

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ SÁCH GIÁO KHOA

a) Khái niệm cực trị của hàm số

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

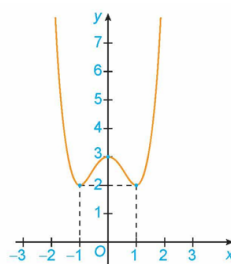
Chú ý

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CD} hay y_{CD} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

- Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

Ví dụ 1. Hình là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hãy tìm các cực trị của hàm số.



Giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $y_{CT} = y(-1) = 2$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = y(0) = 3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = y(1) = 2$.

b) Cách tìm cực trị của hàm số

ĐỊNH LÝ

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Định lý trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

x	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực tiểu)	

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực đại)	

Chú ý. Từ định lý trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
3. Lập bảng biến thiên của hàm số.
4. Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 30$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

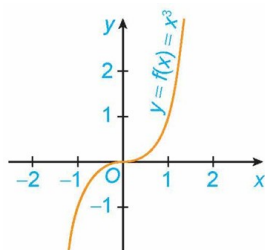
x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y		$-\infty$	34	30	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CD} = y(1) = 34$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ và $y_{CT}=y(3)=30$.

Chú ý. Nếu $f'(x_0)=0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số. Chẳng hạn, hàm số $f(x)=x^3$ có $f'(x)=3x^2, f'(0)=0$, nhưng $x=0$ không phải là điểm cực trị của hàm số.



Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có: $y' = \frac{(2x-2)(x-2) - (x^2-2x+9)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 5$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-4	$-\infty$	$+\infty$	8	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CD} = y(-1) = -4$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$ và $y_{CT} = y(5) = 8$.

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$, với mọi $x \neq 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	1			$+\infty$	
					1

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số không có cực trị.