hợp với AB=CD $\Rightarrow \frac{IK}{IB}=\frac{KE}{ED}\Rightarrow IE//BD$

Xét tam giác AIC ta có IE $\perp$ AC (BD $\perp$ AC) và CE $\perp$ AI nên E là trực tâm của tam giác AIC. Suy ra AE $\perp$ CG.

Bước 2:

Ta có $\overrightarrow{CG}=(-\frac{5}{2};2)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AE nên AE có phương trình: $-5x+4y-\frac{9}{2}=0$. Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x-5y+12=0\\-5x+4y-\frac{9}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=3\end{cases}\Rightarrow A(\frac{3}{2};3)$$

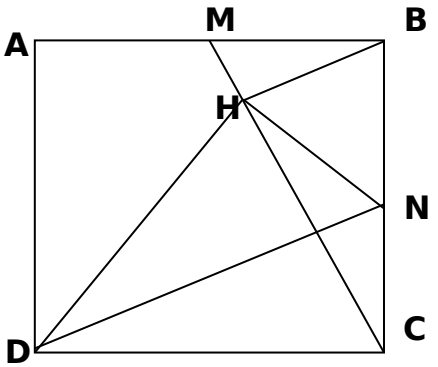
Phương trình đường thẳng BC đi qua E và C có nên có phương trình x+y=0.

điểm B là hình chiếu vuông góc của lên BC suy ra toạ độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x+y=0\\x-y+\frac{3}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{3}{4}\\y=\frac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow B(-\frac{3}{4};\frac{3}{4}).$$ *Vậy toạ độ điểm B cần tìm là* $B(-\frac{3}{4};\frac{3}{4})$

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ *Oxy*, cho hình vuông ABCD với M, N lần lượt là trung điểm đoạn AB và BC. Gọi H là chân đường cao kẻ từ B xuống CM. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết: $N(-1;-\frac{5}{2}),H(-1;0)$ và điểm D nằm trên đường thẳng (d): y=x-4.

Lời giải:



Bước 1:

Trong tam vuông BCH ta có : HN=HC (1)

Mặt khác: BH và DN song song với

(Vì cùng vuông góc với MC)

Từ đó: H và C đối xứng qua DN

$\Rightarrow \widehat{DHN}=\widehat{DCN}=90^0\Rightarrow$ DH vuông góc với HN

Bước 2:

Gọi D(m ;m-4) Sử dụng điều kiện $\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HN}=0\Rightarrow m=4\Rightarrow D(4;0)$

Nhận xét H và C đối xứng qua DN tìm được $C(1;-4)$

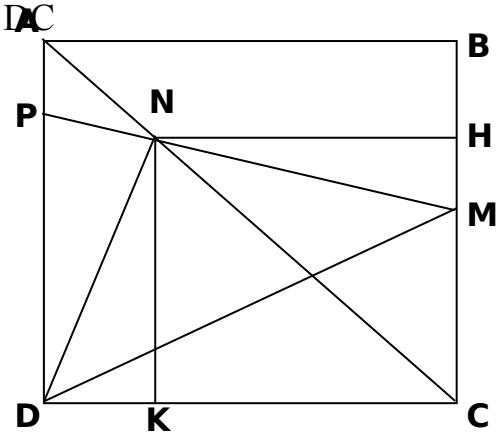
Từ đó tìm được : $A(0;3),\ B(-3;-1)$

Vậy toạ độ các đỉnh của hình vuông là : $A(0;3)$ $B(-3;-1)$ $C(1;-4)$ $D(4;0)$

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của cạnh BC, N thuộc cạnh AC sao cho $AN=\frac{1}{4}AC$.Biết MN có phương trình $3x-y-4=0$ và $D(5;1)$. Tìm toạ độ điểm B biết M có tung độ dương.

Lời giải

Bước 1: Kẻ NH vuông với BC tại H, NK vuông với DC tại K. Ta có $\Delta NKC=\Delta NHC\Rightarrow NK=NH$.



Ta có AD song song với NK, suy ra $\frac{DK}{DC}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{4}$

tương tự ta cũng có $\frac{BH}{BC}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{4}$

suy ra DK=BH mà M là trung điểm BC nên H là trung điểm của BM,

suy a $\Delta DKN=\Delta MHN\Rightarrow \widehat{DNK}=\widehat{MNH}\Rightarrow ND=NM$

mà $\widehat{KNH}=90^0\Rightarrow \widehat{DNH}=90^0$

Suy ra ΔDNM vuông cân tại N$\Rightarrow DN\perp NM\Rightarrow DN: x+3y-8=0\Rightarrow N(2;2)$

Bước 2: Gọi M(m;3m-4)

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(2-m;6-3m), DN=\sqrt{10}, MN=DN\Rightarrow (2-m)^2+(6-3m)^2=\sqrt{10}\Rightarrow M(3;5)$

(do M có tung độ dương).

Gọi P là giao điểm MN và AP ta có $\overrightarrow{NP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{NM}\Rightarrow P\left(\frac{5}{3};1\right)$

Ta có

$AP=\frac{1}{3}MC=\frac{1}{6}BC=\frac{1}{6}AD\Rightarrow DP=\frac{5}{6}DA\Rightarrow \overrightarrow{DP}=\frac{5}{6}\overrightarrow{DA}=\frac{5}{6}\overrightarrow{CB}=\frac{5}{6}\overrightarrow{MB}\Rightarrow \overrightarrow{MB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{DP}$

$\Rightarrow B(1;5)$.

Vậy toạ độ đỉnh B là B(1;5).

Bài 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho CN=2ND. Cho điểm M(-1;3) và đường thẳng có phương trình x-2y-3=0. Tính diện tích hình vuông và tìm toạ độ điểm A biết điểm A có tung độ dương.

Lời giải

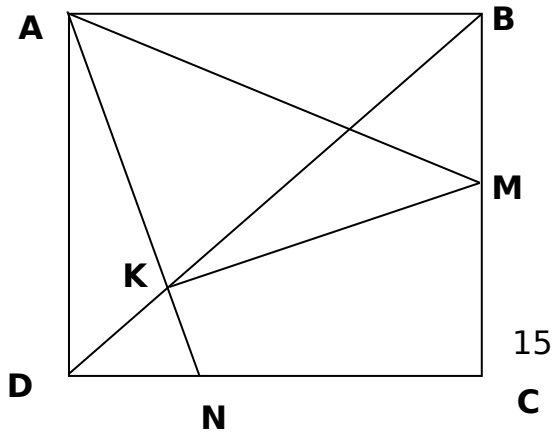
Bước 1: Đặt AB=a >0

Gọi K là giao điểm BD và AN. Do

$\frac{KA}{KN}=\frac{AB}{DN}=3\Rightarrow KA=\frac{3}{4}AN$

$\Rightarrow KA^2=\frac{9}{16}AN^2=\frac{9}{16}(AD^2+DN^2)=\frac{5a^2}{8}$

Tương tự



$KB=\frac{3}{4}BD \Rightarrow KB^2=\frac{9}{16}BD^2=\frac{9a^2}{8}$

$\Rightarrow KM^2=KB^2+BM^2-2KB.BM\cos 45^0=\frac{5a^2}{8}$

Lại có: $AM^2=AB^2+BM^2=\frac{5a^2}{4}=KA^2+KM^2$

Suy ra tam giác KAM vuông tại K hay $MK\perp AN$

Ta có MK=d(M;AN) $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{5a^2}{8}}=\frac{|-10|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow \frac{5a^2}{8}=20\Leftrightarrow a^2=32\Leftrightarrow a=4\sqrt{2}$

Suy ra $S_{ABCD}=a^2=32$

Bước 2: Do A thuộc đường thẳng AN ta có A(2m+3;m) với m>0

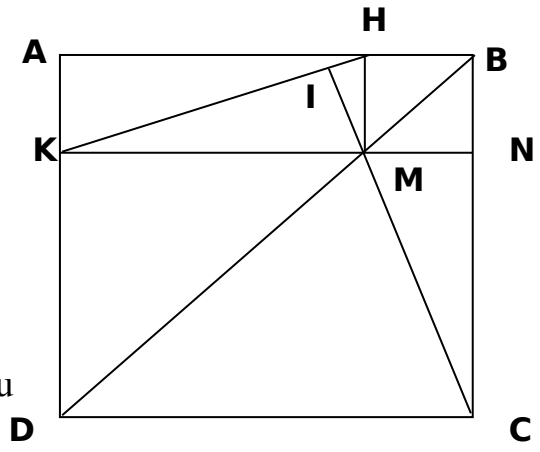
$\Rightarrow AM^2=(2m+4)^2+(m-3)^2=5m^2+10m+25$

Mặt khác $AM^2=\frac{5a^2}{4}=40 \Rightarrow 5m^2+10m+25=40\Rightarrow m^2+2m-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \text{ loai}\end{array}\right.$

Với m=1 ta có A(5;1). *Vậy toạ độ điểm A là A(5;1).*

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh C thuộc đường thẳng (d): x+2y-6=0, điểm M(1;1) thuộc cạnh BD biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm M trên cạnh AB và AD đều nằm trên đường thẳng (Δ): x+y-1=0. Tìm toạ độ đỉnh C.

Lời giải



Bước 1:

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB,AD.

Gọi N là giao điểm của KM và BC.

Gọi I là giao điểm của CM và HK

Ta có ΔDKM vuông tại K và $\widehat{DKM}=45^0$

Suy ra $KM=KD\Rightarrow KM=NC$ (1)

Mặt khác MH=MN (do MHBN là hình vuông)

suy ra hai tam giác vuông KMH,CNM bằng nhau

suy ra $\widehat{HKM}=\widehat{MCN}$

Do $\widehat{NMC}=\widehat{HMK}$ nên $\widehat{NMC}+\widehat{NCM}=\widehat{HMK}+\widehat{HMK}=90^0$

Suy ra CI$\perp$HK

Bước 2:

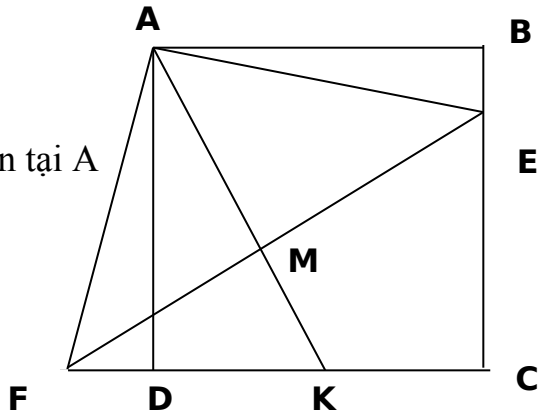
Đường thẳng CI đi qua M(1;1) và vuông góc với đường thẳng Δ

nên đường thẳng CI có phương trình x-y=0. Khi đó toạ độ C là nghiệm của hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ x+2y-6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=2\end{array}\right.$. *Vậy toạ độ đỉnh C là C(2;2)*

Dạng 5. Sử dụng tính chất nội tiếp đường tròn.

Bài 1. Cho hình vuông ABCD và điểm E thuộc cạnh BC . Một đường thẳng qua A vuông góc với AE cắt CD tại F, đường thẳng chứa trung tuyến AM của tam giác AEF cắt CD tại K. Tìm toạ độ điểm D biết A(-6; 6), M(-4; 2), K(-3; 0).

Lời giải



Bước 1.

$\Delta ABE = \Delta ADF \Rightarrow AE = AF$ nên tam giác AEF cân tại A , mà AM là đường trung tuyến $\Rightarrow AM \perp EF$.

Do đó tam giác AEF thuộc đường tròn tâm M bán kính MA

Bước 2

Đường thẳng EF qua M và vuông góc MA nên có phương trình $x - 2y + 8 = 0$.

Phương trình đường tròn tâm M, bán kính MA là $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 20$

Toạ độ E, F thoả mãn hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ (x+4)^2 + (y-2)^2 = 20 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta có $\begin{cases} x = -8 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$

Trường hợp 1: E(-8; 0), F(0; 4)

Viết phương trình CD đi qua F, K: $4x - 3y + 12 = 0$

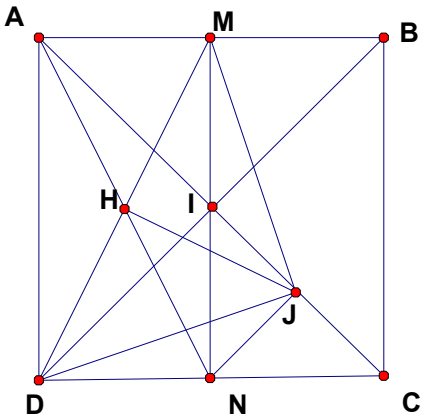
Viết phương trình AD: đi qua A và vuông góc với CD, suy ra $D\left(\frac{-6}{5}; \frac{12}{5}\right)$

Trường hợp 2: E(0; 4), F(-8; 0) suy ra D(-6;0)

Vậy có 2 điểm D cần tìm là : $D\left(-\frac{6}{5}; \frac{12}{5}\right)$ *và D(-6;0)*

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm I. Trung điểm cạnh AB là $M(0;3)$, trung điểm đoạn CI là $J(1;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$.

Lời giải



Bước 1:

Gọi N là trung điểm CD và H là tâm hình chữ nhật *AMND*. Gọi (*C*) là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật *AMND*.

Từ giả thiết, suy ra *NJ//DI*, do đó *NJ* vuông góc với *AC*, hay *J* thuộc (*C*) (vì *AN* là đường kính của (*C*)). Mà *MD* cũng là đường kính của (*C*) nên *JM* vuông góc với *JD*. (1)

D thuộc Δ nên D(t;t+1)

$\Rightarrow \overrightarrow{JD} = (t-1; t+1); \ \overrightarrow{JM} = (-1;3)$

Theo (1) ta có $\overrightarrow{JD}.\overrightarrow{JM} = 0 \Leftrightarrow -t + 1 + 3t + 3 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow D(-2;-1)$.

Gọi a là cạnh hình vuông $ABCD$. Dễ thấy $DM = 2\sqrt{5} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} \Rightarrow a = 4$.

Bước 2: Gọi $A(x;y)$. Vì $\begin{cases} AM = 2 \\ AD = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; y = 3 \\ x = \frac{6}{5}; y = \frac{7}{5} \end{cases}$

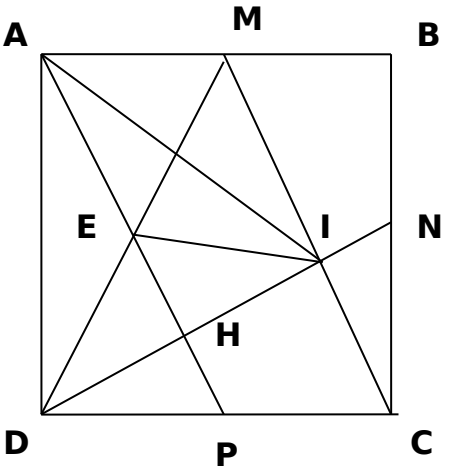
Với $A(-2;3) \Rightarrow B(2;3) \Rightarrow I(0;1) \Rightarrow C(2;-1) \Rightarrow J(1;0)$ (thỏa mãn)

Với $A\left(\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right) \Rightarrow B\left(-\frac{6}{5};\frac{23}{5}\right) \Rightarrow I\left(\frac{-8}{5};\frac{9}{5}\right) \Rightarrow C\left(\frac{-22}{5};\frac{11}{5}\right) \Rightarrow J(-3;2)$ (loại).

Vậy tọa độ các đỉnh hình vuông là $A(-2;3), B(2;3), C(2;-1), D(-2;-1)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD có hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC, biết CM cắt DN tại $I(\frac{22}{5};\frac{11}{5})$. Gọi H là trung điểm DI, biết đường thẳng AH cắt CD tại $P(\frac{7}{2};1)$. Biết $x_A < 4$, tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông ABCD.

Lời giải



Bước 1.

Ta có $\Delta MBC = \Delta NCD \Rightarrow CM \perp DN$

Tứ giác AMID nội tiếp đường tròn tâm E (với E là trung điểm của AH)

suy ra ED = EI, mà H là trung điểm của DI $\Rightarrow EH \perp DI \Rightarrow AH \perp DN$,

mà $CM \perp DN$ suy ra CM // AH,

mặt khác AM // CP nên tứ giác AMCP là hình bình hành, do đó P là trung điểm DC

$\Rightarrow$ tứ giác AMPD là hình chữ nhật

$\Rightarrow IE = \frac{1}{2}DM = \frac{1}{2}AP \Rightarrow \Delta AIP$ vuông tại I

Ta có ΔADI cân tại A $\Rightarrow AI = AD = DC = 2IP$ (do tam giác DIC vuông tại I)

$\Rightarrow AI = 2IP$

Bước 2. Ta có đường thẳng AI qua I và vuông góc với PI nên có phương trình

$3x + 4y - 22 = 0$. $A \in AI \Rightarrow A(2-4t;4+3t) \Rightarrow \left(4t + \frac{12}{5}\right)^2 + \left(3t + \frac{9}{5}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 0 \\ t = -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$

Do $x_A < 4$ nên A(2; 4) suy ra phương trình đường thẳng(AP): $2x + y - 8 = 0$

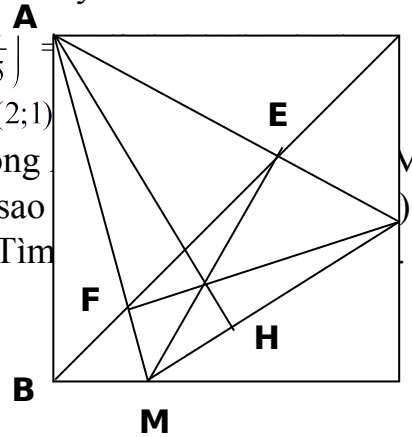
$DN \perp AP$ suy ra phương trình đường thẳng (DN): x – 2y = 0

H là giao điểm của DN và AP ta có toạ độ $H\left(\frac{16}{5};\frac{8}{5}\right)$

Vậy toạ độ các đỉnh của hình vuông là: $A(2;4), D(2;1)$

Bài 4 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hình vuông ... M,N lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC và CD sao ...)Nà đường thẳng MN có phương trình 11x+2y+44=0. Tìm ...

Lời giải

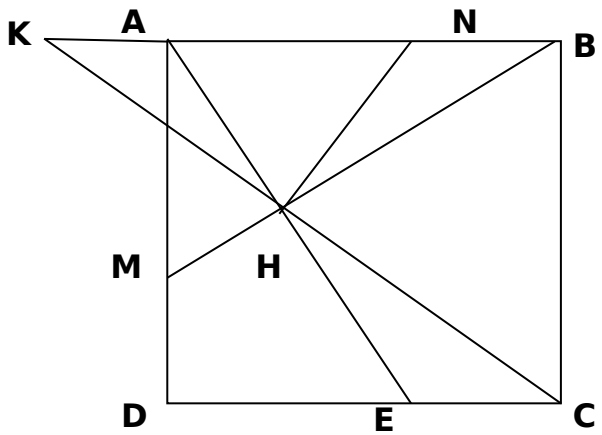


Bước 1:
Gọi E là giao điểm BD và AN,
F là giao điểm BD và AM ,
I là giao điểm ME và NF. T
a có $\widehat{MAN} = \widehat{NDB} = \widehat{MBD} = 45^0$
nên hai tứ giác ADNF, ABNE nội tếp.
Do đó ME $\perp$ AN, NF $\perp$ AM suy ra AI $\perp$ MN.
Gọi H là giao điểm AI và MN.
Ta có ABME, MNEF là các tứ giác nội tiếp
nên $\widehat{AMB} = \widehat{AEB} = \widehat{AMH}$ suy ra $\Delta AMB = \Delta AMH$
do đó B đối xứng của H qua đường thẳng AM.
Bước 2:
Do AH $\perp$ MN tại H ta có phương trình đường thẳng AH 2x-11y+58=0.
Toạ độ H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 11y + 58 = 0 \\ 11x + 2y + 44 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{22}{5} \\ y = \frac{22}{5} \end{cases}$
vậy H($\left(\frac{-24}{5}; \frac{22}{5}\right)$, do B đối xứng H qua AM nên ta có B(0;-2).
Ta có phương trình đường thẳng BC: 2x+4y+8=0
Phương trình đường thẳng CD: 2x-y+18=0
Toạ độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + 4y + 8 = 0 \\ 2x - y + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 2 \end{cases}$ Vậy C(-8;2)
Từ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ta tìm được D(-4;10).
Vậy toạ độ các đỉnh B,C.D là: B(0;-2), C(-8;2), D(-4;10).

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy cho hình vuông ABCD có cạnh bằng $4\sqrt{5}$. Gọi M,N lần lượt là các điểm trên cạnh AD,AB sao cho AM=AN, điểm $H(-\frac{12}{13}; \frac{70}{13})$ là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BM. Điểm C(-8;2), điểm N thuộc đường thẳng x-2y=0. Tìm toạ độ các đỉnh A,B,D của hình vuông.

Lời giải:

Bước 1:



Ta có $\Delta DAE = \Delta ABM \Rightarrow DE = AM = AN \Rightarrow NB = CE$ suy ra tứ giác NBCE là hình chữ nhật nội tiếp đường tròn đường kính NC (1).
Ta có tứ giác BCEH nội tiếp đường tròn (2)
Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm B,C,E,H,N cùng thuộc đường tròn đường kính NC suy ra $HN \perp HC$.

Bước 2: Đường thẳng HN đi qua H và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{CH} = (\frac{92}{13}; \frac{44}{13})$ suy ra phương trình đường thẳng NH là 23x+11y-38=0.

Toạ độ N là nghiệm của hệ phương trình. $\begin{cases} 23x + 11y - 38 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow N(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}) \Rightarrow NC = \frac{20\sqrt{2}}{3}$

Ta có $NB = \sqrt{NC^2 - CB^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3} \Rightarrow AM = AN = AB - NB = \frac{8\sqrt{5}}{3}$

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{8\sqrt{65}}{3} \Rightarrow \frac{AH}{AE} = \frac{6}{13} \Rightarrow \frac{HA}{HE} = \frac{6}{7}$

$\Delta HAK \sim \Delta HEC \Rightarrow \frac{HK}{HC} = \frac{AK}{EC} = \frac{6}{7} \Rightarrow \overrightarrow{HK} = -\frac{6}{7}\overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{AN}$

Suy ra $K(\frac{36}{7}; \frac{58}{7})$ và A(4;6) suy ra $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AN} \Rightarrow B(0;-2)$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow D(-4;10)$

Vậy toạ độ các đỉnh cần tìm là: A(4;6), B(0;-2), D(-4;10).

2.4. Hiệu quả của sáng kiến

Qua quá trình vận dụng chuyên đề vào giảng dạy, tôi nhận thấy khi hướng dẫn học sinh giải các bài toán về hình vuông trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy bằng cách phân loại dạng toán và các bước cụ thể như trên khi thực hiện lời giải thì học sinh học sinh nắm được bài, hiểu được sâu kiến thức, nâng cao được khả năng tư duy và tính sáng tạo trong giải toán.Từ đó học sinh rèn được kĩ năng giải toán, nhiều học sinh say mê, yêu thích chương "Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng – Hình học 10" hơn. Đối với bài kiểm tra các em trình bày chặt chẽ, lôgic hơn với kết quả cụ thể :
Với đề kiểm tra gồm hai câu hỏi:

Câu 1 : *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hình vuông ABCD có tâm I(1;-1). Gọi M là điểm trên CD thoả mãn MC=2MD. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông biết đường thẳng AM có phương trình là 2x-y-5=0.*

Câu 2: *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hình vuông ABCD có đỉnh D(1;-2). Gọi M là trung điểm BC và N là điểm trên cạnh AC sao cho AC=4AN, phương trình đường thẳng MN là: x-y+1=0. Tìm toạ độ các đỉnh A,B,C của hình vuông ABCD biết M có hoành độ dương.*

Cuối năm học 2014 – 2015 khi chưa dạy chuyên đề này,tôi đã chọn 40 học sinh học khối A của lớp 10A1 trường THCS&THPT Thống Nhất khảo sát bằng đề kiểm tra trên và được kết quả như sau :

Lớp	Giỏi		Khá		Trung bình		Yếu	
10A1	4	10%	13	32,5%	15	37,5%	8	20%

Cuối năm học 2015 - 2016 sau khi dạy chuyên đề này tôi đã chọn 40 học sinh học khối A của lớp 10A1 trường THCS&THPT Thống Nhất khảo sát bằng đề kiểm tra trên được **kết quả như sau :**

Lớp	Giỏi		Khá		Trung bình		Yếu	
10A1	12	30%	18	45 %	8	20 %	2	5%

Rõ ràng qua một năm học thực hiện chuyên đề này, kết quả là học tập của học sinh khi giải các bài toán về hình vuông trong mặt phẳng toạ độ Oxy có sự tiến bộ rõ rệt.

PHẦN III. KẾT LUẬN

Trên đây là hệ thống kiến thức tôi đưa ra khi giảng dạy phần: "*Các bài toán về hình vuông trong mặt phẳng toạ độ Oxy"*.Nhìn chung, đây là một dạng toán hay nhưng cũng tương đối khó trong việc phát hiện ra các tính chất hình học để áp dụng và thực hiện lời giải đối với nhiều học sinh.

Qua áp dụng chuyên đề này vào giảng dạy tôi thấy với học sinh có học lực từ trung bình khá trở lên các em đã biết cách khai thác tính chất hình học để giải các bài toán thuộc dạng trên . Với học sinh khá, giỏi các em không còn e ngại khi giải *Các bài toán về hình vuông trong mặt phẳng toạ độ Oxy* ở trong các đề thi của các kỳ thi tuyển sinh đại học, đề thi thử THPT Quốc gia và đề thi học sinh giỏi tỉnh Thanh Hóa, bởi các em đã được cung cấp kiến thức một cách hệ thống và chọn lọc cẩn thận qua đó rèn luyện thành thạo kĩ năng giải toán. Và đây cũng là cơ sở để tôi xây dựng cho học sinh các chuyên đề " Hướng dẫn học sinh giải các bài toán về Hình thoi, Hình chữ nhật, Hình thang, Hình bình hành,… trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

Mặt khác tôi luôn lưu ý với học sinh rằng : " Trong mỗi bài toán luôn phải có sự vận dụng sáng tạo". Đặc biệt là các bài toán có tính phân loại trong các kì thi. Do đó để học sinh học tốt các bài toán dạng này tôi luôn yêu cầu học sinh rèn luyện thêm, đồng thời cần nhìn nhận, phân tích các tính chất hình học, các dấu hiệu riêng biệt được áp dụng với mỗi bài toán.

Đây là chuyên đề hay và khó nên trong quá trình biên soạn chắc chắn còn nhiều thiếu sót, để đạt hiệu quả cao hơn tôi rất mong sự đóng góp ý kiến của độc giả.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Vũ Văn Thành

Thanh Hóa, ngày 26 tháng 5 năm 2016

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác.

Nguyễn Văn Phúc

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Sách giáo khoa Hình học lớp 10, Sách bài tập Hình học lớp 10.

Sách Nâng caoHình học lớp 10.

Đề thi đại học, cao đẳng môn Toán từ các năm 2009 đến 2014

Đề thi THPT Quốc gia năm 2015

Đề thi học sinh giỏi tỉnh Thanh Hóa từ năm học 2009 đến nay.

Báo Toán học và Tuổi trẻ.