**ĐỀ HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 BẮC GIANG 2023-2024**

*Thời gian làm bài: 120 phút*

**PHẦN I: TRẮC NGHIỆM** *(6 điểm)*

**Câu 1**: Cho đường tròn tâm O bán kính R có dây cung AB = 6. Biết $\hat{AOB}$ = $120^{0}$ (như hình vẽ).



Diện tích $S$ của phần hình tròn giới hạn bởi cung nhỏ AB và dây cung AB bằng:

1. *S* = 3(3$π- \sqrt{3} $) B.*S* = 2$($3$π-\sqrt{3} )$
2. *S* = 4$π-$ 3$\sqrt{3}$ D.*S* = 3$\left(3π- \sqrt{2}\right)$

**Câu 2:** Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left(7-m\right)x+\sqrt{m+2}$ đồng biến trên R

1. 11 B. 8 C. 9 D. 12

**Câu 3:** Cho hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x+my=3m\\ mx-y=m^{2}-2 \end{array}\right.$ (m là tham số). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m với $-2023<m\leq 2023$ để hệ có nghiệm duy nhất $(x\_{0}; y\_{0})$ thỏa mãn

 $x\_{0}^{2}-2x\_{0}-y\_{0}>0 ? $

1. 2023 B. 4043 C. 2022 D. 4044

**Câu 4:** Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m, biết rằng phương trình $x^{2}-3mx-2m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}, x\_{2}$ thỏa mãn $\frac{x\_{1 }^{2}+3mx\_{2}+6m}{m^{2}}+\frac{m^{2}}{x\_{2}^{2}+3mx\_{1}+6m}=4$

1. $-3$ B. $-\frac{56}{23}$ C. $\frac{2}{17}$ D. $\frac{256}{153}$

**Câu 5:** Khi $x=1+\sqrt[3]{2}$ thì biểu thức $P=x^{4}-5x^{3}+9x^{2}-12x+6$ có giá trị bằng

 $a+\sqrt[3]{b} $với $a,b \in Z.$ Giá trị của biểu thức $2a-b$ là:

1. 48B. 6 C. 36 D. 0

**Câu 6:** Cho hai điểm B, C thuộc đường tròn $(O)$ với $\hat{BOC}=100^{0}.$ Các tiếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$ tại B và C cắt nhau tại A. Số đo góc ABC bằng:

1. $50^{0}$ B.$45^{0}$ C. $40^{0}$ D.$55^{0}$

**Câu 7:** Cho biểu thức $f \left(x\right)=\left(2x^{3}-21x+2022\right)^{2023}.$ Tính giá trị của biểu thức $f(x)$ khi $x= \sqrt[3]{7+\sqrt{\frac{49}{8}} }+ \sqrt[3]{7-\sqrt{\frac{49}{8}}}$

1. $2025^{2023}$ B. $-1$ C. $1$ D. $2050^{2023}$

**Câu 8:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M$\left(x\_{0}; y\_{0}\right)$ là hình chiếu vuông góc của điểm O lên đường thẳng d: $y=mx-m-2$ (với m là tham số). Khi đó độ dài đoạn thẳng OM đạt giá trị lớn nhất, tính $P=x\_{0}+2y\_{0}$

1. $P= -3$ B. $P$ = 1 C. $P$ = 2 D. $P= -2$

**Câu 9:** Biết hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x+my=m+1\\mx+y=3m-1\end{array}\right. $(m là tham số) vô nghiệm. Giá trị của m là

1. $m=\pm 1 $ B. $m=0$ C. $m= -1$ D. $m=1$

**Câu 10:** Cho tam giác ABC vuông tại A, AC = $10\sqrt{3}$ cm. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Khi tam giác AMB là tam giác đều, tính chiều cao của tam giác ABC kẻ từ A.

1. 10cm B. $6\sqrt{3}$cm C. 9cm D. $5\sqrt{3}$cm

**Câu 11:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi A, B là hai điểm thay đổi thuộc hai tia Ox, Oy tương ứng sao cho ba điểm A, B, và M(2; 1) luôn thẳng hàng. Diện tích của tam giác OAB có giá trị nhỏ nhất là

1. 6 B. 4 C. 8 D. 2

**Câu 12:** Biết rằng $A= \frac{59}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\left(a\sqrt{3}+b\sqrt{5}+c\sqrt{7} \right)\left(d\sqrt{15}-1\right)$, với $a, b, c, d$ là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $a+b+c+d$.

1. 2 B. 1 C. 3 D. 0

**Câu 13:** Cho tam giác ABC cân tại A với AB = 9, BC = 12 và M là trung điểm của đoạn BC. Gọi H là chân đường cao của tam giác AMB kẻ từ M; I, K lần lượt là trung điểm của đoạn MH, BH. Đường thẳng AI cắt MK tại E, giá trị của AI.AE bằng:

1. 32 B. 34 C. 33 D. 35

**Câu 14:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi $M(x\_{0}; y\_{0})$ là giao điểm của hai đường thẳng

$y=2x+3$ và $y=-x+1$. Giá trị của biểu thức $x\_{0}+4y\_{0}$ bằng:

1. -2 B. 6 C. -1 D. $\frac{7}{3}$

**Câu 15:** Cho đường tròn tâm O bán kính R = 16cm có dây cung AB = 20cm. Trên dây AB lấy điểm C sao cho AC = 8cm. Gọi D là hình chiếu vuông góc của C lên đường kính AE của đường tròn (O). Tính độ dài đoạn thẳng AD.

1. $\frac{9}{2}cm$ B. $\frac{11}{2}cm$ C. $6cm$ D. 5cm

**Câu 16:** Phương trình $x^{4}-4x+m-1=0$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt lớn không khi và chỉ khi:

1. m > 0 B. 1 < m < 5 C. $1<m\leq 5$ D. m < 5

**Câu 17:** Cho hai đường tròn $(O ;6cm )$ và $(O; 8cm)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B và $\hat{OAO}'=90^{0}$. Đường thẳng d qua A cắt đường tròn tâm O và đường tròn tâm O’ lần lượt tại C và D (C, D đều khác A). Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng CD là

1. 20cm B. 30cm C. 24cm D. 25cm

**Câu 18:** Cho đường tròn tâm O, bán kính R và hai dây cung AB, CD vuông góc với nhau tại I. Biết IC = 4, ID = 12, IB = 6. Tính R

1. R = 8 B. R = $\sqrt{66}$ C. R = $\sqrt{63}$ D. R = $\sqrt{65}$

**Câu 19:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: y = mx và parabol (*P* ) : y = $x^{2}$ (m là tham số). Tính tích tất cả các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{6}$

1. -4 B. 2 C. -2 D. -6

**Câu 20:** Cho các số thực $x, y, z$ thỏa mãn: $\left(3x-7\right)^{2}+ \sqrt{x+11+8\sqrt{x-5}}+\left|z+x-y\right|=4.$ Giá trị của biểu thức $P= \left|x+y+z\right|$ bằng

1. P = 30 B. P = 31 C. P = 15 D. P = 20

**II. TỰ LUẬN** *(14,0 điểm)*

**Câu I.** *(6 điểm)*

1. a) Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}-\frac{2x-\sqrt{x}+1}{4x-1}\right).\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x}{2}+2\right) $với $x>0;x\ne \frac{1}{4}$

 b) Cho hai số thực $x, y$ thỏa mãn $\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)=2$.

Tính $Q=x\sqrt{y^{2}+1}+ y\sqrt{x^{2}+1}$

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^{2}-2x-m+2=0$ có 2 nghiệm $x\_{1}, x\_{2}$ thỏa mãn $x\_{1}^{2}=x\_{2}$.
2. Giải phương trình: $4\left(x-2\right)\sqrt{x+\sqrt{x^{2}-1}}=9\left(x^{2}-3x+2\right)\sqrt{2x-2}$

**Câu II.** *(3 điểm)*

1. Cho hai đa thức $A\left(x\right)=8x^{3}-4x^{2}+3x+1$ và $B\left(x\right)=2x^{2}-4x^{2}+5x+4$. Biết $A\left(m\right)=2$ và $B\left(n\right)=5$ với m, n là hai số thực. Chứng minh rằng $2m+n=1$.
2. Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $\frac{x^{2}+2x-1}{xy+y+2} $là số nguyên. Chứng minh rằng x,y là số chính phương.

**Câu III**. *(4 điểm)*

Cho hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) (với R > R’) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Đường thẳng d thay đổi qua A cắt hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) lần lượt tại các điểm M, N (M, N khác A) và A thuộc đoạn MN. Các tiếp tuyến với đường tròn (O; R) tại M và đường tròn (O; R’) tại N cắt nhau tại K.

**1.** Chứng minh tứ giác MBNK là tứ giác nội tiếp.

**2.** Gọi P, Q, H tương ứng là hình chiếu vuông góc của điểm B lên các đường thẳng KM, KN và MN. Chứng minh rằng ba điểm P, H, Q thẳng hàng và đường thẳng PQ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

**3.** Chứng minh rằng PH = QH khi các đường phân giác trong của góc MKN và MBN cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng MN

**Câu IV***. (1 điểm)* Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a^{2}+b^{2}+c^{2}=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^{2}+c^{2}}+\frac{b}{c^{2}+a^{2}}+\frac{c}{a^{2}+b^{2}}\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

**ĐÁP ÁN**

1. **PHẦN TRẮC NGHIỆM**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **CÂU**  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **ĐÁP ÁN** | C | C | B | B | A | A | D | A | C | D |
| **CÂU** | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| **ĐÁP ÁN** | B | C | D | B | D | B | A | D | C | A |

1. **PHẦN TỰ LUẬN**

**1.a)** Với $x>0$ và $x\ne \frac{1}{4}$, ta có:

$$P= \left[\frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}-\frac{2x-\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}\right].\left[\left(x\sqrt{x}+\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right)\right]$$

$$= \left[\frac{2x+\sqrt{x})}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}-\frac{2x-\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}\right].\left[\left(\frac{x}{2}.\left(2\sqrt{x}+1\right)\right)+\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}\right]$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}\right].\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} $$

**1.b)** Từ giả thiết ta được $\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)=2$

$⟺xy+x\sqrt{y^{2}+1}+y\sqrt{x^{2}+1}+\sqrt{x^{2}+1}.\sqrt{y^{2}+1}=2$ (1)

$\sqrt{x^{2}+1}-x>\sqrt{x^{2}}-x=\left|x\right|-x\geq 0, ∀x $và tương tự $\sqrt{y^{2}+1}-y>\sqrt{y^{2}}-y=\left|y\right|-y\geq 0, ∀y$

$$\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)=2⟺\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)\left(\sqrt{y^{2}+1}-y\right)=\frac{1}{2}$$

$⟺y\sqrt{x^{2}+1}+x\sqrt{y^{2}+1}-\sqrt{x^{2}+1}\sqrt{y^{2}+1}-xy=-\frac{1}{2}$ (2)

Cộng theo vế của (1) và (2). Ta được $x\sqrt{y^{2}+1}+y\sqrt{x^{2}+1}=\frac{3}{4}$

**2.**

Ta có $∆^{'}= -1-m.$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$∆^{'}>0 ⇔-1-m>0⟺m<-1$(\*).

Theo định lý Vi-et ta được $\left\{\begin{matrix}x\_{1}+x\_{2}=2\\x\_{1}.x\_{2}=m+2\end{matrix}\right.$ $\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$

Từ giả thiết $x\_{1}^{2}=x\_{2}$ và (1) ta được $x\_{1}^{2}+x\_{1}-2=0⟺\left[\begin{matrix}x\_{1}=-2⇒x\_{2}=4\\x\_{1}=1⇒x\_{2}=1\end{matrix}\right.$

So sánh với điều kiện ta được $x\_{1}=-2;x\_{2}=4$

Thay $x\_{1}=-2;x\_{2}=4$ vào (2) ta được $m= -10$ (thỏa mãn điều kiện(\*))

**3.**

Điều kiện xác định: $\left\{\begin{array}{c}2x-2\geq 0\\x-\sqrt{x^{2}-1}\geq 0 \end{array}⟺x\geq -1. \right. $Với điều kiện trên:

Phương trình tương đương với $\left(x-2\right)\left[4\sqrt{x+\sqrt{x^{2}-1}}-9\left(x-1\right)\sqrt{2x-2}\right]=0$

$$⟺\left[\begin{matrix}x=2\\4\sqrt{x+\sqrt{x^{2}-1}}=9\left(x-1\right)\sqrt{2x-2}\end{matrix}\right.\begin{matrix}\left(1\right)\\\left(2\right)\end{matrix}$$

Phương trình (2)

$$⟺2\sqrt{\left(x-1\right)+2\sqrt{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}+\left(x+1\right)}=9\left(x-1\right)\sqrt{x-1}$$

$$⟺2\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)^{2}}=9(x-1)\sqrt{x-1}$$

$$⟺2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)=9\left(x-1\right)\sqrt{x-1}\left(3\right)$$

$$⟺3\sqrt{x-1}\left[3\left(x-1\right)-2\right]+2\left(2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)=0$$

$$⟺3\sqrt{x-1}\left(3x-5\right)+2\left(\frac{3x-5}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\right)=0$$

$$⟺\left(3x-5\right)\left(3\sqrt{x-1}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\right)=0$$

Do $x\geq 1⇒3\sqrt{x-1}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}>0$ nên phương trình tương đương với $3x-5=0 ⟺x=\frac{5}{3}(tm)$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S= \left\{2;\frac{5}{3}\right\}$

**Câu 2**

1. Ta chứng minh nếu $B\left(a\right)=B\left(b\right)⟹a=b\left(\*\right). Thật vậy$

$$2a^{3}-4a^{2}+5a+4=2b^{3}-4b^{2}+5b+4$$

$$⟺2\left(a^{3}-b^{3}\right)-4\left(a^{2}-b^{2}\right)+5\left(a-b\right)=0$$

$⟺\left(a-b\right)\left[2a^{2}+2ab+2b^{2}-4\left(a+b\right)+5\right]=0$ (1)

Do $2a^{2}+2ab+2b^{2}-4\left(a+b\right)+5=\left(a+b-2\right)^{2}+a^{2}+b^{2}+1>0 ∀a, b$

Nên từ (1) ta được $a-b=0⟹a=b$

Ta được $B\left(1-2m\right)=2\left(1-2m\right)^{3}-4\left(1-2m\right)^{2}+5\left(1-2m\right)+4=-2\left(8m^{3}-4m^{2}+3m+1\right)+9$

$=-2A\left(m\right)+9=-2.2+9=5 $(Do A(m) = 2) (2)

Từ (1) và (2) ta được $B\left(n\right)=B\left(1-2m\right). $Áp dụng tính chất (\*) suy ra $n=1-2m $hay $2m+n=1 \left(đpcm\right)$

**2)**

Do $\frac{x^{2}+2x-1}{xy+y+2} \in Z $nên $x^{2}+2x-1\vdots \left(xy+y+2\right)$ (1)

$⟹\left(x+1\right)^{2}-2\vdots y\left(x+1\right)+2⟹y\left[\left(x+1\right)^{2}-2\right]\vdots y\left(x+1\right)+2$

$$⟹\left(x+1\right)\left[y\left(x+1\right)+2\right]-\left[2\left(x+1\right)+2y\right]\vdots y\left(x+1\right)+2$$

$⟹2\left(x+1\right)+2y\vdots y\left(x+1\right)+2⟹2\left(x+1\right)+2y\geq y\left(x+1\right)+2 $(do x, y nguyên dương)

$⟹\left(x-1\right)\left(y-2\right)\leq 2 $ (2)

+ Với $y=1$ thay vào (1) phải có $x^{2}+2x-1\vdots x+3⇒\left(x+3\right)\left(x-3\right)+2\left(x+3\right)+2\vdots x+2⟹2\vdots x+2$ (không thỏa mãn)

Vì $x\geq 1, y\geq 2$ và $\left(x-1\right)\left(y-2\right)\in N, $kết hợp với (2) suy ra $(x-1)(y-2)\in \left\{0;1;2\right\}$

TH1: $\left(x-1\right)\left(y-2\right)=0 ⟺\left[\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}\right. $thay vào (1) thấy không thỏa mãn.

TH2: $\left[\begin{matrix}\left(x-1\right)\left(y-2\right)=1\\\left(x-1\right)\left(y-2\right)=2 \end{matrix}⇒\right.\left(x;y\right)\in \left\{\left(2;3\right);\left(2;4\right);\left(3;3\right)\right\}.$

Thay lại vào (1) ta thấy chỉ có $\left(x;y\right)=\left(3;3\right) $thỏa mãn suy ra $xy=9$ là số chính phương (đpcm).

**Câu 3**



**1)**

Ta có $\hat{MBA}=\hat{KMA }hay \hat{MBA}=\hat{KMN} \left(1\right) $(tính chất tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và tính chất nội tiếp).

Tương tự $\hat{NBA}=\hat{KNA }hay \hat{NBA}=\hat{KNM}$ (2)

Ta có $\hat{MBN} = \hat{MBA} + \hat{NBA}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $\hat{MBN} = \hat{KMN} +\hat{ KNM}$ (4)

Do $\hat{KMN} + \hat{KNM} +\hat{ MKN} = 180^{0} suy ra \hat{KMN} + \hat{KNM} = 180^{0} - \hat{MKN}$ (5)

Từ (4) và (5) ta được $\hat{MBN} + \hat{MKN} = 180^{0}$ hay tứ giác MBNK nội tiếp.

**2)**

Từ giả thiết ta cũng có tứ giác PBQK nội tiếp nên$\hat{ PBQ} =180^{0}-\hat{PKQ}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\hat{MBN}=\hat{PBQ} suy ra \hat{PBM}=\hat{QBN}$ (7)

Xét trường hợp H thuộc đoạn AN (các trường hợp còn lại tương tự). Dễ thấy tứ giác PMBH nội tiếp vì $\hat{MPB} = \hat{MHB} = 90^{0}$ và QNHB nội tiếp vì $\hat{BHN} + \hat{BQN} = 180^{0}$, do đó $\hat{PHM}$ = $\hat{MBP}$ (8) và $\hat{QHN} = \hat{QBN}$ (9)

Từ (7), (8) và (9) ta suy ra ba điểm $P, H, Q$ thẳng hàng

Trước hết do $\hat{BHA} = 90^{0}$ nên điểm $H$ thuộc đường tròn đường kính $AB$ (10)

Xét tứ giác nội tiếp PMBH, ta có:

$\hat{HBM}=180^{0} – \hat{HPM}=\hat{PMH} + \hat{PHM}$ mà $\hat{PMH}=\hat{ABM} ⇒\hat{HBM}=\hat{PHM} +\hat{ABM}$ (11)

Mặt khác, $\hat{HBM} = \hat{HBA}+\hat{ABM}$ (12)

Từ (11) và (12) $⇒\hat{PHM} = \hat{HBA}$ (13)

Từ (10) và (13) $⇒$ đường thẳng $PQ$ luôn tiếp xúc với đường tròn đường kính $AB$ tại điểm $H.$

**3)**

Gọi D là điểm đối xứng của điểm M qua điểm B

Gọi E là giao điểm của hai đường phân giác trong của $\hat{MBN}$ và $\hat{MKN}$

Khi điểm E thuộc đường thẳng MN thì theo tính chất đường phân giác trong của tam giác ta có

$\frac{MK}{KN} =\frac{MB}{BN}\left(=\frac{ME}{EN}\right)suy ra\frac{MK}{KN}=\frac{DB}{BN}$ (14)

Mặt khác, $\hat{MKN} = \hat{DBN}$ (cùng bù với $\hat{MBN}$) (15)

Từ (14) và (15) $⇒ ΔMKN \~ΔDBN⇒\hat{ MNK} = \hat{DNB},\hat{ NMK} =\hat{ NDB}$ (16)

Do tứ giác $PHBM$ nội tiếp nên $\hat{BPH} = \hat{BMH}$ hay $\hat{BPQ} = \hat{BMN}$ và $\hat{BPH}= \hat{NDB}$ hay $\hat{BPQ} = \hat{NDB}(=\hat{NDB})$

Từ (16) và (17)$⇒ΔPBH\~ ΔMDN\left(g.g\right)⇒\frac{PH}{MN} =\frac{BP}{DM} =\frac{BP}{2.BM}$ (18)

Dễ thấy $ΔMBN \~ΔPBQ (g.g)$ nên $\frac{PQ}{MN} =\frac{BP}{BM}$ (19)

Từ (18)(19) ta được $PH =\frac{1}{2PQ}$ suy ra $HP = HQ$(dpcm)

**Câu 4**

Do $a, b, c $dương $a^{2}+b^{2}+c^{2}=1$ nên $o<a, b, c<1$ và $1-a^{2}, 1-b^{2}, 1-c^{2}$ là các số dương

Áp dụng bất đẳng thức Coossi cho ba số không âm $2a^{2}, 1-a^{2}, 1-a^{2}$ ta được

$$2a^{2}+\left(1-a^{2}\right)+\left(1-a^{2}\right)\geq 3\sqrt[3]{2a^{2}\left(1-a^{2}\right)\left(1-a^{2}\right)}$$

$⟺2a^{2}\left(1-a^{2}\right)\left(1-a^{2}\right)\leq \frac{2^{3}}{27},$ dấu “=” xảy ra $⟺3a^{2}=1⟺a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ta có:

$$\frac{a}{b^{2}+c^{2}}=\frac{a}{1-a^{2}}=\frac{a^{2}}{a(1-a^{2})}=\frac{a^{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}2a^{2}(1-a^{2})(1-a^{2})}}\geq \frac{a^{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}.\frac{2^{3}}{27}}=\frac{3\sqrt{3}a^{2}}{2}(1)$$

Chứng minh tương tự ta được :

$$\frac{b}{c^{2}+a^{2}}=\frac{b}{1-b^{2}}=\frac{b^{2}}{b(1-b^{2})}=\frac{b^{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}2b^{2}(1-b^{2})(1-b^{2})}}\geq \frac{b^{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}.\frac{2^{3}}{27}}=\frac{3\sqrt{3}b^{2}}{2}(2)$$

$$\frac{c}{b^{2}+a^{2}}=\frac{c}{1-c^{2}}=\frac{c^{2}}{c(1-c^{2})}=\frac{c^{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}2c^{2}(1-c^{2})(1-c^{2})}}\geq \frac{c^{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}.\frac{2^{3}}{27}}=\frac{3\sqrt{3}c^{2}}{2}(3)$$

Cộng (1), (2), (3) theo vế ta có:

$$\frac{a}{b^{2}+c^{2}}+\frac{b}{c^{2}+a^{2}}+\frac{c}{b^{2}+a^{2}}\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right)$$

$$\frac{a}{b^{2}+c^{2}}+\frac{b}{c^{2}+a^{2}}+\frac{c}{b^{2}+a^{2}}\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(dpcm\right)$$

Dấu “=” xảy ra $⟺a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$