

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT NGUYỄN THỊ LỢI

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**ỨNG DỤNG SỐ PHỨC ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI
TOÁN HÌNH HỌC VÀ LƯỢNG GIÁC**

Người thực hiện: Trần Công Sinh
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc lĩnh vực: Môn Toán

THANH HÓA NĂM 2017

Mục lục

	<i>Trang</i>
1. Mở đầu	2
1.1. Lí do chọn đề tài	2
1.2. Mục đích nghiên cứu	2
1.3. Đối tượng nghiên cứu	3
1.4. Phương pháp nghiên cứu	3
2. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm	3
2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm	3
2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm	4
2.3. Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề	4
2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm	14
3. Kết luận, kiến nghị	15
3.1. Kết luận	15
3.2. Kiến nghị	15
Tài liệu tham khảo	16

ỨNG DỤNG SỐ PHỨC ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC VÀ LƯỢNG GIÁC

1. Mở đầu

1.1. Lí do chọn đề tài

Việc giải các bài toán hình học và lượng giác là quá trình mò mẫm, tìm tòi, vận dụng nhiều kiến thức và tổng hợp dựa trên những hiểu biết của người học. Có người phải mày mò rất lâu, thử hết cách này đến cách khác mới giải được, trong khi có người lại tìm được cách giải rất nhanh. Vậy đâu là bí quyết cho khả năng giải các bài toán hình học và lượng giác nhanh gọn và chính xác? Cách rèn luyện chúng như thế nào? Vận dụng những kiến thức gì? Sau đây tôi xin trình bày một số kinh nghiệm nhỏ của tôi trong đề tài này giúp các em học sinh tìm ra những con đường giải một số bài toán hình học nhanh gọn, tìm tòi lời giải một bài toán ở những góc độ khác nhau, khía cạnh khác nhau. Đặc biệt trong giai đoạn hiện nay chúng ta đang nghiêm túc thực hiện cuộc vận động hai không với 4 nội dung của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo thì việc trang bị cho các em học sinh những phương pháp tìm tòi lời giải bài toán, định hướng trong tư duy là hết sức quan trọng. Hơn nữa chúng ta đang cho học sinh tiếp cận và làm quen với ứng dụng của số phức và cách vận dụng mà lâu nay ta chưa cho học sinh làm quen. Trước đây ta chỉ giải các bài toán hình học bằng các phương pháp sơ cấp. Trong đề tài này tôi mạnh dạn đưa ra kinh nghiệm mà bản thân đã thực tế giảng dạy và tự tìm tòi nghiên cứu để giúp các em học sinh rèn luyện tư duy theo chiều hướng mới trong giải toán và tìm thấy những vấn đề hay của bộ môn toán.

1.2. Mục đích nghiên cứu

Giúp các em học sinh áp dụng kiến thức của số phức, giải được các bài toán hình học.

- Rèn luyện khả năng phân tích bài toán.

- Rèn luyện khả năng định hướng đường lối giải bài toán hình học và lượng giác trên trường số phức

- Rèn luyện khả năng chọn lựa các phương pháp và công cụ thích hợp để giải toán.

- Rèn luyện khả năng kiểm tra bài giải.

- Rèn luyện khả năng tìm kiếm các bài toán liên quan và sáng tạo các bài toán mới.

1.3. Đối tượng nghiên cứu

Ứng dụng số phức để giải một số bài toán hình học và lượng giác

1.4. Phương pháp nghiên cứu

Để thực hiện đề tài này tôi đã sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp nghiên cứu tài liệu

- Phương pháp nghiên cứu thực tế:

+ Dự giờ, trao đổi ý kiến với đồng nghiệp

+ Tổng kết rút kinh nghiệm trong quá trình dạy học

+ Tổ chức và tiến hành thực nghiệm sư phạm

2. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm

2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm

- Học sinh áp dụng kiến thức về số phức để giải bài toán hình học và lượng giác trong các vấn đề đã nêu ở mục a. Học sinh có đủ tự tin vào phương pháp mà mình đã tiến hành và hy vọng ở tính đúng đắn ở mọi phương pháp, giúp các em có điều kiện đón nhận các kết quả xảy ra và kiểm nghiệm tính đúng đắn của sự đoán nhận đó qua chứng minh. Các em học sinh sẽ biết phân tích các năm bắt các bài toán ở dạng riêng lẻ và dạng tổng quát từ đó các em nhận dạng được các bài toán cũng như phân loại được các bài toán mới. Từ việc đoán nhận được quá trình hình thành bài toán của tác giả thì học sinh sẽ có được sự hiểu biết sâu sắc về bài toán mà mình giải và có thể sáng tạo được các bài toán mới.

- Yêu cầu của đề tài này

+ Người dạy phải tổng hợp được kiến thức về số phức cho học sinh và chọn được những bài toán điển hình, truyền đạt theo hệ thống logic từ đó đến khó để học sinh dễ tiếp cận với phương pháp.

+ Người học phải chủ động tiếp thu kiến thức, tìm tòi các bài toán mới và vận dụng linh hoạt vào quá trình giải toán. Thường xuyên tư duy liên tục để hiểu sâu sắc được các bài toán.

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

- Trong thời điểm hiện nay đặc biệt là các em học sinh trường THPT Nguyễn Thị Lợi thì việc học sinh tìm ra lời giải của các bài toán hình học và lượng giác là rất khó khăn, các em thường lúng túng khi đứng trước các bài toán của chương trình sách giáo khoa cơ bản.

- Số phức là một vấn đề mới (trước đây đã đưa vào chương trình Phổ thông chuyên ban) mà vấn đề áp dụng ở đây là giải các bài toán hình học và lượng giác nên rất phức tạp và khó khăn. Bởi vì các bài toán hình học và lượng giác đã là rất khó.

- Vì vậy chất lượng ở một số học sinh, có học lực yếu nên không tìm ra cách giải mới (ngoài phương pháp sơ cấp) thì học lực của các em có chiều hướng đi xuống.

- Trong năm học 2016-2017 ở lớp 12E qua các bài toán áp dụng số phức để giải các bài toán hình học, kết quả của học sinh như bảng sau:

Loại sĩ số	Giỏi		Khá		Trung bình		Yếu		Kém	
	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
37	4	10.8	15	40.5	18	48.7	0	0	0	0

2.3. Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề

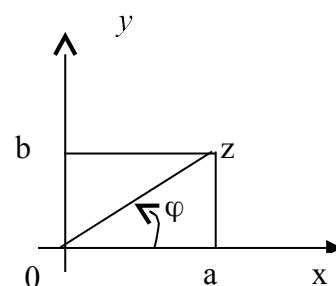
Trong quá trình triển khai tôi đã tổ chức cho học sinh áp dụng kiến thức số phức để giải một số bài toán hình học thông qua các ứng dụng cụ thể với những kiến thức cụ thể trong từng vấn đề.

Rèn luyện khả năng phân tích bài toán

Đó là việc xem xét, nghiên cứu bài toán đã cho. Ở đây vấn đề quan trọng là cách nhìn bài toán. Phải biết cách nhìn bài toán dưới dạng chính quy, mẫu mực. Đây là cách nhìn trực tiếp vào đặc điểm chủ yếu của bài toán. Cách nhìn này giúp học sinh phát hiện được các đặc điểm cơ bản, đơn giản nếu không bị che khuất bởi hình thức rắc rối. Tuy vậy học sinh lại phải biết cách nhìn bài toán dưới dạng đặc thù, riêng lẻ, phải luyện tập nhiều. Từ đó mới biết khai thác hết các khía cạnh biểu hiện tinh vi của bài toán.

Số phức từ khi ra đời, đã thúc đẩy toán học tiến lên và giải quyết được một số vấn đề về khoa học kỹ thuật. Riêng trong hình học, số phức cũng có những ứng dụng quan trọng. Bài này sẽ giới thiệu việc áp dụng số phức để giải một số bài toán hình học.

a. Lý thuyết số phức đã được trình bày trong sách giáo khoa phổ thông. Cũng nên nhắc lại việc biểu diễn hình học các số phức vì đó là cái cầu nối liên lý thuyết số phức với hình học. Trên mặt phẳng quy về hai trục tọa độ vuông góc với Ox và Oy , một số phức

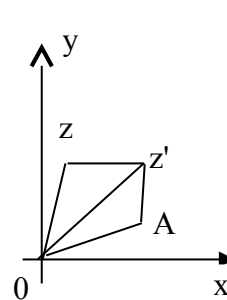


Hình 1

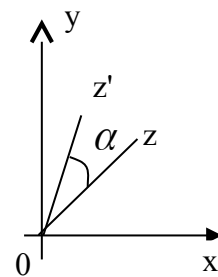
$z = a + bi$ được biểu diễn bởi một điểm Z có hoành độ a và tung độ b . Nếu số phức được viết dưới dạng lượng giác $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ thì môđun $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = OZ$, còn argumen φ là góc giữa trục hoành và OZ (hình 1). Như vậy, ta cũng có thể biểu diễn số phức z bởi vector $\overrightarrow{OZ}$.

Để tiện việc trình bày sau này, ta sẽ ký hiệu các điểm bằng các chữ $A, B, C, \dots, Z$, còn các số phức tương ứng theo thứ tự được ký hiệu bằng các chữ thường $a, b, c, \dots, z$.

b/ Trước hết cần làm quen với các phép biến hình thường gặp. Ta sẽ thống nhất kí hiệu $Z'(z')$ là ảnh của điểm $Z(z)$. (Những điều không khó lắm, xin dành việc chứng minh cho bạn đọc).



Hình 2



Hình 3

- Phép đối xứng qua gốc toạ độ: $z' = -z$.

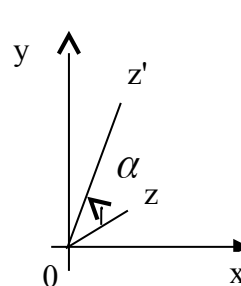
- Phép đối xứng qua trục Ox : $z' = \bar{z}$

(liên hợp của z).

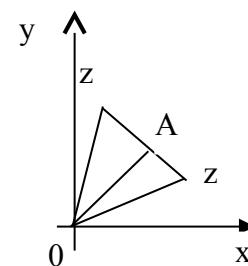
- Phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OA}$ (hình 2):

$$z' = z + a \quad (1)$$

(vì $\overrightarrow{OZ'} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OA}$)



Hình 4



Hình 5

- Phép quay góc α xung quanh gốc toạ

độ O:

$$z' = qz \quad (2)$$

Trong đó $q = \cos \alpha + i \sin \alpha$ (hình 3). Điều này suy ra dễ dàng nếu nhớ lại quy tắc nhân hai số phức: khi nhân hai số phức thì môđun của tích bằng tích các môđun, còn argumen của tích thì bằng tổng các argumen của hai thừa số.

- Phép vị tự tâm O tỉ số k ; $z' = kz$

- Phép quay góc α quanh O rồi tiếp theo, phép vị tự tâm O tỉ số k (hình 4);

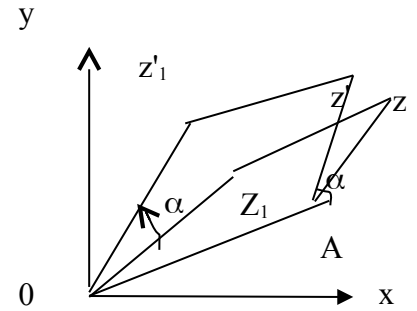
$$z' = pz \text{ với } p = k(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

- Phép đối xứng qua điểm A. Vì A là trung điểm đoạn ZZ' (hình 5)

nên $OA = (1/2)(OZ + \overrightarrow{OZ'})$, từ đó $a = (1/2)(z + z')$ hay $z' = 2a - z$. Đó là công thức của phép đối xứng qua điểm A.

- Phép quay góc α xung quanh điểm A.

Nếu thực hiện một phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OA}$ thì rõ ràng điểm A biến thành điểm O (hình 6), còn các điểm Z và Z' theo thứ tự biến thành các điểm Z_1 và Z'_1 xác định bởi $z_1 = z - a$ và $z'_1 = z' - a$ (theo công thức (1). Nếu Z' là ảnh của z trong phép quay góc α quanh A thì z_1 sẽ là ảnh của Z_1 trong phép quay góc α quanh O, và ngược lại.



Hình 6

Theo công thức (2) ta có $Z'_1 = qz_1$ hay

$$z' - a = q(z - a) \quad (3)$$

với $q = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Đó là phép quay góc α quanh điểm A.

Bằng phương pháp tịnh tiến về gốc như trên ta suy ra công thức các phép biến hình sau:

- Phép vị tự tâm A tỉ số k;

$$z' - a = k'(z - a)$$

- Phép quay góc α xung quanh điểm A, rồi tiếp theo, phép vị tự tâm A tỉ số k:

$$z' - a = p(z - a) \quad (4)$$

$$\text{với } p = k(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

*** Để chuẩn bị cho việc làm toán, ta hãy tập duyệt diễn đạt những tính chất hình học quen thuộc bằng những biểu thức số phức:**

- Nếu M là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $MA/MB = k$ thì ta có

$$(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})/(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) = k \quad \text{hay} \quad \overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB})/(1 + k). \quad \text{Từ đó có}$$

thế thức số phức:

$$m = (a + kb)/(1+k) \quad (5)$$

Đặc biệt nếu M là trung điểm của đoạn AB thì $m = (a + b)/2$

- Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{OG} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})/3$

$$\text{Từ đó ta có } g = (a + b + c)/3$$

- Điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD là một hình bình hành là các đường chéo AC và BD của nó có trung điểm trùng nhau, hay

$$a + c = b + d \quad (7)$$

- Điều kiện cần để hai đoạn thẳng AM và AN vuông góc và bằng nhau là

$$m - c = \pm i (n - a) \quad (8)$$

áp dụng công thức (3) trong đó

$$p = \cos(\pm 90^\circ) = \pm i$$

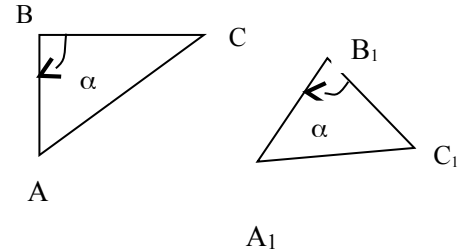
- Điều kiện cần và đủ để hai

tam giác ABC và $A_1B_1C_1$

đồng dạng và cùng hướng là

$$(a - b)/(c - b) = (a_1 - b_1)/(c_1 - b_1) \quad (9)$$

Hình 7



Thật vậy, nếu thực hiện phép quay góc α quanh điểm B (hình 7) rồi tiếp theo đó, phép vị tự tâm B tỉ số $k = BA/BC$ thì C biến thành A. Theo công thức (4) ta có

$$a - b = \mu(c - b) \quad (10)$$

với $p = k(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

Hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ đồng dạng và cùng hướng khi và chỉ khi

$$CBA = C_1B_1A_1 = \alpha \text{ (cùng hướng), và } B_1A_1/B_1C_1 = BA/BC = k$$

$$a_1 - b_1 = p(c_1 - b_1) \quad (11)$$

Từ các hệ thức (10) và (11) ta rút ra

$$(a-b)/(c-b) = (a_1 - b_1)/(c_1 - b_1)$$

Đó chính là điều kiện cần và đủ để hai tam giác đã cho đồng dạng và cùng hướng.

Chú thích: Hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ được gọi là cùng hướng nếu trong khi đi trên chu vi của tam giác ABC từ A đến B rồi đến C và trở về A cũng như khi đi trên chu vi của tam giác $A_1B_1C_1$ từ A_1 đến B_1 rồi đến C_1 và trở về A_1 , ta cùng đi theo chiều kim đồng hồ. Nếu không thỏa mãn điều đó thì hai tam giác đã cho gọi là ngược hướng.

*** Bây giờ ta vận dụng những điều trình bày trên để giải một số bài toán hình học phẳng.**

1. Cho hai hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ theo cùng một tỉ số k . Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là một hình hình hành và tìm quỹ tích giao điểm các đường chéo của hình bình hành này khi k thay đổi.[1]

Lời giải: Theo giả thiết ta có (áp dụng các công thức (7) và (5))

$$a_1 + c_1 = b_1 + d_1, a_2 + c_2 = b_2 + d_2, a = (a_1 - ka_2)/(1 - k)$$

$$b = (b_1 - kb_2)/(1 - k) \quad c = (c_1 - kc_2)/(1 - k)$$

$$d = (d_1 - kd_2)/(1 - k).$$

Từ những hệ thức trên dễ dàng rút ra $a + c = b + d$, chứng tỏ rằng tứ giác $ABCD$ là một hình hình hành. Gọi M_1 , M_2 và M là giao điểm các đường chéo của các hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ và $ABCD$. Cũng tương tự các hệ thức ta rút ra

$$m = (a + c)/2 = [a_1 + c_1]/2 - k(a_2 + c_2)/2]/(1 - k) = (m_1 - km_2)/(1 - k)$$

Hệ thức này chứng tỏ M nằm trên đường thẳng M_1M_2 và chia đoạn M_1M_2 theo tỉ số k . Khi k thay đổi, quỹ tích của M là đường thẳng M_1M_2 .

2. Người ta dựng ở phía ngoài tam giác ABC các tam giác đồng dạng ABK , BCL và CAM . Chứng minh rằng các tam giác KLM và ABC có trọng tâm trùng nhau.[2]

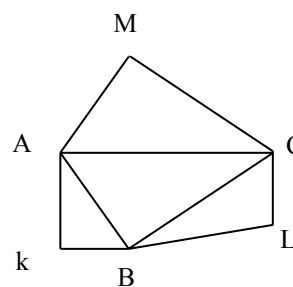
Lời giải:

Theo công thức (9) ta có hình (8):

$$(a - k)/(b - k) = (b - l)/(c - l) = (c - m)/(a - m) = p$$

(p là một số phức nào đó)

Từ đó rút ra $k = (a - pb)/(1 - p)$



$$l = (b - pc)/(1 - p), m = (c - pa)/(1 - p)$$

Hình 8

p)

Ta có $1/3(k + l + m) = 1/3(a - pb + b - pc + c - pa)/(1 - p) = 1/3(a + b +$

c).

Điều này chứng tỏ rằng trọng tâm của các tam giác KLM và ABC trùng nhau.

Chú ý: Nếu dựng các tam giác ABK, BCL, CAM ở phía trong tam giác ABC thì kết quả trên vẫn còn đúng. Tóm lại chỉ cần các tam giác đó cùng hướng là được.

3. Người ta dựng phía ngoài tứ giác lồi ABCD hai hình vuông ABMN và CDKL. Chứng minh rằng các trung điểm các đường chéo của các tứ giác ABCD và MNKL là các đỉnh của một hình vuông hoặc có thể trùng nhau.

Lời giải: Theo công thức (8) ta có hình (9) $n - a = i(b-a)$, $a - b = i(m - b)$

Từ đó rút ra $n = a + i(b - a)$, $m = b + i(b - a)$.

Tương tự ta có $l = c + i(d - c)$ và $k = d + i(d - c)$.

Gọi U, V, S, T theo thứ tự là trung điểm các đường chéo AC, BD, KM và LN ta có

$$u = (a + c)/2, v = (b + d)/2$$

$$s = [b + d + i(b + d - a - c)]/2$$

$$t = [a + c + i(b + d - a - c)]/2 \text{ ta có}$$

$$v + t = [a + b + c + d + i(b + d - a - c)]/2 = u + s.$$

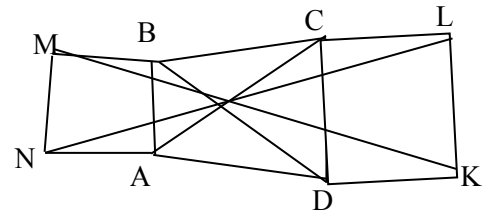
$$v - t = (b + d - a - c)(1 - i)/2$$

$$u - s = (a + c - b - d)(1 + i)/2$$

Giả sử $b + d - a - c \neq 0$ ta có

$$(v - t)/(u - s) = -(1 - i)/(1 + i) = -(1 - i)^2/[(1 + i)(1 - i)] = i$$

Các hệ thức $(v - t)/(u - s) = i$ và $v + t = u + s$ theo thứ tự chứng tỏ rằng các đường chéo VT và US của tứ giác UVST vuông góc, bằng nhau và có



trung điểm trùng nhau, tức là tứ giác UVST là hình vuông. Trong trường hợp $b + d - a - c = 0$

tức $a + c = b + d$, tứ giác ABCD là hình bình hành. Lúc đó ta có $v - t = u - s = 0$, và cùng với $v + t = u + s$, ta rút ra $u = v = s = t$, tức là các điểm U, V, S và T trùng nhau.

*** Bây giờ ta vận dụng những điều trình bày trên để giải một số bài toán lượng giác.**

Sau khi dạy cho học sinh phương pháp chọn tọa độ phức thích hợp cho một bài toán, chúng ta có thể đưa ra ví dụ sau đây.

Ví dụ 1:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$, với A, B, C là các góc của tam giác ABC.[3]

Ở lớp 11, học sinh đã biết chứng minh trong tam giác ABC, ta có:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4\cos A \cos B \cos C - 1$$

Khi đó đứng trước bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của P, học sinh sẽ gặp khó khăn trong việc biến đổi để có thể đưa P về biểu thức có thể đánh giá được. Từ đó dẫn học sinh tới việc phải tính các giá trị cosin của các góc, mà điều đó sẽ thuận lợi hơn khi ta chọn được một tọa độ phức thích hợp cho các đỉnh.

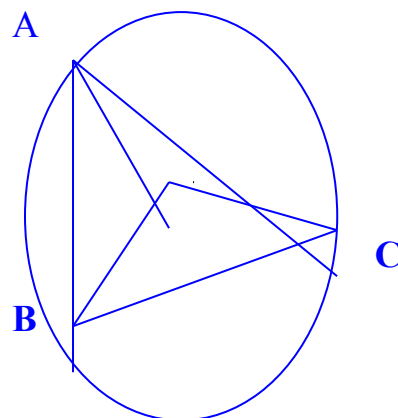
GIẢI: Chọn đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC làm đường tròn đơn vị; giả sử tọa độ của các đỉnh tam giác: Đỉnh A là a; đỉnh B là b; đỉnh C là c. Ta có: $\cos 2A =$

$$\cos 2A = \frac{\bar{b}\bar{c}}{2|b||c|} + \frac{c\bar{b}}{2|b||c|} = \frac{1}{2}\bar{b}\bar{c} + c\bar{b} \text{ do } a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$$

Tương tự ta có:

$$\cos 2B = \left[\frac{1}{2} c\bar{a} + a\bar{c} \right], \cos 2C = \left[\frac{1}{2} a\bar{b} + b\bar{a} \right]$$

$$\Rightarrow P = \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = \frac{1}{2} [b\bar{c} + c\bar{b} + c\bar{a} + a\bar{c} + a\bar{b} + b\bar{a}]$$



$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} [a\bar{a} + a\bar{b} + a\bar{c} + b\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{c} + c\bar{a} + c\bar{b} - a\bar{a} - b\bar{b} - c\bar{c}] \\ &= \frac{1}{2} [a\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + b\bar{b} + \bar{a} + \bar{c} + c\bar{c} + \bar{a} + \bar{b} - 3] \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} [a + b + c] [\overline{a + b + c}] \geq -\frac{3}{2}, \text{ do: } (a + b + c)\overline{a + b + c} \geq 0 \end{aligned}$$

Do đó $P_{\min} = -\frac{3}{2}$, khi và chỉ khi $a + b + c = 0$ hay $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 0$,

Suy ra $O = G$, điều đó có nghĩa là tam giác ABC là tam giác đều.

Như vậy, thông qua ví dụ này giáo viên đã khắc sâu được kiến thức về chọn tọa độ thích hợp cho một bài toán. Đặc biệt giúp học sinh ôn tập lại kiến thức đã học như: công thức tính góc, tính chất về môđun, tính chất về tọa độ của các điểm thuộc đường tròn đơn vị, ... Qua bài toán cũng góp phần rèn luyện kỹ năng tính toán, kỹ năng biến đổi số phức cho học sinh.

- Với chức năng giáo dục, bài tập giúp học sinh hình thành thế giới quan duy vật biện chứng, từng bước nâng cao hứng thú học tập, tạo niềm tin ở bản thân học sinh và phẩm chất của con người lao động mới; rèn luyện cho

học sinh đức tính kiên nhẫn, bền bỉ, không ngại khó, sự chính xác và chu đáo trong khoa học.

Có thể thấy rõ điều này qua ví dụ 1 mà ta xét ở trên. Sau khi học sinh liên hệ đến bài tập đã biết ở lớp 11, bước đầu gây cho các em khó khăn trong việc tìm hướng giải quyết bài toán. Sau khi gợi ý cho học sinh có thể sử dụng số phức để giải bài toán này nhờ việc chọn toạ độ thích hợp cho các yếu tố của bài toán sẽ tạo cho các em một niềm tin vào bản thân, tạo cho các em hứng thú hơn bởi có thể giải bài toán trên bằng nhiều con đường khác nhau. Giáo viên cũng cần quan tâm, động viên để các em kiên trì biến đổi đưa đến kết quả của bài toán.

Với chức năng phát triển, bài tập giúp học sinh ngày càng nâng cao khả năng suy nghĩ, rèn luyện các thao tác tư duy như: phân tích, tổng hợp, suy diễn, quy nạp, tương tự, đặc biệt hoá, khái quát hoá, ... thông thạo một số phương pháp suy luận toán học, biết phát hiện và giải quyết vấn đề một cách thông minh, sáng tạo. Từ đó hình thành phẩm chất tư duy khoa học.

Quay trở lại ví dụ 1, sau khi học sinh đã hoàn thành lời giải cho bài toán, giáo viên có thể đưa ra một số bài toán khác gần gũi hoặc là những trường hợp đặc biệt, tương tự với bài toán trên, chẳng hạn:

Bài 1: Chứng minh rằng, với mọi tam giác ABC ta có:[4]

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC, chứng minh rằng:[5]

$$\cos 2A - \cos 2B - \cos 2C < \frac{3}{2}$$

Do học sinh đã giải được bài toán trên nên khi xét các trường hợp đặc biệt, tương tự này sẽ tạo cho học sinh tích cực hơn trong việc tìm lời giải của bài toán. Qua đó hình thành cho học sinh biết suy nghĩ, suy xét bài toán ở những góc độ khác nhau, biết xét các trường hợp đặc biệt để tìm lời giải cho những bài toán lớn.

- Với chức năng kiểm tra, bài tập giúp giáo viên và học sinh đánh giá được mức độ và kết quả của quá trình dạy và học, đồng thời nó cũng đánh giá khả năng độc lập toán học và trình độ phát triển của học sinh.

- Thông qua giải bài tập, giáo viên có thể tìm những điểm mạnh, những hạn chế trong việc tiếp thu và trình bày tri thức của học sinh. Qua đó có thể bổ sung, rèn luyện và bồi dưỡng tiếp cho học sinh.

Có thể nói rằng hiệu quả của việc dạy toán ở trường phổ thông phần lớn phụ thuộc vào việc khai thác và thực hiện một cách đầy đủ các chức năng có thể có của các tác giả viết sách giáo khoa đã có dụng ý đưa vào chương trình. Người giáo viên phải có nhiệm vụ khám phá và thực hiện dụng ý của tác giả bằng năng lực sư phạm của mình.

- Các biện pháp đã thực hiện

Trong quá trình triển khai ý tưởng của đề tài tôi đã tổ chức cho học sinh rèn luyện để phát triển tư duy theo các hình thức.

- Tổ chức cho học sinh trong những tiết ôn tập chương, ôn tập học kỳ, các giờ bài tập có từ 2 tiết trở lên.

- Tổ chức cho học sinh học tập trong các giờ bồi dưỡng buổi chiều, tổ chức học tập theo nhóm để từ đó phân loại học sinh và tạo cho các em học sinh có thể hỗ trợ nhau trong quá trình chủ động tìm tòi kiến thức.

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm

Trong suốt năm học kể từ khi ôn tập những kiến thức khối 12 cho học sinh các buổi chiều và kiến thức của học sinh lớp 12A2 học sinh đã tiếp thu và việc tìm ra lời giải các bài toán học sinh đã tiến bộ rõ rệt, kết quả thu được như sau:

Loại sĩ số	Giỏi		Khá		Trung bình		Yếu		Kém	
	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
37	7	18.9	20	54.1	10	27	0	0	0	0

3. Kết luận, kiến nghị

3.1. Kết luận

Với đề tài này tôi mạnh dạn đưa ra những kinh nghiệm nhằm rèn luyện và phát triển tư duy cho học sinh dựa trên cơ sở định hướng cách giải các bài toán, loại bài toán dựa trên các nội dung chính đó là: Khả năng phân tích bài toán định hướng và xác định đường lối giải bài toán, khả năng lựa chọn các phương pháp và công cụ thích hợp để giải toán, khả năng kiểm tra bài giải và khả năng tìm kiếm các bài toán liên quan và sáng tạo các bài toán mới định hướng giải bài toán ở các góc cạnh và khía cạnh khác nhau.

3.2. Kiến nghị

Đề nghị Sở Giáo dục và Đào tạo biên soạn thành sách các sáng kiến đổi mới đã được xếp loại trở thành cuốn tài liệu giúp ích trong công tác giảng dạy của giáo viên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bộ GD-ĐT, Bộ đề thi tuyển sinh đại học năm 1996, NXBGD, 1996
2. Ths Lê Hồng Đức, Vương Ngọc, Nguyễn Tuấn Phong, Lê Hữu Trí, Bài giảng trọng tâm chương trình toán 10, NXBĐHQGHN, 2011
3. Phan Huy Khải, Toán bồi dưỡng nâng cao hình học 10, NXBGD
4. Trần Phương, Tuyển tập các chuyên đề luyện thi đại học môn toán hệ thức lượng giác, NXBHN, 2004
5. Lê Mậu Thông, Trần Đức Huyền, Lê Mậu Thảo, Phân loại và phương pháp giải toán lượng giác 11, NXBHN, 2005

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ *Sầm Sơn, ngày 10 tháng 5 năm 2017*

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của
mình viết, không sao chép nội dung của
người khác

Trần Công Sinh

