

BÀI 3

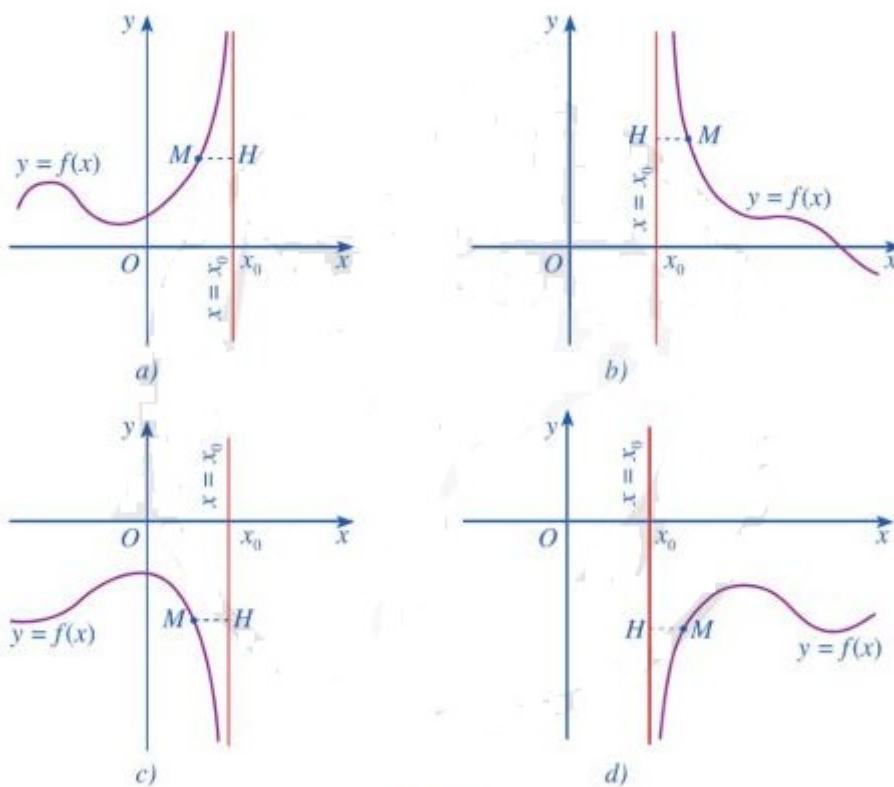
ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

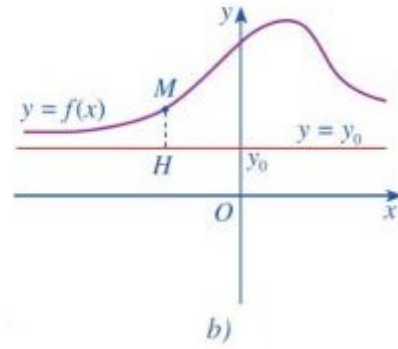
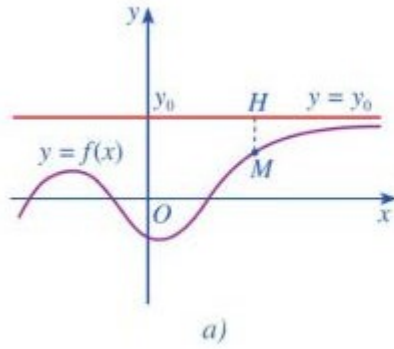
Nhận xét: Giả sử đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm $M(x; y)$ thuộc đồ thị hàm số. Gọi MH là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $x = x_0$. Khi đó, độ dài MH tiến tới 0 khi $x \rightarrow x_0^-$ (hình a, c) hay khi $x \rightarrow x_0^+$ (hình b, d)



2. Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

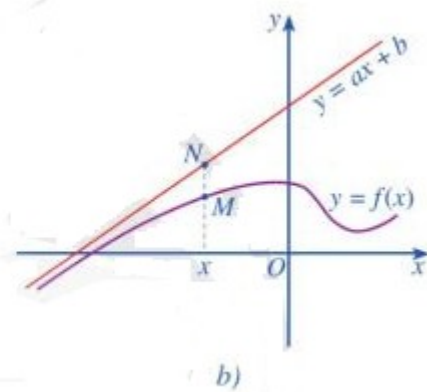
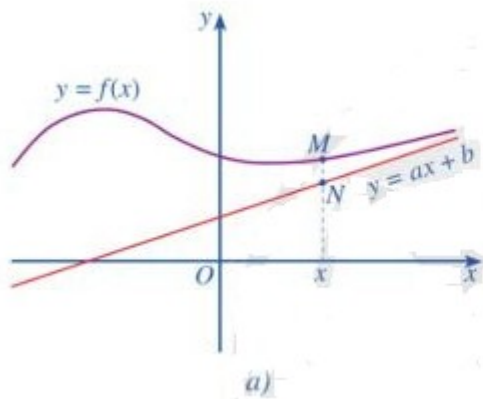
Nhận xét: Giả sử đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm $M(x; y)$ thuộc đồ thị hàm số. Gọi MH là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $y = y_0$. Khi đó, độ dài MH tiến tới 0 khi $x \rightarrow +\infty$ (hình a) hay khi $x \rightarrow -\infty$ (hình b)



3 . Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Nhận xét: Giả sử đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ và điểm N thuộc đường thẳng $y = ax + b$ có cùng hoành độ x . Khi đó, độ dài MN tiến tới 0 khi $x \rightarrow +\infty$ (hình a) hay khi $x \rightarrow -\infty$ (hình b)



CHỦ ĐỀ 1

TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = f(x)$ KHI BIẾT HÀM SỐ, ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$

I. Tiệm cận của đồ thị hàm số

1. Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow$$

một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: **tiệm cận đứng $x = x_0$.**

2. Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất 1

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn: **tiệm cận ngang $y = y_0$.**

3. Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất 1 trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

tiệm cận xiên $y = ax + b$.

II. Quy tắc tìm giới hạn vô cực**1. Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$**

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

2. Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
$L < 0$		+	$-\infty$
		-	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$)

Chú ý: Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$.

III. Kỹ năng dùng Casio

Giả sử cần tính $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ta dùng chức năng CALC để tính giá trị của $f(x)$ tại các giá trị của x rất gần a .

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = a + 10^{-9}$.
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = a - 10^{-9}$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = a + 10^{-9}$ hoặc $x = a - 10^{-9}$.

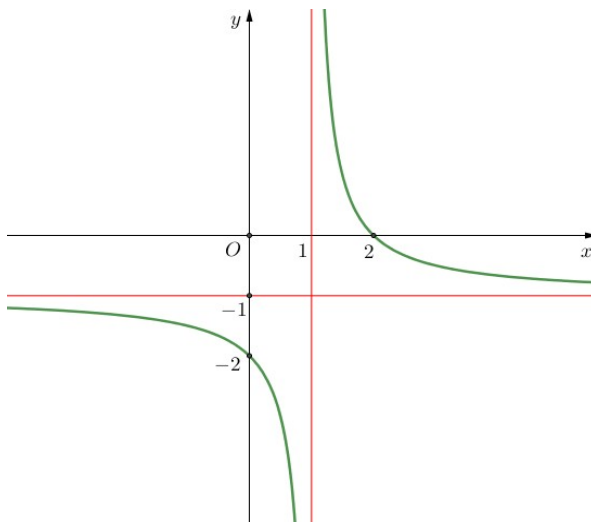
2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = 10^{10}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = -10^{10}$.

DẠNG 1**BIẾT ĐỒ THỊ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng bằng:

A. $x = 1$.

B. $x = -1$.

C. $x = 0$.

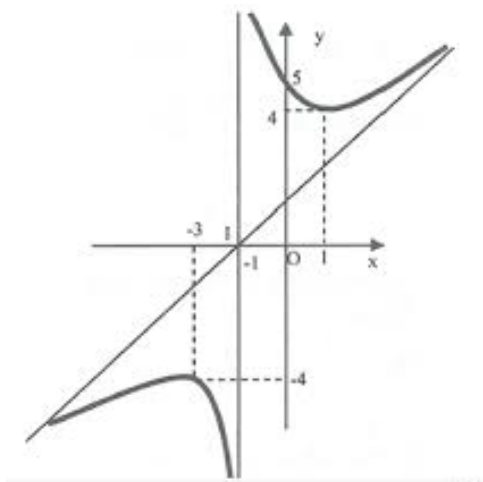
D. $y = -1$.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x = 1$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

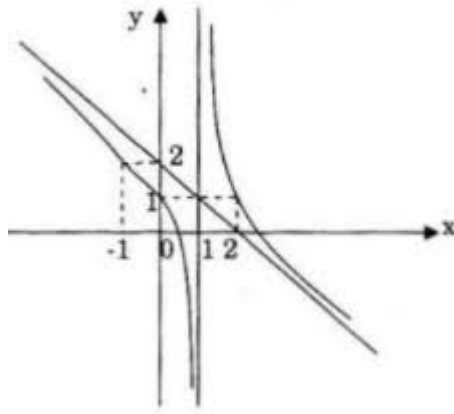
D. 3.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận đứng và 1 tiệm cận xiên.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

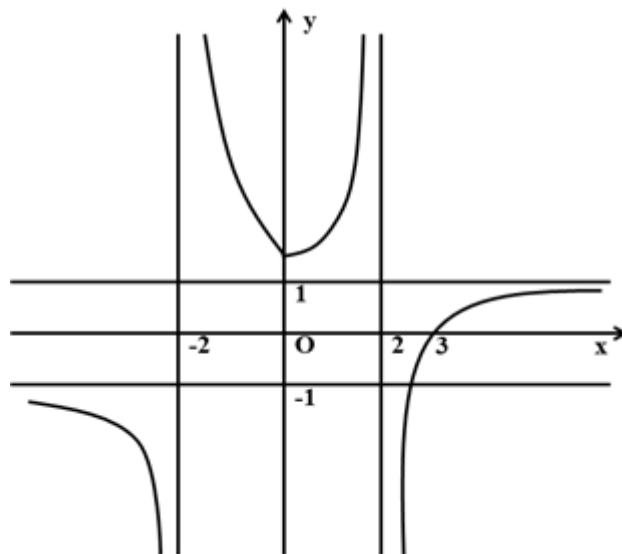
- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận đứng và 1 tiệm cận xiên.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ nên đường thẳng $y = -1$ là một đường tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = \pm 1$.

Tương tự

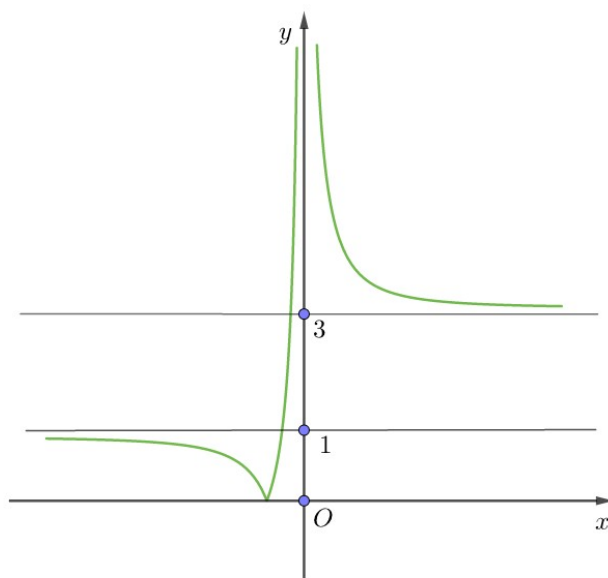
$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = \pm 2$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có:

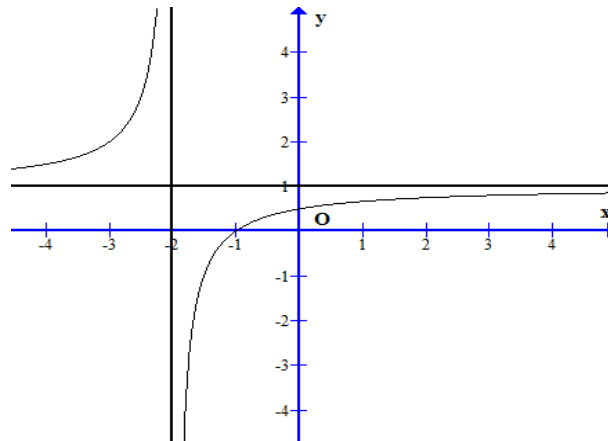
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ nên đường thẳng $y = 3$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



- A. Tiệm cận đứng $x = -2$, tiệm cận ngang $y = 1$. B. Tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = -1$.
C. Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = -2$. D. Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào đồ thị ta có

$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y	1	2	-3	3

Arrows indicate the function values at the boundaries: from 1 to $-\infty$ (between $-\infty$ and 0), from 2 to $-\infty$ (between 0 and 3), and from -3 to 3 (between 3 and $+\infty$).

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. 2. **B. 3.** C. 4. D. 1.

Lời giải

Chọn B.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy $x=0$ hàm số không xác định nên $x=0$ là TCD của đồ thị hàm số

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ là TCN của đồ thị hàm số

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ là TCN của đồ thị hàm số

Vậy hàm số có 3 tiệm cận

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	2	$+\infty$	-2	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Không tồn tại tiệm cận ngang khi $x \rightarrow +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ vậy hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = 2$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 0$.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và ngang là 2.

Câu 9. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+		+	-	+
y	-4	$+\infty$	2	$-\infty$	-1

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn C.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 4$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = -1$ và $y = 4$.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Nên đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	3

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. 4. B. 3. C. 1. **D. 2.**

Lời giải

Chọn D.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ta được tiệm cận ngang $y = 3$

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = +\infty$ ta được tiệm cận đứng $x = -2$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	0	2	$-\infty$	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. **C. 3.** D. 2.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5 \Rightarrow y = 5$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 3.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	$-\infty$

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D.

Do $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \Rightarrow$ TCD: $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1 \Rightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y = \pm 1$

Vậy, đồ thị hàm số đã cho có tổng số TCD và TCN là 3.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang khi $x \rightarrow +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = f(x)$$

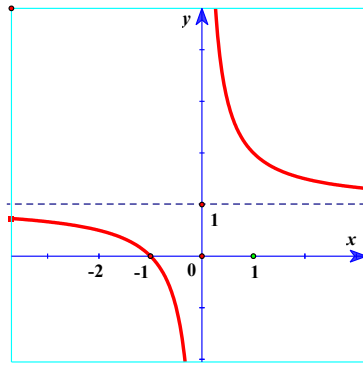
$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = f(x)$$

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3 tiệm cận.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 14. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên.



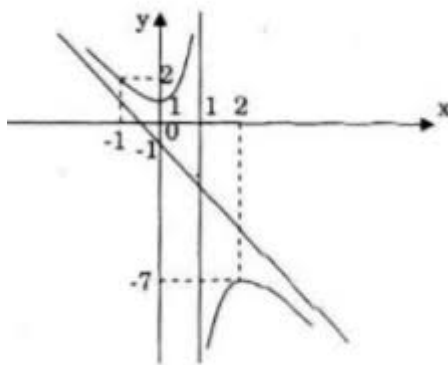
- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có một đường tiệm cận.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x = 0$, đường tiệm cận ngang $y = 1$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.
- D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Lời giải

Từ đồ thị ta có:

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có một đường tiệm cận. **SAI**
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x = 0$, đường tiệm cận ngang $y = 1$. **ĐÚNG**
- C. Hàm số $y = f(x)$ không có cực trị. **ĐÚNG**
- D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. **ĐÚNG**

Câu 15. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên.



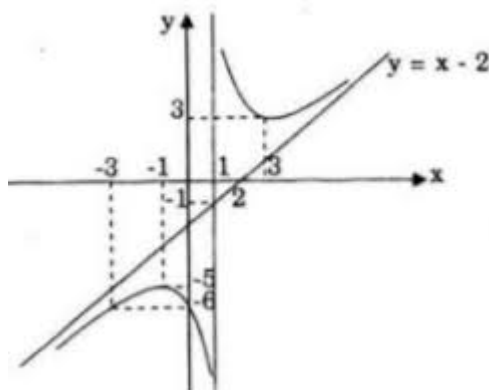
- A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên.
- C. Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(2; -7)$ và điểm cực tiểu $(0; 1)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(0; 2)$

Lời giải

Từ đồ thị ta có:

- A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$. **ĐÚNG**
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên. **ĐÚNG**
- C. Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(2; -7)$ và điểm cực tiểu $(0; 1)$. **ĐÚNG**
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(0; 2)$ **SAI**

Câu 16. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên.



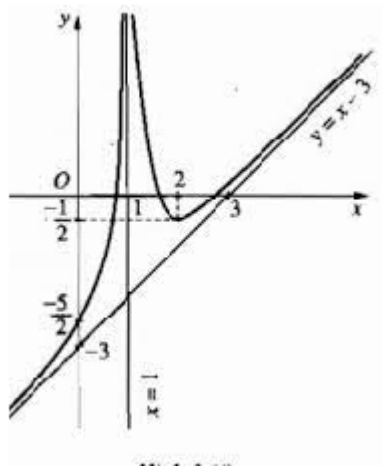
- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 1$
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận xiên $y = x - 2$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(3; 3)$ và điểm cực tiểu $(-1; -5)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty; -3)$ và $(3; +\infty)$

Lời giải

Từ đồ thị ta có:

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 1$ **ĐÚNG**
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận xiên $y = x - 2$ **ĐÚNG**
- C. Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại $(3; 3)$ và điểm cực tiểu $(-1; -5)$ **SAI**
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty; -3)$ và $(3; +\infty)$ **SAI**

Câu 17. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên.



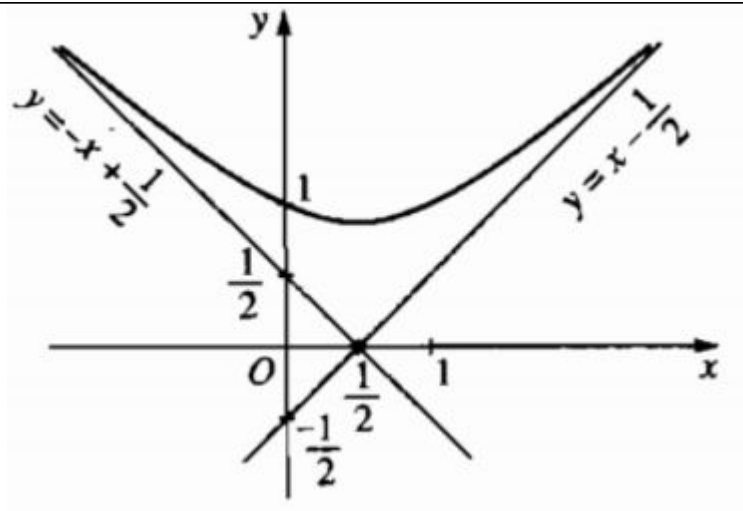
- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 1$
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = x - 3$
- C. Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$

Lời giải

Từ đồ thị ta có:

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 1$ **ĐÚNG**
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = x - 3$ **SAI**
- C. Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ **ĐÚNG**
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$ **ĐÚNG**

Câu 18. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên.



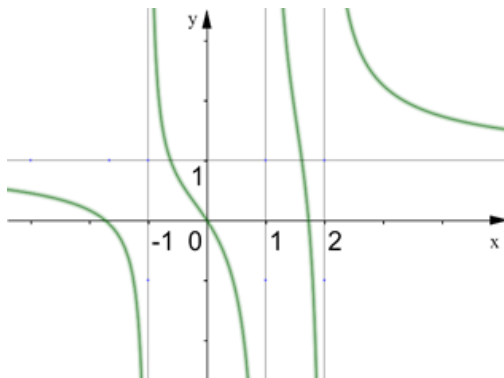
- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận đứng
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiệm cận xiên $y = x - \frac{1}{2}$ và $y = -x + \frac{1}{2}$
- C. Hàm số $y = f(x)$ không cực trị.
- D. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{2}$

Lời giải

Từ đồ thị ta có:

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận đứng **ĐÚNG**
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiệm cận xiên $y = x - \frac{1}{2}$ và $y = -x + \frac{1}{2}$ **ĐÚNG**
- C. Hàm số $y = f(x)$ không cực trị. **SAI**
- D. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{2}$ **SAI**

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$. Có đồ thị như hình vẽ.



- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai đường tiệm cận đứng $x = -1$ và $x = 1$
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một đường tiệm cận ngang là $y = 1$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 1)$; $(-1; 0)$; $(1; 2)$ và $(2; +\infty)$

D. Hàm số $y=f(x)$ không có cực trị.

Lời giải

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai đường tiệm cận đứng $x=-1$ và $x=1$ SAI

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một đường tiệm cận ngang là $y=1$. ĐÚNG

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;1)$; $(-1;0)$; $(1;2)$ và $(2;+\infty)$ ĐÚNG

D. Hàm số $y=f(x)$ không có cực trị. ĐÚNG

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị của hàm số ta có

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là đường tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận đứng là $x=\pm 1$ và $x=2$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

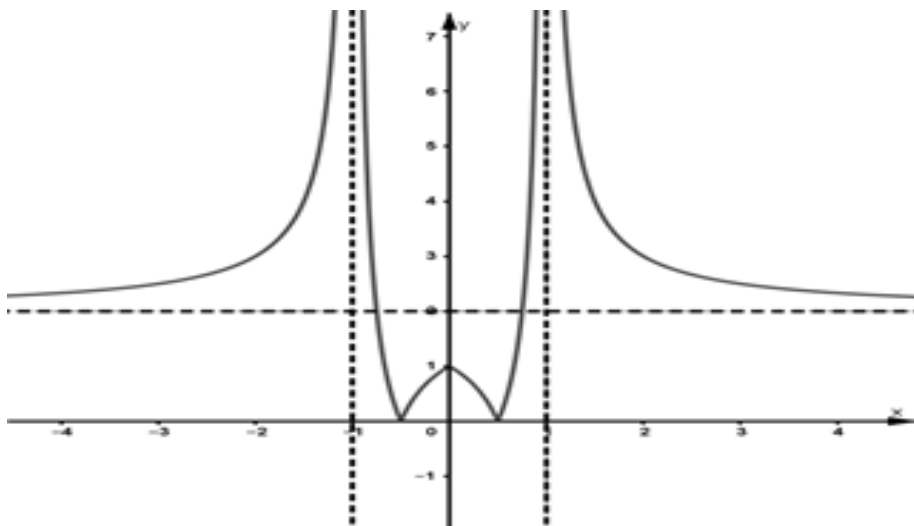
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y=1$ là một đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y=1$.

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;1)$; $(-1;0)$; $(1;2)$ và $(2;+\infty)$

Hàm số $y=f(x)$ không có cực trị.

Câu 20. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hình vẽ dưới đây.



A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số bằng 3.

B. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\min_{\mathbb{R}} y = 0$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$

D. Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số bằng 3.

ĐÚNG

B. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\min_{\mathbb{R}} y = 0$. **ĐÚNG**

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$ **SAI**

D. Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị. **ĐÚNG**

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 2$

Lại thấy: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $x = -1; x = 1$

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$
$f(x)$	-1	$+\infty$	-1

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x = -1$

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang $y = -1$

C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$

D. Hàm số $y = f(x)$ không có điểm cực trị.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy:

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x = -1$ **SAI**

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang $y = -1$ **SAI**

C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$

ĐÚNG

D. Hàm số $y = f(x)$ không có điểm cực trị. **ĐÚNG**

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'	+		+	+	0	-
y	$2 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 1$	$+\infty \nearrow 2 \searrow 3$		

- A.** Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 2
- B.** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba đường tiệm cận ngang $y = 1; y = 2; y = 3$
- C.** Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1; +\infty)$
- D.** Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

- A.** Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 2 **ĐÚNG**
- B.** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba đường tiệm cận ngang $y = 1; y = 2; y = 3$ **ĐÚNG**
- C.** Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1; +\infty)$ **ĐÚNG**
- D.** Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị. **SAI**

$\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$ suy ra $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$ suy ra $x = 0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị của hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	2 $\nearrow$ $+\infty$	3 $\nearrow$ 5	

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Từ bảng biến thiên ta có:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 5$ nên đường thẳng $y = 2$ và $y = 5$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 24. Số tiệm cận đứng và số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau là

x	-2		-1		1		4		$+\infty$
y'		+		+	0	-		-	
y	0		$+\infty$		0,325		$+\infty$		1

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: có 2 TCD

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên $y = 1$ là TCN.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ nên $x = -1$ là TCD.

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$ nên $x = 4$ là TCD.

Vậy có 2 TCD và 1 TCN.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến như sau:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
y'		+		+		+	
y	0		$+\infty$		$+\infty$		0

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 3.

Từ bảng biến thiên của hàm số ta có:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow -3^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} y = -\infty$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -3$ là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} y = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 3^+} y = -\infty$$

đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 3.

DẠNG 2

BIẾT HÀM SỐ $y = f(x)$

- Trường hợp $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm số phân thức hữu tỷ.

+ Nếu $Q(x) = 0$ có nghiệm x_0 thì đồ thị có tiệm cận đứng $x = x_0$ (x_0 là điểm tại đó hàm số không xác định $\Rightarrow x = x_0$ là tiệm cận đứng).

+ Nếu bậc $[P(x)] \neq$ bậc $[Q(x)]$ thì đồ thị có tiệm cận ngang.

+ Nếu bậc $[P(x)] = \text{bậc } [Q(x)] + 1$ thì đồ thị có tiệm cận xiên.

+ Số tiệm cận đứng của hàm số phân thức $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ là số nghiệm của hệ $\begin{cases} Q(x) = 0 \\ P(x) \neq 0 \end{cases}$

+ Đồ thị có tiệm cận ngang thì không có tiệm cận xiên và ngược lại.

• Để xác định các hệ số a, b trong phương trình của **đường tiệm cận xiên**, ta có thể áp dụng các công

thức:
$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

• Thông thường đối với hàm dạng: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ thì ta tìm cận xiên bằng cách chia đa thức, lấy phần nguyên là tiệm cận xiên do $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\text{phần dư}) = 0$.

• Hàm số bậc ba và bậc bốn không có các đường tiệm cận.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 26. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình:

- A. $x = 2$. B. $x = -1$. C. $x = 3$. D. $x = -2$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+2}{x-2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+2}{x-2} = -\infty.$$

Do đó tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình $x = 2$.

Câu 27. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình:

- A. $x = -1$. B. $x = -2$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$.

Vậy đường thẳng $x=2$ là TCD của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 28. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

- A. $y = -2$. B. $y = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn B.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1 \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1$$

Ta có

Suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 29. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-3}$ là

- A. $x = -3$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn D.

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-1}{x-3} = -\infty$. Suy ra tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 3$.

Câu 30. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ là

- A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-2}{x+1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-2}{x+1} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 31. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ B. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ C. $y = \sqrt{x^2 - 1}$ D. $y = \frac{x}{x + 1}$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 32. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C.

Tiệm cận ngang:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(5 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 5$$

Ta có: nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 5$.

Tiệm cận đứng:

Cho $x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+1}{x+1} = \frac{6}{2} = 3$ nên $x = 1$ không là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5x^2 - 4x - 1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{1}{x+1} \cdot \frac{5x^2 - 4x - 1}{x-1} \right) = -\infty$$

$$\text{vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x-1} = -4 < 0 \end{cases}$$

Khi đó, đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 33. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.

A. 3

B. 1

C. 2

D. 0

Lời giải

Chọn C.

Ta có $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \frac{1}{4}$ nên đường thẳng $x = 2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$, nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy có đồ thị có hai đường tiệm cận.

Câu 34. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 + x}$ là

A. 2

B. 1

C. 3

D. 0

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định của hàm số: $D = [-4; +\infty) \setminus \{0; -1\}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} y = \frac{1}{4}$.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 + x} = +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 + x} = -\infty$$

$\Rightarrow$ TCD: $x = -1$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 35. Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định của hàm số $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

TH1: $x < -1 \Rightarrow x+1 < 0$. Khi đó

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Suy ra hàm số TCN $y = -1$, không có TCD.

TH2: $x > 1 \Rightarrow x+1 > 0$. Khi đó

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Suy ra hàm số TCN $y = 1$, TCD $x = 1$.

Vậy hàm số có 2 TCN và 1 TCD

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện: $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}} = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{(x+1)(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{\sqrt{(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}} = 0$ nên đường thẳng $x = -1$ không là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = \sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận (1 tiệm cận ngang, 3 tiệm cận đứng).

Câu 37. Gọi n, d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$y = \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $n = 0, d = 2$. B. $n = d = 1$. C. $n = 1, d = 2$. D. $n = 0, d = 1$.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D = (0; 1)$.

Từ tập xác định suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. $n = 0$.

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}} = -\infty$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}} = -\infty$$

Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng, $d = 2$.

Câu 38. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

$$+ \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}{-9(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)} = -\infty$$

do đó đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{4\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-3-\frac{5}{x}} = -\frac{1}{3}$$

do đó đường thẳng $y=-\frac{1}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 39. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Hàm số } y = \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+2x-1 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\text{Tập xác định của hàm số đã cho là } D = (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{4}; +\infty\right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}} = -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}} = 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y=3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2+2x-1-x^2}{(x+1)(\sqrt{4x^2+2x-1}-x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)(\sqrt{4x^2+2x-1}-x)} = -2.$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 1} + x}{x + 1}$ có 2 đường tiệm cận.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

- A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang phân biệt.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 2$.
- D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang

Lời giải

- A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang. **ĐÚNG**
- B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang phân biệt. **SAI**
- C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 2$. **SAI**
- D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang. **SAI**

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của $y = f(x)$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.

- A. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C) .
- B. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C) .
- C. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C) .
- D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C) .

Lời giải

- A. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C) . **ĐÚNG**
- B. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C) . **SAI**
- C. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C) . **SAI**
- D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C) . **SAI**

Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C) .

Câu 42. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{2x + 4}$ có đồ thị (C) .

- A. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C) .
- B. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C) .
- C. Hàm số $y = \frac{2x - 1}{2x + 4}$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 10)$ và $(10; +\infty)$.
- D. Đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của (C) .

Lời giải

- A. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C) . SAI
- B. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C) . ĐÚNG
- C. Hàm số $y = \frac{2x - 1}{2x + 4}$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 10)$ và $(10; +\infty)$. ĐÚNG
- D. Đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của (C) . ĐÚNG

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{4}{x}} = \frac{2}{2} = 1$$

Ta có

$\Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{2x + 4}$.

Câu 43. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x^2 + x}$ có đồ thị (C) .

- A. Đường thẳng $x = -1$ và $x = 0$ là hai tiệm cận đứng của (C) .
- B. Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của (C) .
- C. Hàm số có ba đường tiệm cận.
- D. Đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của (C) .

Lời giải

- A. Đường thẳng $x = -1$ và $x = 0$ là hai tiệm cận đứng của (C) . SAI
- B. Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của (C) . ĐÚNG
- C. Hàm số có ba đường tiệm cận. SAI
- D. Đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của (C) . ĐÚNG

Tập xác định hàm số $D = [-16; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+16} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16} + 4)} = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16} + 4)} = +\infty$$

vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (\sqrt{x+16} + 4) = \sqrt{15} + 4 > 0$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1) = 0$ và $x \rightarrow (-1)^+$ thì $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16} + 4)} = -\infty$$

Tương tự

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x = -1$.

Câu 44. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1}$ có đồ thị (C).

A. Đường thẳng $y = \frac{1}{3}$ là tiệm cận ngang của (C).

B. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C).

C. Hàm số có ba đường tiệm cận.

D. Đường thẳng $x = -\frac{1}{3}$ là tiệm cận đứng của (C).

Lời giải

A. Đường thẳng $y = \frac{1}{3}$ là tiệm cận ngang của (C). **ĐÚNG**

B. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C). **ĐÚNG**

C. Hàm số có ba đường tiệm cận. **SAI**

D. Đường thẳng $x = -\frac{1}{3}$ là tiệm cận đứng của (C). **SAI**

Xét hàm số $y = \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1}$ có tập xác định $D = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{3x^2 + x}{(3x + 1)(2x - \sqrt{x^2 - x})} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{x}{2x - \sqrt{x^2 - x}} = \frac{1}{4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{nên đồ thị không có tiệm cận đứng.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{3 + \frac{1}{x}} = 1$$

và $y = 1$. nên đồ thị có hai tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{3}$

Vậy đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 45. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$.

Lời giải

Đáp án: $x = 1$

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 1}{x - 1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 1}{x - 1} = -\infty.$$

Do đó tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$ là đường thẳng có phương trình $x = 1$.

Câu 46. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$.

Lời giải

Đáp án: $y = 2$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 2$$

Ta có . Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Câu 47. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.

Lời giải

Đáp án: tiệm cận đứng $x = 0$ và tiệm cận xiên $y = x$

Câu 48. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$.

Lời giải

Đáp án: tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận xiên $y = x + 1$

Câu 49. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$.

A. $x = 3$ và $x = 2$.

B. $x = 3$.

C. $x = -3$ và $x = -2$.

D. $x = -3$.

Lời giải

Đáp án: $x = 3$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x - 1)^2 - (x^2 + x + 3)}{(x^2 - 5x + 6)(2x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x - 1)^2 - (x^2 + x + 3)}{(x^2 - 5x + 6)(2x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x + 1)}{(x - 3)(2x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 3})} = -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

Tương tự $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = -\frac{7}{6}$. Suy ra đường thẳng $x = 2$ **không** là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$. Suy ra đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 50. Tìm đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x - 2} + 1}{x^2 - 3x + 2}$.

Lời giải

Đáp án: tiệm cận đứng $x = 2$ và tiệm cận ngang $y = 0$

Đkxđ: $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 2, x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\sqrt{x - 2} + 1}{x^2 - 3x + 2} \right) = +\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x - 2} + 1}{x^2 - 3x + 2} \right) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.