SỐ PHỨC TRONG CHỨNG MINH HÌNH HỌC PHẲNG

Batigoal_mathscope.org

Hoangquan9@gmail.com

I.MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Khoảng cách giữa hai điểm

Giả sử có 2 số phức z_1 và z_2 biểu diễn hai điểm M_1 và M_2 trên mặt phẳng tọa độ .Khi đó khoảng cách giữa hai điểm M_1 và M_2 được tính theo công thức

$M_1M_2 = |z_1 - z_2|$

Đặt d(z_1, z_2) = $|z_1 - z_2|$ được xác định như sau:

a, d(z_1, z_2) ≥ 0 $\forall z_1, z_2 \in C$

d(z_1, z_2) $= 0$ $\Leftrightarrow z_1 = z_2$

b, d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1) $\forall z_1, z_2 \in C$

c, d(z_1, z_2)$\leq$ d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2) $\forall z_1, z_2, z_3 \in C$

2.Chia đoạn thẳng theo tỉ lệ k$\neq 1$ ($k \in R$)

a. Cho 2 điểm phân biệt A và B trên mặt phẳng tọa độ được biểu diễn bởi 2 số phức a và b . Gọi M là điểm tùy ý được biểu diễn bởi số phức z . Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k$\neq 1$ như sau:

$$\overrightarrow{MA} = K\overrightarrow{MB}$$

Đưa về số phức ta có a - z = k(b - z) hay (1 - k)z = a - kb.

Từ đó $z = \dfrac{a - kb}{1 - k}$

Chú ý : Với $k = -1$ thì M là trung điểm AB.

b. . Cho 3 điểm không thẳng hàng A, B và C trên mặt phẳng tọa độ được biểu diễn bởi 3 số phức a, b và c. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó điểm G được biểu diễn theo số phức là $z_G = \dfrac{a + b + c}{3}$.

3.Điều kiện để 3 điểm thẳng hàng, hai đường thẳng vuông góc.

Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các số phức lần lượt biểu diễn cho các điểm M_1, M_2, M_3, M_4 trên mặt phẳng phức.

Mệnh đề 3.1 : Ba điểm M_1, M_2, M_3 thẳng hàng khi và chỉ khi:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in R^*$$

Chứng minh: Thật vậy , ba điểm M_1, M_2, M_3 thẳng hàng khi và chỉ

khi $\widehat{M_2 M_1 M_3} \in \{0;\pi\}$ hay $acgument\,\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \{0;\pi\}$, tức là $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in R^*$

Mệnh đề3. 2 Hai đường thẳng M_1M_2, M_3M_4 vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in iR^*$$

Chứng minh: Thật vậy, ta có $M_1M_2 \perp M_3M_4 \Leftrightarrow (M_1M_2, M_3M_4) \in \left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$

$\Leftrightarrow acgument\,\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in \left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$. Từ đó ta có $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in iR^*$.

<u>*Chú ý*</u> : Nếu $M_2 \equiv M_4$ thì $M_1M_2 \perp M_3M_2$ khi và chỉ khi $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \in iR^*$

4. Tam giác đồng dạng

Gọi a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 là các số phức lần lượt biểu diễn cho các điểm A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 trên mặt phẳng phức.

Mệnh đề Hai tam giác $A_1A_2A_3$ và $B_1B_2B_3$ đồng dạng với nhau khi và chỉ khi

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$$

Chứng minh

$\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle B_1B_2B_3 \Leftrightarrow \frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3}$ và $\widehat{A_3A_1A_2} = \widehat{B_3B_1B_2}$, Từ đó $\frac{|a_2 - a_1|}{|a_3 - a_1|} = \frac{|b_2 - b_1|}{|b_3 - b_1|}$

và $acgument\,\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = acgument\,\frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$. Suy ra $\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$.

Ví dụ : Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC, vẽ các tam giác ADB, BEC, CFA đồng dạng với nhau. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$ có cùng trọng tâm.

Chứng minh

Theo giả thiết các tam giác ADB, BEC, CFA đồng dạng với nhau nên ta có :

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{e-b}{c-b} = \frac{f-c}{a-c} = z$$

Từ đó ta có $d = a + (b - a)z$, $e = b + (c - b)z$, $f = c + (a - c)z$.

Nên tính được

$$\frac{d+e+f}{3} = \frac{a+b+c}{3}$$

Vậy hai tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm.

5.Phần thực của tích hai số phức

Cho a và b là hai số phức

Định nghĩa Phần thực tích của hai số phức a và b là một số cho bởi

$$a.b = \frac{1}{2}(\overline{a}b + a\overline{b})$$

Ta dễ thấy $\overline{a.b} = \frac{1}{2}(a\overline{b} + \overline{a}b) = a.b$. Vậy a.b là số thực

Mệnh đề 5.1 Cho a, b, c, z là các số phức, khi đó:

1, $a.a = |a|^2$

2, $a.b=b.a$

3, $a(b+c)=a.b+a.c$

4, $(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b), \forall \alpha \in R$

5, a.b = 0 $\Leftrightarrow OA \perp OB$, trong đó a và b là biểu diễn của điểm A và điểm B trên mặt phẳng phức.

6, (a.z).(b.z)= $|z|^2 (a.b)$

Mệnh đề 5.2

Cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D phân biệt được biểu diễn bởi 4 số phức a, b, c, d tương ứng.Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

1, $AB \perp CD$

2, *(b-a).(d-c) = 0*

3, $\frac{b-a}{d-c} \in iR^*$ (hoặc $\mathrm{Re}(\frac{b-a}{d-c}) = 0$)

Chứng minh

(1)$\Rightarrow$(2)Lấy điểm M(b-a) và N(d-c).Khi đó OABM và OCDN là các hình bình hành.

Ta có $AB \perp CD$ khi và chỉ khi $OM \perp ON$, nghĩa là *m.n=(b-a).(d-c)=0* (theo mệnh đề 5.1)

(2) $\Leftrightarrow$(3) được suy ra theo định nghĩa của tích số thực

II .ỨNG DỤNG VÀO GIẢI TOÁN

<u>Ví dụ 1</u>

Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ khi và chỉ khi $AC \perp BD$.

<u>Chứng minh</u>

Gọi a, b, c, d là các số phức biểu diễn cho các đỉnh A,B , C, D của tứ giác ABCD.

Theo giả thiết ta có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow$ (b-a)(b-a)+(d-c)(d-c)=(d-a)(d-a)+(c-b)(c-b)

$\Leftrightarrow$ a.b + c.d = b.c + d.a

$\Leftrightarrow$ (c - a) . (d - b) = 0 $\Leftrightarrow$ $AC \perp BD$

<u>Nhận xét</u> Rõ ràng ứng dụng số phức để chứng minh thì bài toán đơn giản và ngắn gọn hơn nhiều so với làm hình học thông thường.

<u>Ví dụ 2</u>

Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.Chứng minh rằng $AB \perp CD$ khi và chỉ khi $BC^2 + AD^2 = 2(EG^2 + FH^2)$.

Chứng minh

Gọi a,b,c,d,e,f,g,h là các số phức biểu diễn cho các điểm A, B, C, D, E, F, G, H.

Khi đó ta có :

$e=\frac{a+b}{2}$, $f=\frac{b+c}{2}$, $g=\frac{c+d}{2}$, $h=\frac{d+a}{2}$.

Từ giả thiết ta có $BC^2+AD^2=2(EG^2+FH^2)$

Trở thành (c-b)(c-b)+(d-a)(d-a) = 2(g-e)(g-e)+2(h-f)(h-f)

$\Leftrightarrow$ (c-b)(c-b)+(d-a)(d-a) =

$=\frac{1}{2}(c+d-a-b)(c+d-a-b)+\frac{1}{2}(a+d-b-c)(a+d-b-c)$

$\Leftrightarrow$ c.c + b.b + d.d + a.a - 2b.c - 2a.d = a.a + b.b + c.c + d.d - 2a.c - 2b.d

$\Leftrightarrow$ a.d + b.c = a.c + b.d.

$\Leftrightarrow$ (a - b).(d - c) = 0 $\Leftrightarrow$ $AB\perp CD$.(điều phải chứng minh).

Ví dụ 3

Cho tam giác ABC có trọng tâm G. và AA_1, BB_1, CC_1 lần lượt là các đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A, B, C.Chứng minh rằng với mọi điểm M bất kì ta luôn có:

$MA^2+MB^2+MC^2+9MG^2=4(MA_1^2+MB_1^2+MC_1^2)$ (*)

Chứng minh

Gọi a, b, c, g, a_1, b_1, c_1 lần lượt là các số phức biểu diễn các điểm A, B, C,G,

A_1, B_1, C_1 trên mặt phẳng phức.Khi đó ta có :

$g=\frac{a+b+c}{3}$; $a_1=\frac{b+c}{2}$; $b_1=\frac{c+a}{2}$; $c_1=\frac{a+b}{2}$

Vế trái (*) = $MA^2+MB^2+MC^2+9MG^2$

= (m - a).(m - a) + (m - b).(m - b) + (m - c).(m - c) + $9(m-g)(m-g)$

= (m-a).(m-a) + (m-b).(m-b) + (m-c).(m-c) $+9(m-\frac{a+b+c}{3})(m-\frac{a+b+c}{3})$

= $12|m|^2-8(a+b+c).m+2(|a|^2+|b|^2+|c|^2)+2a.b+2b.c+2c.a$ (1)

Vế phải (*) = $4(MA_1^2 + MB_1^2 + MC_1^2)$

=4[(m- a_1).(m- a_1)+(m- b_1).(m- b_1)+(m- c_1).(m- c_1)]

$$= 4\left[(m - \frac{b+c}{2}).(m - \frac{b+c}{2}) + (m - \frac{c+a}{2}).(m - \frac{c+a}{2}) + (m - \frac{a+b}{2}).(m - \frac{a+b}{2}) \right]$$

$$= 12|m|^2 - 8(a+b+c).m + 2(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2) + 2a.b + 2b.c + 2c.a \quad (2)$$

So sánh (1) và (2), ta có vế trái (*) = vế phải (*) .Bài toán được chứng minh.

<u>Ví dụ 4</u>

Cho 4 điểm A, B, C, D bất kì.Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$$

<u>Chứng minh</u>

Gọi a, b, c, d lần lượt là tọa vị của các điểm A, B, C, D trên mặt phẳng phức ta có:

Vế trái = $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$ = $(a-d).(c-b) + (b-d).(a-c) + (c-d).(b-a)$

$= ac - ab - dc + db + ba - bc - da + dc + cb - ca - db + ad$

= 0 = vế phải (ĐFCM)

<u>Ví dụ 5</u>

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại A là:

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = AB^2$$

<u>Chứng minh</u>

Gọi a, b, c lần lượt là tọa vị của các điểm A, B, C trên mặt phẳng phức ta có:

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = AB^2 \Leftrightarrow (a-b).(c-b) = (b-a).(b-a)$

$\Leftrightarrow ac - ab - bc + b^2 = b^2 - 2ab + a^2$

$\Leftrightarrow ac - a^2 + ab - bc = 0$

$\Leftrightarrow ac - a^2 + ab - bc = 0$

$\Leftrightarrow \ (a-b).(c-a)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=0$ hay $AB \perp AC$, tức là tam giác ABC vuông ở A. (ĐFCM).

Ví dụ 6

Cho tam giác ABC với ba đường trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}=0 \quad (*)$$

Chứng minh

Gọi *a, b, c, d, e, f* lần lượt là tọa vị của các điểm A, B, C, E, F trên mặt phẳng phức ta có: $d=\frac{b+c}{2}$, $e=\frac{a+c}{2}$, $f=\frac{a+b}{2}$. (vì AD, BE, CF là các đường trung tuyến)

VT (*) = $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = (c-b).(d-a)+(a-c).(e-b)+(b-a).(f-c)$

$$= (c-b).(\frac{b+c}{2}-a)+(a-c).(\frac{a+c}{2}-b)+(b-a).(\frac{a+b}{2}-c)$$

$$= \frac{cb+c^2-b^2-bc}{2}-ca+ab+\frac{a^2+ac-ca-c^2}{2}-ab+cb+\frac{ba+b^2-a^2-ab}{2}-bc+ac$$

$$=\frac{c^2-b^2+a^2-c^2+b^2-a^2}{2}-ca+ab-ab+cb-bc+ac = 0 = \text{VP}(*) \quad \text{(ĐFCM)}$$

Ví dụ 7 Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng :

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2 \quad (*)$$

Chứng minh

Gọi *a, b, c, d, m, n* lần lượt là tọa vị của các điểm A, B, C, M, N trên mặt phẳng phức.

Ta có $m=\frac{a+c}{2}$; $n=\frac{b+d}{2}$ (M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD)

Vế trái (*) $= AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$

$= (a-b)(a-b)+(b-c)(b-c)+(c-d)(c-d)+(d-a)(d-a)$

$=2(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-da)$ (1)

Vế phải (*) $=AC^2+BD^2+4MN^2$

$= (a-c)(a-c)+(b-d)(b-d)+4(m-n)(m-n)$

$= (a-c)(a-c)+(b-d)(b-d)+4(\frac{a+c}{2}-\frac{b+d}{2})(\frac{a+c}{2}-\frac{b+d}{2})$

$= (a-c)(a-c)+(b-d)(b-d)+(a+c-b-d)(a+c-b-d)$

$= 2(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-da)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 = AC^2+BD^2+4MN^2$ (điều phải chứng minh)

Ví dụ 8

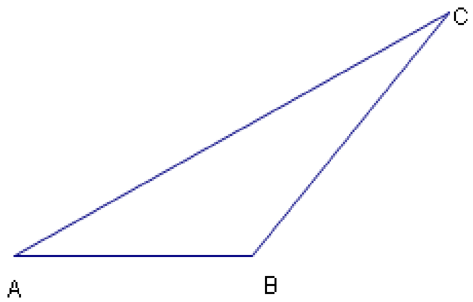
Chứng minh định lí COSIN (SGK Hình học 10) .

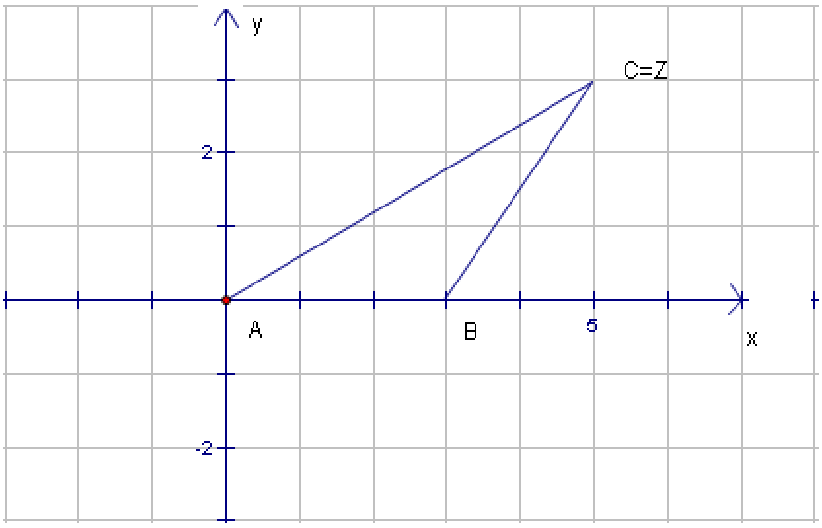
Cho tam giác ABC , Chứng minh rằng $BC^2 = AB^2+AC^2-2AB.AC\cos\hat{A}$.

Chứng minh

Không mất tổng quát, ta chọn A là gốc tọa độ ,B là điểm nằm trên trục hoành có hoành độ phức là 1., C là điểm biểu diễn số phức z bất kì.

Khi đó ta có . $|AB|=1$, $|BC|=|z-1|$, $|AC|=|z|$.





Ta có $AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\hat{A} = 1 + |z|^2 - 2|z|\cos\arg z$

$$= 1 + z.\bar{z} - 2|z|\frac{Re(z)}{z}$$

$$= 1 + z.\bar{z} - 2|z|\frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$= z.\bar{z} + 1 - z - \bar{z} = (z-1)(\bar{z}-1) = |z-1|^2 = BC^2$$ (ĐPCM