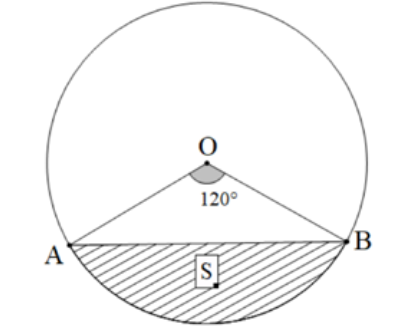
**ĐỀ HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 BẮC GIANG 2023-2024**

*Thời gian làm bài: 120 phút*

**PHẦN I: TRẮC NGHIỆM** *(6 điểm)*

**Câu 1**: Cho đường tròn tâm O bán kính R có dây cung AB = 6. Biết = (như hình vẽ).



Diện tích của phần hình tròn giới hạn bởi cung nhỏ AB và dây cung AB bằng:

1. *S* = 3(3) B.*S* = 23
2. *S* = 4 3 D.*S* = 3

**Câu 2:** Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số đồng biến trên R

1. 11 B. 8 C. 9 D. 12

**Câu 3:** Cho hệ phương trình (m là tham số). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m với để hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn

1. 2023 B. 4043 C. 2022 D. 4044

**Câu 4:** Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m, biết rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

1. B. C. D.

**Câu 5:** Khi thì biểu thức có giá trị bằng

với Giá trị của biểu thức là:

1. 48B. 6 C. 36 D. 0

**Câu 6:** Cho hai điểm B, C thuộc đường tròn với Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại A. Số đo góc ABC bằng:

1. B. C. D.

**Câu 7:** Cho biểu thức Tính giá trị của biểu thức khi

1. B. C. D.

**Câu 8:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M là hình chiếu vuông góc của điểm O lên đường thẳng d: (với m là tham số). Khi đó độ dài đoạn thẳng OM đạt giá trị lớn nhất, tính

1. B. = 1 C. = 2 D.

**Câu 9:** Biết hệ phương trình (m là tham số) vô nghiệm. Giá trị của m là

1. B. C. D.

**Câu 10:** Cho tam giác ABC vuông tại A, AC = cm. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Khi tam giác AMB là tam giác đều, tính chiều cao của tam giác ABC kẻ từ A.

1. 10cm B. cm C. 9cm D. cm

**Câu 11:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi A, B là hai điểm thay đổi thuộc hai tia Ox, Oy tương ứng sao cho ba điểm A, B, và M(2; 1) luôn thẳng hàng. Diện tích của tam giác OAB có giá trị nhỏ nhất là

1. 6 B. 4 C. 8 D. 2

**Câu 12:** Biết rằng , với là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức .

1. 2 B. 1 C. 3 D. 0

**Câu 13:** Cho tam giác ABC cân tại A với AB = 9, BC = 12 và M là trung điểm của đoạn BC. Gọi H là chân đường cao của tam giác AMB kẻ từ M; I, K lần lượt là trung điểm của đoạn MH, BH. Đường thẳng AI cắt MK tại E, giá trị của AI.AE bằng:

1. 32 B. 34 C. 33 D. 35

**Câu 14:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi là giao điểm của hai đường thẳng

và . Giá trị của biểu thức bằng:

1. -2 B. 6 C. -1 D.

**Câu 15:** Cho đường tròn tâm O bán kính R = 16cm có dây cung AB = 20cm. Trên dây AB lấy điểm C sao cho AC = 8cm. Gọi D là hình chiếu vuông góc của C lên đường kính AE của đường tròn (O). Tính độ dài đoạn thẳng AD.

1. B. C. D. 5cm

**Câu 16:** Phương trình (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt lớn không khi và chỉ khi:

1. m > 0 B. 1 < m < 5 C. D. m < 5

**Câu 17:** Cho hai đường tròn và cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B và . Đường thẳng d qua A cắt đường tròn tâm O và đường tròn tâm O’ lần lượt tại C và D (C, D đều khác A). Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng CD là

1. 20cm B. 30cm C. 24cm D. 25cm

**Câu 18:** Cho đường tròn tâm O, bán kính R và hai dây cung AB, CD vuông góc với nhau tại I. Biết IC = 4, ID = 12, IB = 6. Tính R

1. R = 8 B. R = C. R = D. R =

**Câu 19:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: y = mx và parabol (*P* ) : y = (m là tham số). Tính tích tất cả các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó bằng

1. -4 B. 2 C. -2 D. -6

**Câu 20:** Cho các số thực thỏa mãn: Giá trị của biểu thức bằng

1. P = 30 B. P = 31 C. P = 15 D. P = 20

**II. TỰ LUẬN** *(14,0 điểm)*

**Câu I.** *(6 điểm)*

1. a) Rút gọn biểu thức với

b) Cho hai số thực thỏa mãn .

Tính

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn .
2. Giải phương trình:

**Câu II.** *(3 điểm)*

1. Cho hai đa thức và . Biết và với m, n là hai số thực. Chứng minh rằng .
2. Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn là số nguyên. Chứng minh rằng x,y là số chính phương.

**Câu III**. *(4 điểm)*

Cho hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) (với R > R’) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Đường thẳng d thay đổi qua A cắt hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) lần lượt tại các điểm M, N (M, N khác A) và A thuộc đoạn MN. Các tiếp tuyến với đường tròn (O; R) tại M và đường tròn (O; R’) tại N cắt nhau tại K.

**1.** Chứng minh tứ giác MBNK là tứ giác nội tiếp.

**2.** Gọi P, Q, H tương ứng là hình chiếu vuông góc của điểm B lên các đường thẳng KM, KN và MN. Chứng minh rằng ba điểm P, H, Q thẳng hàng và đường thẳng PQ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

**3.** Chứng minh rằng PH = QH khi các đường phân giác trong của góc MKN và MBN cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng MN

**Câu IV***. (1 điểm)* Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn . Chứng minh rằng

**ĐÁP ÁN**

1. **PHẦN TRẮC NGHIỆM**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **CÂU** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **ĐÁP ÁN** | C | C | B | B | A | A | D | A | C | D |
| **CÂU** | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| **ĐÁP ÁN** | B | C | D | B | D | B | A | D | C | A |

1. **PHẦN TỰ LUẬN**

**1.a)** Với và , ta có:

**1.b)** Từ giả thiết ta được

(1)

và tương tự

(2)

Cộng theo vế của (1) và (2). Ta được

**2.**

Ta có Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

(\*).

Theo định lý Vi-et ta được

Từ giả thiết và (1) ta được

So sánh với điều kiện ta được

Thay vào (2) ta được (thỏa mãn điều kiện(\*))

**3.**

Điều kiện xác định: Với điều kiện trên:

Phương trình tương đương với

Phương trình (2)

Do nên phương trình tương đương với

Vậy phương trình có tập nghiệm là

**Câu 2**

1. Ta chứng minh nếu

(1)

Do

Nên từ (1) ta được

Ta được

(Do A(m) = 2) (2)

Từ (1) và (2) ta được Áp dụng tính chất (\*) suy ra hay

**2)**

Do nên (1)

(do x, y nguyên dương)

(2)

+ Với thay vào (1) phải có (không thỏa mãn)

Vì và kết hợp với (2) suy ra

TH1: thay vào (1) thấy không thỏa mãn.

TH2:

Thay lại vào (1) ta thấy chỉ có thỏa mãn suy ra là số chính phương (đpcm).

**Câu 3**

A diagram of a triangle with lines and circles

Description automatically generated

**1)**

Ta có (tính chất tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và tính chất nội tiếp).

Tương tự (2)

Ta có (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được (4)

Do (5)

Từ (4) và (5) ta được hay tứ giác MBNK nội tiếp.

**2)**

Từ giả thiết ta cũng có tứ giác PBQK nội tiếp nên (6)

Từ (5) và (6) suy ra (7)

Xét trường hợp H thuộc đoạn AN (các trường hợp còn lại tương tự). Dễ thấy tứ giác PMBH nội tiếp vì và QNHB nội tiếp vì , do đó = (8) và (9)

Từ (7), (8) và (9) ta suy ra ba điểm thẳng hàng

Trước hết do nên điểm thuộc đường tròn đường kính (10)

Xét tứ giác nội tiếp PMBH, ta có:

mà (11)

Mặt khác, (12)

Từ (11) và (12) (13)

Từ (10) và (13) đường thẳng luôn tiếp xúc với đường tròn đường kính tại điểm

**3)**

Gọi D là điểm đối xứng của điểm M qua điểm B

Gọi E là giao điểm của hai đường phân giác trong của và

Khi điểm E thuộc đường thẳng MN thì theo tính chất đường phân giác trong của tam giác ta có

(14)

Mặt khác, (cùng bù với ) (15)

Từ (14) và (15) (16)

Do tứ giác nội tiếp nên hay và hay

Từ (16) và (17) (18)

Dễ thấy nên (19)

Từ (18)(19) ta được suy ra (dpcm)

**Câu 4**

Do dương nên và là các số dương

Áp dụng bất đẳng thức Coossi cho ba số không âm ta được

dấu “=” xảy ra

Ta có:

Chứng minh tương tự ta được :

Cộng (1), (2), (3) theo vế ta có:

Dấu “=” xảy ra