

1

2

3

MỤC LỤC

4

5	LỜI NÓI ĐẦU.....	4
6	CHƯƠNG I MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN.....	4
7	CỦA HÀM LƯỢNG GIÁC.....	4
8	CHƯƠNG II MỐI TƯƠNG QUAN GIỮA CÁC.....	5
9	BIỂU THỨC ĐẠI SỐ VÀ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC.....	5
10	CHƯƠNG III CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ.....	6
11	BẰNG PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC.....	6
12	I. DẠNG 1: SỬ DỤNG HỆ THỨC $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	6
13	II. DẠNG 2: SỬ DỤNG ĐÁNH GIÁ.....	10
14	III. DẠNG 3: SỬ DỤNG CÔNG THỨC.....	12
15	IV. DẠNG 4: SỬ DỤNG CÔNG THỨC $\sin 2t =$	16
16		16
17	V. DẠNG 5: ĐỔI BIẾN SỐ ĐỐI VỚI BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC.....	18
18	VI. MỘT SỐ VÍ DỤ ĐẶC SẮC.....	20
19	KẾT LUẬN.....	26
20	TRONG TOÀN BỘ ĐỀ TÀI CHÚNG TÔI ĐÃ HỆ THỐNG LẠI MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ CÓ THỂ DÙNG PHƯƠNG	
21	PHÁP LƯỢNG GIÁC ĐỂ CHỨNG MINH. CHÚNG TÔI ĐÃ PHÂN LOẠI CHÚNG THEO TỪNG DẠNG, TRÌNH BÀY CỤ THỂ	
22	PHƯƠNG PHÁP ĐỂ CHỨNG MINH VÀ CÓ NHỮNG VÍ DỤ MINH HỌA KÈM THEO MỖI PHƯƠNG PHÁP. NHỮNG VÍ DỤ	
23	ĐÓ ĐƯỢC SẮP XẾP TỪ ĐƠN GIẢN ĐẾN PHỨC TẠP VỚI LỜI GIẢI KHÁ CHI TIẾT, ĐA DẠNG, BAO QUÁT MỌI KHÍA CẠNH LÝ	
24	THUYẾT VÀ DỄ HIỂU, CÓ THỂ GIÚP BẠN ĐỌC NẮM BẮT NHANH VÀ HIỆU QUẢ PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC TRONG	
25	CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ. SAU KHI ĐỌC ĐỀ TÀI, BẠN ĐỌC SẼ CÓ THÊM MỘT PHƯƠNG PHÁP MỚI ĐỂ	
26	CHỨNG MINH MỘT SỐ BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ MỘT CÁCH HIỆU QUẢ HƠN.....	26
27	TUY NHIÊN VÌ TRONG THỜI GIAN NGẮN VÀ KIẾN THỨC CHƯA SÂU RỘNG NÊN CÓ NHỮNG BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC	
28	DÙNG LƯỢNG GIÁC HÓA ĐỂ CHỨNG MINH NHƯNG KHÔNG THEO MỘT PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ CỤ THỂ NÀO MÀ	
29	DỰA VÀO NHỮNG TÍNH CHẤT ĐẶC BIỆT CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ NHỮNG YẾU TỐ TRONG BÀI TOÁN ĐỂ	
30	CHỨNG MINH KHÔNG ĐƯỢC CHÚNG TÔI TRÌNH BÀY CỤ THỂ VÀ CHI TIẾT TRONG ĐỀ TÀI NÀY. CHÚNG TÔI RẤT MONG	
31	NHẬN ĐƯỢC SỰ ĐÓNG GÓP, NHẬN XÉT CỦA BẠN ĐỌC VỀ NỘI DUNG ĐỀ TÀI.....	26
32	TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	27

1

2

3

LỜI NÓI ĐẦU

Như chúng ta đã biết, bất đẳng thức đại số đóng vai trò rất to lớn trong toán học. Tuy nhiên, để vận dụng chúng trong quá trình giải quyết một số vấn đề của toán học thì việc chứng minh tính đúng đắn của chúng là vô cùng quan trọng.

Hiện nay, có rất nhiều phương pháp để chứng minh bất đẳng thức đại số như dùng các bất đẳng thức quen thuộc như bất đẳng thức Cauchy, Bunhiacopski,..., hay vận dụng định lý về dấu tam thức bậc hai, khảo sát hàm số,...

Trong đề tài này, chúng tôi xin trình bày một cách nhìn khác về bất đẳng thức đại số, đó là cách nhìn dưới góc độ lượng giác. Phương pháp này được gọi là phương pháp lượng giác hóa. Với phương pháp này, chúng ta có thể chứng minh một số bất đẳng thức một cách hiệu quả hơn bằng cách thay đổi hình thức của bài toán chứng minh bất đẳng thức đại số trở thành bài toán chứng minh bất đẳng thức lượng giác.

Đề tài được chia làm 3 chương:

- Chương I: Một số tính chất cơ bản của hàm lượng giác
- Chương II: Mối tương quan giữa các biểu thức đại số và biểu thức lượng giác
- Chương III: Chứng minh bất đẳng thức đại số bằng phương pháp lượng giác

Và một số bài tập tự luyện.

Việc sai sót và hạn chế trong quá trình thực hiện đề tài là điều không thể tránh khỏi. Vì vậy, chúng tôi rất mong nhận được sự phản hồi và góp ý chân thành của độc giả. Xin chân thành cảm ơn.

Qui Nhơn, ngày 6 tháng 11 năm 2009

Nhóm thực hiện đề tài

CHƯƠNG I MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA HÀM LƯỢNG GIÁC

I. Một số công thức lượng giác cơ bản

$$1. \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$2. \tan x \cdot \cot x = 1, \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3. 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{k\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$4. 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$5. \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$6. \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \text{với } t = \tan \frac{x}{2}$$

II. Tính chất

1. Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$|\sin x| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$|\cos x| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Nếu $x \in [-1; 1]$ thì tồn tại $a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $x = \sin a$ và tồn tại $b \in [0; \pi]$ sao cho

$$x = \cos b.$$

3. Nếu $x \in [0;1]$ thì tồn tại $a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $x = \sin a$ và tồn tại $b \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho

$$x = \cos b.$$

4. Với mỗi số thực x , có một số $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $x = \tan a$.

5. Với mọi x, y thỏa $x^2 + y^2 = 1$ thì tồn tại $a \in [0; 2\pi]$ sao cho $x = \cos a$ và $y = \sin a$

CHƯƠNG II MỐI TƯƠNG QUAN GIỮA CÁC BIỂU THỨC ĐẠI SỐ VÀ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

Việc lượng giác hóa được tiến hành thông qua các dấu hiệu đặc biệt của các biến tham gia trong biểu thức, mà việc nắm bắt các dấu hiệu đó thông qua miền giá trị và các công thức lượng giác thông dụng. Sau đây chúng tôi xin đưa ra một số biểu thức đại số và biểu thức lượng giác tương ứng.

Biểu thức đại số	Biểu thức lượng giác tương ứng	Công thức lượng giác
$x^2 + y^2$	$\sin^2 t + \cos^2 t$	$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$
$x^2 - y^2$	$\cos^2 t - \sin^2 t$	$\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$
$2x^2 - 1$	$2\cos^2 t - 1$	$2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$
$1 - 2x^2$	$1 - 2\sin^2 t$	$1 - 2\sin^2 t = \cos 2t$
$4x^3 - 3x$	$4\cos^3 t - 3\cos t$	$4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t$
$3x - 4x^3$	$3\sin t - 4\sin^3 t$	$3\sin t - 4\sin^3 t = \sin 3t$
$1 + x^2$	$1 + \tan^2 t$	$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$
$x^2 - 1$	$\frac{1}{\cos^2 t} - 1$	$\frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \tan^2 t$
$\frac{2x}{1 - x^2}$	$\frac{2\tan t}{1 - \tan^2 t}$	$\frac{2\tan t}{1 - \tan^2 t} = \tan 2t$

$\frac{1-x^2}{1+x^2}$	$\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}$	$\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t} = \cos 2t$
$\frac{2x}{1+x^2}$	$\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}$	$\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} = \sin 2t$
$\frac{x+y}{1-xy}$	$\frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \cdot \tan v}$	$\frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \cdot \tan v} = \tan (u + v)$
$\frac{x-y}{1+xy}$	$\frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$	$\frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v} = \tan (u - v)$

CHƯƠNG III CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC

Dựa vào mối tương quan giữa bất đẳng thức đại số và bất đẳng thức lượng giác, chúng tôi xin trình bày một số hướng lượng giác hóa trong chứng minh bất đẳng thức đại số nhằm giúp độc giả có thể định hướng được phương pháp chứng minh bất đẳng thức đại số hiệu quả hơn.

I. Dạng 1: Sử dụng hệ thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

1. Phương pháp

a. Nếu bài toán có $x^2 + y^2 = 1$ thì ta đặt $x = \sin u$ và $y = \cos u$, với $u \in [0; 2\pi]$

b. Nếu bài toán có $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) thì ta đặt $x = r \sin u$ và $y = r \cos u$, với $u \in [0; 2\pi]$

c. Nếu hai biến tham gia có ràng buộc $a^2 x^2 + b^2 y^2 = c^2$, $a, b, c > 0$, ta đặt

$$x = \frac{c}{a} \sin u \text{ và } y = \frac{c}{b} \cos u, u \in [0; 2\pi]$$

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1 (Đề thi đại học năm 1972 – Khối A)

Cho 4 số thực u, v, x, y sao cho $u^2 + v^2 = x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$-\sqrt{2} \leq u(y-x) + v(x+y) \leq \sqrt{2}$$

Nhìn vào giả thiết “4 số thực u, v, x, y ” rồi lại “ $u^2 + v^2 = x^2 + y^2 = 1$ ”, chúng ta liên tưởng rất nhanh đến bất đẳng thức lượng giác “lợi hại”: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. Và nảy ra ý định chuyển bài toán này qua lượng giác.

Cách 1: Đặt $u = \cos \alpha, v = \sin \alpha$ với $\alpha \in [0; 2\pi]$

$$x = \cos \beta, y = \sin \beta \text{ với } \beta \in [0; 2\pi]$$

$$\text{Khi đó } P = u(y-x) + v(x+y) = \cos \alpha (\sin \beta - \cos \beta) + \sin \alpha (\cos \beta + \sin \beta)$$

$$= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) - (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= \sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \text{ nên } -\sqrt{2} \leq P \leq \sqrt{2}$$

Vẫn với ý nghĩ đưa về lượng giác nhưng ta tiến thêm một bước. Nhìn trong P ta thấy u và v đứng riêng lẻ, ta đặt chúng dưới dạng lượng giác một cách riêng lẻ, còn x và y đứng với nhau, có sự “gắn bó” hơn bởi các dấu $+$ và $-$. Ta nảy ra ý nghĩ: cứ để sự “gắn bó” ấy mà chuyển qua lượng giác.

$$\text{Nếu ta đặt } \frac{y-x}{\sqrt{2}} = \sin \alpha \text{ và } \frac{y+x}{\sqrt{2}} = \cos \alpha \text{ ta có ngay } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Cách 2: Đặt $u = \cos \beta, v = \sin \beta$ với $\beta \in [0; 2\pi]$

$$\frac{y-x}{\sqrt{2}} = \sin \alpha, \frac{y+x}{\sqrt{2}} = \cos \alpha \text{ với } \alpha \in [0; 2\pi]$$

$$\text{Ta cần chứng minh } -\sqrt{2} \leq u(y-x) + v(x+y) \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Hay } -1 \leq \frac{u(y-x)}{\sqrt{2}} + \frac{v(y+x)}{\sqrt{2}} \leq 1$$

Chuyển qua lượng giác ta phải chứng minh

$$-1 \leq \cos\beta \sin\alpha + \sin\beta \cos\alpha \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \sin(\alpha + \beta) \leq 1 \text{ (hiển nhiên)}$$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

Ví dụ 2 [2] Cho $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 4 = 0$. Chứng minh rằng

$$A = |a^2 - b^2 + 2\sqrt{3}ab - 2(1 + 2\sqrt{3})a + (4 - 2\sqrt{3})b + 4\sqrt{3} - 3| \leq 2$$

Nhận xét: Nhiều bài toán ta chưa thấy ngay yếu tố để chuyển về dạng lượng giác, cần qua một quá trình biến đổi và đặt ẩn phụ thích hợp mới có thể chuyển về dạng lượng giác thuận lợi cho quá trình giải.

$$\text{Ta có } a^2 + b^2 - 2a - 4b + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 2)^2 = 1$$

Đặt $a - 1 = \sin t$ và $b - 2 = \cos t$, với $t \in [0; 2\pi]$

$$\text{Khi đó } A = |\sin^2 t - \cos^2 t + 2\sqrt{3}\sin t \cos t| = |\sqrt{3}\sin 2t - \cos 2t|$$

$$= 2 \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2t - \frac{1}{2} \cos 2t \right| = 2 \left| \sin \left(2t - \frac{\pi}{6} \right) \right| \leq 2$$

Ví dụ 3 [8] Cho a, b thỏa mãn $|5a + 12b + 7| = 13$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + 2(b - a) \geq -1$

Nhận xét: Khác với các ví dụ trên, để giải quyết ví dụ này ta cần biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh về dạng lượng giác quen thuộc.

$$a^2 + b^2 + 2(b - a) \geq -1 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b + 1)^2 \geq 1$$

Từ đó hình thành nên cách đặt

$$\begin{cases} a - 1 = R \sin t \\ b + 1 = R \cos t \end{cases} \text{ với } R \geq 0$$

1 Ta có $|5a + 12b + 7| = 13$

2 $\Leftrightarrow |5(R\sin t + 1) + 12(R\cos t - 1) + 7| = 13$

3 $\Leftrightarrow |5R\sin t + 12R\cos t| = 13$

4 $\Leftrightarrow 1 = R \left| \frac{5}{13} \sin t + \frac{12}{13} \cos t \right| = R \left| \sin \left(t + \arccos \frac{5}{13} \right) \right| \leq R$

5 Suy ra $(a - 1)^2 + (b + 1)^2 = R^2 \geq 1$

6 $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2(b - a) \geq -1$

7 **Ví dụ 4[3]** Cho $x, y > 0$ và $x + y = 1$. Chứng minh

8
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \left(y^2 + \frac{1}{y^2} \right) \geq \frac{17}{2} \quad (1)$$

9 Nhận xét: $x + y = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 = 1$

10 Từ đó ta nảy ra cách đặt $\sqrt{x} = \cos t$ và $\sqrt{y} = \sin t$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

11 Khi đó, (1) trở thành:

12
$$\left(\cos^4 t + \frac{1}{\cos^4 t} \right) + \left(\sin^4 t + \frac{1}{\sin^4 t} \right) \geq \frac{17}{2}$$

13 Ta có:
$$\left(\cos^4 t + \frac{1}{\cos^4 t} \right) + \left(\sin^4 t + \frac{1}{\sin^4 t} \right) = \left(\cos^4 t + \sin^4 t \right) \left(1 + \frac{1}{\sin^4 t \cos^4 t} \right)$$

14
$$= (1 - 2\sin^2 t \cos^2 t) \left(1 + \frac{1}{\sin^4 t \cos^4 t} \right) = \left(1 - \frac{\sin^2 2t}{2} \right) \left(1 + \frac{16}{\sin^4 2t} \right)$$

15 Vì $0 \leq \sin^2 2t \leq 1$ nên $1 - \frac{\sin^2 2t}{2} \geq \frac{1}{2}$ và $1 + \frac{16}{\sin^4 2t} \geq 17$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\sin^2 2t}{2}\right) \left(1 + \frac{16}{\sin^4 2t}\right) \geq \frac{17}{2} \text{ (đpcm)}$$

II. Dạng 2: Sử dụng đánh giá $|\sin t| \leq 1, |\cos t| \leq 1$.

1. Phương pháp:

a) Nếu biến x tham gia có điều kiện $|x| \leq 1$ thì đặt $x = \sin t, \text{ khi } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

hoặc $x = \cos t, \text{ khi } t \in [0; \pi]$

b) Nếu biến x tham gia có điều kiện $|x| \leq m \text{ (} m \geq 0 \text{)}$ thì đặt $x = m \sin t, \text{ khi } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

hoặc $x = m \cos t, \text{ khi } t \in [0; \pi]$

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1 [1] Chứng minh rằng $(1+x)^p + (1-x)^p \leq 2^p, \forall |x| \leq 1, \forall p \geq 1$

Chứng minh

Vì $|x| \leq 1$ nên đặt $x = \cos t, \text{ với } t \in [0; \pi]$. Khi đó

$$(1+x)^p + (1-x)^p =$$

$$(1+\cos t)^p + (1-\cos t)^p = \left(2\cos^2 \frac{t}{2}\right)^p + \left(2\sin^2 \frac{t}{2}\right)^p =$$

$$2^p \left(\cos^{2p} \frac{t}{2} + \sin^{2p} \frac{t}{2}\right) \leq 2^p \left(\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}\right) = 2^p$$

.

Ví dụ 2 [7] Chứng minh rằng $A = |4a^3 - 24a^2 + 45a - 26| \leq 1, \forall a \in [1, 3]$

Chứng minh

Vì $a \in [1, 3]$ nên $|a - 2| \leq 1$

1 Từ đó, đặt $a - 2 = \cos t$

2 Ta có $A = |4(2 + \cos t)^3 - 24(2 + \cos t)^2 + 45(2 + \cos t) - 26|$

3
$$= |4\cos^3 t - 3\cos t| = |\cos 3t| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$$

4 **Ví dụ 3 [2]** Cho $\begin{cases} a > c > 0 \\ b > c > 0 \end{cases}$. Chứng minh $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$ (1)

5 Chứng minh

6
$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}} \leq 1$$

7
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{c}{b} \left(1 - \frac{c}{a}\right)} + \sqrt{\frac{c}{a} \left(1 - \frac{c}{b}\right)} \leq 1 \quad (2)$$

8 Theo giả thiết, ta có $\sqrt{\frac{c}{a}} < 1, \sqrt{\frac{c}{b}} < 1$. Đặt $\sqrt{\frac{c}{a}} = \sin u, \sqrt{\frac{c}{b}} = \sin v$, với $0 \leq u, v \leq \frac{\pi}{2}$

9 (2) trở thành $\sin v \sqrt{1 - \sin^2 u} + \sin u \sqrt{1 - \sin^2 v} \leq 1$

10
$$\Leftrightarrow \sin v \cdot \cos u + \sin u \cdot \cos v \leq 1$$

11
$$\Leftrightarrow \sin(u+v) \leq 1 \text{ (hiển nhiên)}$$

12 **Ví dụ 4 [4]** Cho 4 số thực a, b, c, d thỏa mãn $a = c\sqrt{1-d^2}, b = d\sqrt{1-c^2}$

13 Chứng minh rằng $|a| + |b| \leq 1$

14 Chứng minh

15 Điều kiện để a, b xác định là $-1 \leq d \leq 1, -1 \leq c \leq 1$

16
$$\Rightarrow |d| \leq 1, |c| \leq 1$$

1 Đặt $|c| = \cos u$ và $|d| = \cos v$, với $0 \leq u, v \leq \frac{\pi}{2}$

2 Khi đó, ta có $|a| = \cos u \cdot \sin v$ và $|b| = \cos v \cdot \sin u$

3 $\Rightarrow |a| + |b| = \sin(u + v) \leq 1$ (hiển nhiên)

4 **III. Dạng 3: Sử dụng công thức** $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

5 **1. Phương pháp:**

6 a) Nếu $x \in \mathbb{R}$ và biểu thức cần chứng minh có chứa $(1 + x^2)$ thì đặt $x = \tan t$,

7 với $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

8 b) Nếu $x \in \mathbb{R}$ và biểu thức cần chứng minh có chứa $(m^2 + x^2)$ thì đặt $x = m \tan t$,

9 với $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

10 c) Nếu $|x| \geq 1$ hoặc bài toán có chứa biểu thức $\sqrt{x^2 - 1}$ thì đặt $x = \frac{1}{\cos t}$

11 với $t \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

12 d) Nếu $|x| \geq m$ hoặc bài toán có chứa biểu thức $\sqrt{x^2 - m^2}$ thì đặt $x = \frac{m}{\cos t}$

13 với $t \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

14 **2. Ví dụ minh họa**

1 **Ví dụ 1 [8]** Chứng minh rằng $A = \left| \frac{\sqrt{a^2-1} + \sqrt{3}}{a} \right| \leq 2, \forall |a| \geq 1$

2 Chứng minh: Đặt $a = \frac{1}{\cos t}$ với $t \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

3 Ta có $A = \left| \left(\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} - 1 + \sqrt{3} \right) \cos t \right| = |\sin t + \sqrt{3} \cos t|$

4 $= 2 \left| \frac{1}{2} \sin t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \right| = 2 \left| \sin \left(t + \frac{\pi}{3} \right) \right| \leq 2$

5 **Ví dụ 2 [2]** Chứng minh rằng

6 $\frac{|a-b|}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}} \geq \frac{|c-a|}{\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)}}, \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (1)$

7 Chứng minh:

8 Đặt $a = \tan u, b = \tan v, c = \tan w$, với $-\frac{\pi}{2} < u, v, w < \frac{\pi}{2}$

9 Ta có $\frac{|a-b|}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} = \frac{|\tan u - \tan v|}{\sqrt{(1+\tan^2 u)(1+\tan^2 v)}} = |\cos u \cdot \cos v| \left| \frac{\sin u}{\cos u} - \frac{\sin v}{\cos v} \right|$

10 $= |\sin u \cos v - \sin v \cos u| = |\sin(u - v)|$

11 (1) trở thành:

12 $|\sin(u - v)| \leq |\sin(u - w)| + |\sin(w - v)|, \forall u, v, w \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

13 Ta có $|\sin(\alpha + \beta)| = |\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta| \leq |\sin \alpha| |\cos \beta| + |\cos \alpha| |\sin \beta|$

14 $\leq |\sin \alpha| + |\sin \beta|$

1 Do đó, $|\sin(u - v)| = |\sin[(u - w) + (w - v)]|$

2
$$\leq |\sin(u - w)| + |\sin(w - v)|, \forall u, v, w \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ (đpcm)}$$

3 **Ví dụ 3 [8]** Chứng minh rằng $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a + c)(b + d)}$ (1), $\forall a, b, c, d > 0$

4 Chứng minh

5
$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+d)}} + \sqrt{\frac{cd}{(a+c)(b+d)}} \leq 1$$

6
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{d}{b}\right)}} + \frac{\sqrt{\frac{cd}{ab}}}{\sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{d}{b}\right)}} \leq 1 \quad (2)$$

7 Đặt $\frac{c}{a} = \tan^2 u, \frac{d}{b} = \tan^2 v, \text{ với } u, v \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

8 (2) trở thành $\cos u \cdot \cos v + \tan u \cdot \tan v \cdot \cos u \cdot \cos v \leq 1$

9
$$\Leftrightarrow \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v \leq 1$$

10
$$\Leftrightarrow \cos(u - v) \leq 1 \text{ (hiển nhiên)}$$

11 Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $u = v \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

12 **Ví dụ 4 [3]** Cho các số thực x, y không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

13
$$-2\sqrt{2} - 2 \leq \frac{x^2 - (x - 4y)^2}{x^2 + 4y^2} \leq 2\sqrt{2} - 2 \quad (1)$$

14 Chứng minh

15 + Nếu $y = 0$ thì (1) đúng.

$$1 \quad + \text{ Nếu } y \neq 0 \text{ thì (1) } \Leftrightarrow -2\sqrt{2} - 2 \leq \frac{\left(\frac{x}{2y}\right)^2 - \left(\frac{x}{2y} - 2\right)^2}{\left(\frac{x}{2y}\right)^2 + 1} \leq 2\sqrt{2} - 2 \quad (2)$$

$$2 \quad \text{Đặt } \frac{x}{2y} = \tan a$$

$$3 \quad (2) \text{ trở thành } -2\sqrt{2} - 2 \leq \frac{\tan^2 a - (\tan a - 2)^2}{1 + \tan^2 a} \leq 2\sqrt{2} - 2$$

$$4 \quad \Leftrightarrow -\sqrt{2} - 1 \leq 2(\tan a - 1)\cos^2 a \leq \sqrt{2} - 1$$

$$5 \quad \Leftrightarrow 1 \leq \sin\left(2a - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \text{ (hiển nhiên)}$$

$$6 \quad \text{Ví dụ 5[9] Cho } a, b, c > 0 \text{ thỏa mãn } \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} = 6$$

$$7 \quad \text{Chứng minh rằng } \frac{a}{a+36bc} \cdot \frac{b}{b+9ca} \sqrt{\frac{c}{c+4ab}} \leq \frac{1}{27}$$

8 Chứng minh

$$9 \quad \text{Ta có } \frac{a}{a+36bc} \cdot \frac{b}{b+9ca} \cdot \sqrt{\frac{c}{c+4ab}} = \frac{1}{1+\frac{36bc}{a}} \cdot \frac{1}{1+\frac{9ca}{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4ab}{c}}}$$

$$10 \quad \text{Đặt } \frac{36bc}{a} = \cot^2 \frac{A}{2}; \quad \frac{9ca}{b} = \cot^2 \frac{B}{2}; \quad 0 < A, B < \pi$$

$$11 \quad \text{Từ giả thiết, ta có } 6\sqrt{\frac{bc}{a}} \cdot 3\sqrt{\frac{ca}{b}} \cdot 2\sqrt{\frac{ab}{c}} = 6\sqrt{\frac{bc}{a}} + 3\sqrt{\frac{ca}{b}} + 2\sqrt{\frac{ab}{c}}$$

$$1 \Rightarrow 2\sqrt{\frac{ab}{c}} = \frac{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} - 1} = \tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2} \text{ với } A, B, C \text{ là 3 góc của một tam giác}$$

$$2 \text{ Vậy } \frac{a}{a+36bc} \cdot \frac{b}{b+9ca} \cdot \sqrt{\frac{c}{c+4ab}} = \frac{1}{1+\cot^2\frac{A}{2}} \cdot \frac{1}{1+\cot^2\frac{B}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\cot^2\frac{C}{2}}} = \sin^2\frac{A}{2} \cdot \sin^2\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

$$3 = \frac{1}{4}(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2})^2 \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{4}(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2})^2 \sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{4}(1 - \sin\frac{C}{2})^2 \sin\frac{C}{2}$$

$$4 = \frac{1}{8}\left(1 - \sin\frac{C}{2}\right)\left(1 - \sin\frac{C}{2}\right)2\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{(1 - \sin\frac{C}{2}) + (1 - \sin\frac{C}{2}) + (2\sin\frac{C}{2})}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$5 \text{ **IV. Dạng 4: Sử dụng công thức } \sin 2t = \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}; \cos 2t = \frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t};**$$

$$6 \quad \tan 2t = \frac{2\tan t}{1 - \tan^2 t}$$

7 **1. Phương pháp:**

$$8 \text{ Nếu bài toán có chứa biểu thức dạng } \frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ thì đặt } x = \tan t, \text{ với } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$9 \text{ Nếu bài toán có chứa biểu thức dạng } \frac{2x}{1-x^2} \text{ thì đặt } x = \tan t, \text{ với } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right\}$$

10 **2. Ví dụ minh họa**

11 **Ví dụ 1 [4]** Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ta có

$$12 \quad -(1+a^2)^n \leq (2a)^n + (1-a^2)^n \leq 1 \quad (1)$$

1 Nhận xét (1) $\Leftrightarrow -1 \leq \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^n + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n \leq 1$ (2)

2 Các phân thức $\frac{2a}{1+a^2}, \frac{1-a^2}{1+a^2}$ làm ta nhớ đến công thức nhân đôi biểu diễn của $\sin x$ và $\cos x$
3 theo $\tan^2 \frac{x}{2}$.

4 Đặt $a = \tan^2 \frac{x}{2}$ với $-\pi < x < \pi$

5 $\Rightarrow \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^n + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n = \sin^n x + \cos^n x$

6 Với $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ta có $-\sin^2 x \leq \sin^n x \leq \sin^2 x$

7 $-\cos^2 x \leq \cos^n x \leq \cos^2 x$

8 Suy ra đpcm.

9 **Ví dụ 2 [4]** Cho $0 < x, y, z < 1$ và $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng

10
$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (*)$$

11 Nhận xét: Các biểu thức $\frac{x}{1-x^2}; \frac{y}{1-y^2}; \frac{z}{1-z^2}$ làm ta liên tưởng đến công thức nhân đôi của
12 hàm $\tan 2u, \tan 2v, \tan 2w$.

13 Đặt $x = \tan u; y = \tan v; z = \tan w$; với $0 < u, v, w < \frac{\pi}{4}$ (vì $0 < x, y, z < 1$)

14 Ta có $xy + yz + zx = 1 \Rightarrow \tan u \cdot \tan v + \tan v \cdot \tan w + \tan w \cdot \tan u = 1$

15
$$\Rightarrow u + v + w = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2u + 2v = \pi - 2w$$

$$\Rightarrow \tan 2u + \tan 2v + \tan 2w = \tan 2u \cdot \tan 2v \cdot \tan 2w$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2}$$

$$\text{Đặt } S = \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2}$$

$$P = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2}$$

Ta có $S = P$

Theo Cauchy, ta có $S \geq 3\sqrt[3]{P} \Rightarrow P \geq 3\sqrt[3]{P} \Rightarrow P \geq 3\sqrt{3} \Rightarrow S \geq 3\sqrt{3}$ (đpcm)

V. Dạng 5: Đổi biến số đối với bất đẳng thức tam giác

1. Phương pháp

$$\text{a) Nếu } \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \end{cases} \text{ thì tồn tại } \Delta_{ABC} \text{ với } \begin{cases} A, B, C \in (0; \frac{\pi}{2}) \\ x = \cos A, y = \cos B, z = \cos C \end{cases}$$

$$\text{b) Nếu } \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = xyz \end{cases} \text{ thì tồn tại } \Delta_{ABC} \text{ với } \begin{cases} A, B, C \in (0; \frac{\pi}{2}) \\ x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C \end{cases}$$

$$\text{c) Nếu } \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases} \text{ thì tồn tại } \Delta_{ABC} \text{ với}$$

$$\begin{cases} A, B, C \in (0; \frac{\pi}{2}) \\ x = \cot A, y = \cot B, z = \cot C \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A, B, C \in (0; \pi) \\ x = \tan \frac{A}{2}, y = \tan \frac{B}{2}, z = \tan \frac{C}{2} \end{cases}$$

2. Ví dụ minh họa

1 **Ví dụ 1[6]** Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $S = \frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} \leq \frac{9}{4}$

2 Chứng minh

3 Đặt $\sqrt{\frac{yz}{x}} = \tan \frac{u}{2}$; $\sqrt{\frac{zx}{y}} = \tan \frac{v}{2}$; $\sqrt{\frac{xy}{z}} = \tan \frac{w}{2}$ với $u, v, w \in (0; \frac{\pi}{2})$

4 Do $\sqrt{\frac{yz}{x}} \sqrt{\frac{zx}{y}} + \sqrt{\frac{zx}{y}} \sqrt{\frac{xy}{z}} + \sqrt{\frac{xy}{z}} \sqrt{\frac{yz}{x}} = x+y+z = 1$ nên

$$5 \quad \tan \frac{u}{2} \tan \frac{v}{2} + \tan \frac{v}{2} \tan \frac{w}{2} + \tan \frac{w}{2} \tan \frac{u}{2} = 1$$

$$6 \quad \Leftrightarrow \tan \left(\frac{v}{2} + \frac{w}{2} \right) = \cot \frac{u}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2} \right)$$

$$7 \quad \Leftrightarrow \frac{v}{2} + \frac{w}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2} \quad \Leftrightarrow u + v + w = \pi$$

8 Khi đó $S = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2x}{x+yz} - 1 \right) + \left(\frac{2y}{y+zx} - 1 \right) + \left(\frac{2z}{z+xy} - 1 \right) \right] + \frac{3}{2}$

$$9 \quad = \frac{1}{2} \left(\frac{x-yz}{x+yz} + \frac{y-zx}{y+zx} + \frac{z-xy}{z+xy} \right) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\frac{yz}{x}}{1+\frac{yz}{x}} + \frac{1-\frac{zx}{y}}{1+\frac{zx}{y}} + \frac{1-\frac{xy}{z}}{1+\frac{xy}{z}} \right) + \frac{3}{2}$$

$$10 \quad = \frac{1}{2} (\cos u + \cos v + \cos w) + \frac{3}{2} = \dots$$

$$11 \quad \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\cos u + \cos v)^2 + 1 + \frac{1}{2} (\sin^2 u + \sin^2 v) - \cos u \cos v \right] + \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

12 **Ví dụ 2[9]** Cho $a, b, c > 0$, $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$$

1

2 Nhận xét: + Đẳng thức liên quan : $\frac{A}{\tan^2} \frac{B}{\tan^2} + \frac{B}{\tan^2} \frac{C}{\tan^2} + \frac{C}{\tan^2} \frac{A}{\tan^2} = 1$

3 + Lượng giác hóa

4 Đặt $a = \tan^2 \frac{A}{2}$; $b = \tan^2 \frac{B}{2}$; $c = \tan^2 \frac{C}{2}$ với A, B, C là 3 góc của tam giác nhọn Δ_{ABC}

5 Ta có $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} = \frac{1}{2}(\tan A + \tan B + \tan C) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

6 **Ví dụ 3** Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

7

8 Nhận xét: Với $a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c = abc$ làm ta liên tưởng đến công thức

9 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ trong đó A, B, C là 3 góc của tam giác nhọn ABC.

10 Đặt $a = \tan A$, $b = \tan B$, $c = \tan C$ trong đó A, B, C là 3 góc của tam giác nhọn ABC.

11 Ta có $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}} = \tan A \cdot \cos A = \sin A$

12 Tương tự $\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = \sin B$; $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = \sin C$

13 $(1) \Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (luôn đúng với mọi tam giác ABC)

14

15 **VI. Một số ví dụ đặc sắc**

16 **Ví dụ 1[7]** Gọi m, n, p là 3 nghiệm thực của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx - a = 0$, $a \neq 0$

1 Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{2}}{m} + \frac{\sqrt{3}}{n} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{p} \leq m^2 + n^2 + p^2$

2 Dấu “=” xảy ra khi nào?

3 Chứng minh

4 Theo định lí Viét ta có $mnp = 1$

5 Lấy $\alpha = 45^\circ$, $\beta = -30^\circ$, $\gamma = 165^\circ$ thì $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

6 Và $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\gamma = -\cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

7 Vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

8
$$\sqrt{2}np + \sqrt{3}pm - \sqrt{2+\sqrt{3}}mn \leq m^2 + n^2 + p^2$$

9 Hay $2np\cos\alpha + 2pm\cos\beta + 2mn\cos\gamma \leq m^2 + n^2 + p^2$ (*)

10 Ta có $(p - m\cos\beta - n\cos\alpha)^2 + (m\sin\beta - n\sin\alpha)^2 \geq 0$

11
$$\Leftrightarrow p^2 + m^2\cos^2\beta + \sin^2\beta + n^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \geq 2mncos\beta + 2np\cos\alpha - 2mncos(\alpha + \beta)$$

12
$$\Leftrightarrow p^2 + m^2 + n^2 \geq 2mp\cos\beta + 2np\cos\alpha + 2mncos\gamma \text{ (Vì } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ)$$

13 Bất đẳng thức (*) được chứng minh.

14 Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} m\sin\beta = n\sin\alpha \\ p = m\cos\beta + n\cos\alpha \end{cases}$$

15
$$\Leftrightarrow \frac{m}{\sin\alpha} = \frac{n}{\sin\beta} = \frac{p}{\sin\gamma}$$

16 Đặt $k = \frac{m}{\sin\alpha}$ ta có $k^3 = \frac{mnp}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = -4(\sqrt{3} + 1) \Rightarrow k = -\sqrt[3]{4(\sqrt{3} + 1)}$

1 Suy ra $m = k \sin \alpha = -\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3} + 1}$; $n = k \sin \beta = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} + 3}{2}}$

2 $p = k \sin \gamma = \sqrt{\frac{6(7 - 4\sqrt{3})}{2}}$

3 **Ví dụ 2[5]** Chứng minh bất đẳng thức

4
$$\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) \frac{\pi^2}{6} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \frac{\pi^2}{6}$$

5 **Chứng minh**

6 Với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ta có bất đẳng thức $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$

7 Hay $\cot \alpha < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\sin \alpha}$ (1)

8 Dễ thấy các số $\cot^2 \frac{\pi}{2n+1}; \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1}; \dots; \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1}$ là n nghiệm của đa thức bậc n sau

9
$$x^n - \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} x^{n-1} + \frac{C_{2n+1}^5}{C_{2n+1}^1} x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{C_{2n+1}^{2n-1}}{C_{2n+1}^1} x + \frac{(-1)^n}{C_{2n+1}^1}$$

10 Do đó tổng các nghiệm này là

11
$$\cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \dots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

12 Vậy $\sum_{k=1}^n \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$ (2)

13 Suy ra
$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{2n+1}} + \dots + \frac{1}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}}$$

$$= \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{2n+1}\right) + \left(1 + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1}\right) + \dots + \left(1 + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1}\right)$$

$$= n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

Vậy $\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{2n+1}} + \dots + \frac{1}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}} = \frac{2n(n+1)}{3} \quad (3)$

Từ (1), (2), (3) ta có

$$\frac{n(2n-1)}{3} = \sum_{k=1}^n \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1} < \sum_{k=1}^n \left(\frac{2n+1}{k}\right)^2 < \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

Chia tất cả các số hạng của bất đẳng thức cho $\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2$ ta được

$$\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) \frac{\pi^2}{6} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \frac{\pi^2}{6}$$

Nhận xét: Từ bất đẳng thức trên, cho $n \rightarrow \infty$ ta được

$$\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) \frac{\pi^2}{6} \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \frac{\pi^2}{6} \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

Vậy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

BÀI TẬP THAM KHẢO

Bài 1[2] Cho $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$1 \quad a) \quad |ac + bd| \leq 1$$

$$2 \quad b) \quad -2 \leq (a - b)(c + d) + (a + b)(c - d) \leq 2$$

$$3 \quad \text{Bài 2[2] Cho } x, y \text{ thỏa mãn } 3x + 4y = 7. \text{ Chứng minh rằng } x^2 + y^2 \geq \frac{49}{25}$$

$$4 \quad \text{Bài 3[6] Chứng minh rằng}$$

$$5 \quad \sqrt{1 + \sqrt{1 - a^2}} [\sqrt{(1 + a)^3} - \sqrt{(1 - a)^3}] \leq 2\sqrt{2} + \sqrt{2 - 2a^2}$$

$$6 \quad \text{Bài 4 [2] Chứng minh rằng}$$

$$7 \quad S = \left| 4 \left(\sqrt{(1 - a^2)^3} - a^3 \right) + 3 \left(a - \sqrt{1 - a^2} \right) \right| \leq \sqrt{2}$$

$$8 \quad \text{Bài 5[1] Chứng minh rằng } -4 \leq \frac{5 - 12\sqrt{a^2 - 1}}{a^2} \leq 9, \forall |a| \geq 1$$

$$9 \quad \text{Bài 6[4] Chứng minh rằng } \left| \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{4x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \right| \leq 1$$

$$10 \quad \text{Bài 7[2] Chứng minh rằng } \left| \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \right| \leq \frac{1}{2} \text{ với mọi } a, b \in \mathbb{R}$$

$$11 \quad \text{Bài 8[2] Chứng minh rằng với mọi cặp số thực } x, y \text{ ta đều có}$$

$$12 \quad \left| \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2 y^2)}{[(1 + x^2)(1 + y^2)]^2} \right| \leq \frac{1}{4}$$

$$13 \quad \text{Bài 9 [6] Cho 3 số thực } x, y, z \text{ sao cho } xyz > 0 \text{ và 3 số thực } a, b, c \text{ sao cho}$$

$$14 \quad a + b + c \leq \frac{3}{2}, |a| \leq 1, |b| \leq 1, |c| \leq 1$$

$$15 \quad \text{Chứng tỏ } \frac{1}{x}a + \frac{1}{y}b + \frac{1}{z}c \leq \frac{x}{2yz} + \frac{y}{2zx} + \frac{z}{2xy}$$

1 Dấu “=” xảy ra khi nào?

2 Bài 10[8] Cho $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$, với $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

3 a) $xyz \leq \frac{1}{8}$

b) $xy + yz + zx \leq \frac{3}{4}$

4 Bài 11[8] Cho $x + y + z = xyz$ và $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{9}{2}$$

5

6 Bài 12[8] Cho $xy + yz + zx = 1$ với $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \geq \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}$$

7

8 Bài 13 (Đề thi toán Olympic 30-4, lần thứ 15-2009)

9 Chứng minh với mọi $a, b, c > 0$ ta có

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3$$

10

11 Bài 14[8] Chứng minh rằng với mọi x, y thỏa mãn $|x| \geq 1, |y| \geq 1$, ta có

$$y\sqrt{x^2-1} + 4\sqrt{y^2-1} + 3 \leq xy\sqrt{26}.$$

12

13

KẾT LUẬN

Trong toàn bộ đề tài chúng tôi đã hệ thống lại một số bất đẳng thức đại số có thể dùng phương pháp lượng giác để chứng minh. Chúng tôi đã phân loại chúng theo từng dạng, trình bày cụ thể phương pháp để chứng minh và có những ví dụ minh họa kèm theo mỗi phương pháp. Những ví dụ đó được sắp xếp từ đơn giản đến phức tạp với lời giải khá chi tiết, đa dạng, bao quát mọi khía cạnh lí thuyết và dễ hiểu, có thể giúp bạn đọc nắm bắt nhanh và hiệu quả phương pháp lượng giác trong chứng minh bất đẳng thức đại số. Sau khi đọc đề tài, bạn đọc sẽ có thêm một phương pháp mới để chứng minh một số bài toán bất đẳng thức đại số một cách hiệu quả hơn.

Tuy nhiên vì trong thời gian ngắn và kiến thức chưa sâu rộng nên có những bài toán bất đẳng thức dùng lượng giác hóa để chứng minh nhưng không theo một phương pháp đặt ẩn phụ cụ thể nào mà dựa vào những tính chất đặc biệt của các hàm số lượng giác và những yếu tố trong bài toán để chứng minh không được chúng tôi trình bày cụ thể và chi tiết trong đề tài này. Chúng tôi rất mong nhận được sự đóng góp, nhận xét của bạn đọc về nội dung đề tài.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Lê Hồng Đức(chủ biên), Đào Thiện Khải, Lê Bích Ngọc, Lê Hữu Trí, *Các phương pháp giải –Bằng phương pháp lượng giác hóa*, NXB Hà Nội, 2006.
- [2] Lê Hồng Đức(chủ biên), Đào Thiện Khải, Lê Bích Ngọc, *Phương pháp giải toán Lượng giác hóa, Hàm số lượng giác, Hệ thức lượng*, NXB ĐHS, 2009.
- [3] Vũ Thế Hựu, *Phương pháp lượng giác hóa các bài toán*, NXB GD, 2003.
- [4] Võ Đại Mau, *Tuyển tập 216 bài toán bất đẳng thức*, NXB Trẻ, 1996.
- [5] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức-Định lí và áp dụng*, NXB GD, 2003.
- [6] Nguyễn Vũ Thanh, *263 bài toán bất đẳng thức chọn lọc*, NXB GD, 1997.
- [7] Hội Toán học Việt Nam, *Tuyển tập 30 năm tạp chí toán học và tuổi trẻ*, NXB GD, 1997.
- [8] <http://chihao.info/4rum/showthread.php?p=11269>
- [9] <http://forum.mathscope.org/showthread.php?t=9626>