

TÍNH CHẤT CÁC ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

$y = ax^4 + bx^2 + c$ VÀ ỨNG DỤNG

Các đề thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng trong các năm gần đây, chúng ta thường gặp câu khảo sát hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) và các vấn đề liên quan đến các điểm cực trị của đồ thị hàm số này. Để giúp học sinh ôn thi có hiệu quả, bài viết này đưa ra các tính chất thường gặp của các điểm cực trị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ và một số ứng dụng của nó.

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{cases} \quad (1)$

Ở đây chúng ta chỉ xét trường hợp hay gặp là đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị phân biệt.

Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị phân biệt khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow ab < 0$ (*)

Với điều kiện (*) ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}} \end{cases}$. Suy ra đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là

$A(0; c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$ và $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Khi đó ta có $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4 - 8ab}{16a^2}}$ và $BC = \sqrt{-\frac{2b}{a}}$.

Sau đây là một số tính chất thường gặp của các điểm cực trị này.

1) Điều kiện để ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

Vì $AB = AC$ nên tam giác ABC là tam giác cân tại A. Suy ra tam giác ABC là tam giác vuông khi và chỉ khi $\angle BAC = 90^\circ$ hay tam giác ABC vuông cân tại A.

Khi đó $BC = AB\sqrt{2} \Leftrightarrow BC^2 = 2AB^2 \Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = 2 \cdot \frac{b^4 - 8ab}{16a^2} \Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$

Tính chất 1: Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông khi và chỉ khi $\begin{cases} ab < 0 \\ b^3 + 8a = 0 \end{cases}$.

2) Điều kiện để ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

Ta có tam giác ABC là tam giác đều khi và chỉ khi $AB = AC = BC \Leftrightarrow AB^2 = BC^2$
 $\Leftrightarrow \frac{b^4 - 8ab}{16a^2} = -\frac{2b}{a} \Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$.

Tính chất 2: Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi $\begin{cases} ab < 0 \\ b^3 + 24a = 0 \end{cases}$.

3) Điều kiện để ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác cân có một góc α cho trước.

Có ba trường hợp xảy ra.

Trường hợp 1: $\alpha > 90^\circ$.

Khi đó tam giác ABC là tam giác tù. Vì tam giác ABC cân tại A nên tam giác ABC có một góc $\alpha > 90^\circ$ khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = \alpha$.

Áp dụng định lý côsin vào tam giác ABC ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 2AB^2(1 - \cos \alpha) \Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = 2 \cdot \frac{b^4 - 8ab}{16a^2}(1 - \cos \alpha) \Leftrightarrow -16a = (b^3 - 8a)(1 - \cos \alpha)$$

$$\Leftrightarrow b^3 + 8a - (b^3 - 8a)\cos \alpha = 0.$$

Trường hợp 2: $\alpha = 90^\circ$ (ta đã xét ở tính chất 1)

Trường hợp 3: $\alpha < 90^\circ$.

+ Nếu $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$ thì $\widehat{A} = 180^\circ - 2\alpha$, suy ra $\cos A = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$.

Áp dụng định lý côsin vào tam giác ABC ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 2AB^2(1 + \cos 2\alpha) \Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = 2 \cdot \frac{b^4 - 8ab}{16a^2}(1 + \cos 2\alpha) \Leftrightarrow -16a = (b^3 - 8a)(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow b^3 + 8a + (b^3 - 8a)\cos 2\alpha = 0.$$

+ Nếu $\widehat{A} = \alpha$ thì tương tự trường hợp 1, ta có $b^3 + 8a - (b^3 - 8a)\cos \alpha = 0$.

Tính chất 3. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác cân có một góc α cho trước khi và chỉ khi $ab < 0$ và hoặc $b^3 + 8a - (b^3 - 8a)\cos \alpha = 0$ nếu $\alpha > 90^\circ$

hoặc $b^3 + 8a = 0$ nếu $\alpha = 90^\circ$

hoặc $b^3 + 8a + (b^3 - 8a)\cos 2\alpha = 0$ nếu $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha < 90^\circ$

hoặc $b^3 + 8a - (b^3 - 8a)\cos \alpha = 0$ nếu $\widehat{A} = \alpha < 90^\circ$.

4) Điều kiện để ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $BC = OA$ (với O là gốc tọa độ)

$$\text{Ta có } BC = OA \Leftrightarrow BC^2 = OA^2 \Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = c^2 \Leftrightarrow ac^2 + 2b = 0.$$

Tính chất 4. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn điều kiện $BC = OA$ (với O là gốc tọa độ) khi và chỉ khi $\begin{cases} ab < 0 \\ ac^2 + 2b = 0 \end{cases}$.

5) Điều kiện để ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác và tính diện tích tam giác đó.

Gọi H là giao điểm của BC với trục Oy thì AH là đường cao của tam giác ABC . Khi đó H có tọa độ $H\left(0; c - \frac{b^2}{4a}\right)$. Suy ra $AH = \left| -\frac{b^2}{4a} \right| = \frac{b^2}{4|a|}$.

$$\text{Vậy diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-\frac{2b}{a}} \cdot \frac{b^2}{4|a|} = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}.$$

Tính chất 5. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác có diện tích là S cho trước khi và chỉ khi $\begin{cases} ab < 0 \\ S = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}} \end{cases}$.

6) Điều kiện để ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và H là giao điểm của BC với trục Oy . Khi đó H có tọa độ là $H\left(0; c - \frac{b^2}{4a}\right)$ và $AH = \left| -\frac{b^2}{4a} \right| = \frac{b^2}{4|a|}$.

Từ tam giác vuông AHC , ta có $\sin \angle ACH = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{AB}$.

Áp dụng định lý sin vào tam giác ABC ta được $2R = \frac{AB}{\sin \angle ACH} = \frac{AB^2}{AH} = \frac{b^4 - 8ab}{16a^2} \times \frac{4|a|}{b^2}$

$$\text{Suy ra } R = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b}.$$

Tính chất 6. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R khi và chỉ khi $\begin{cases} ab < 0 \\ R = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b} \end{cases}$.

II. ỨNG DỤNG

Ví dụ 1. (Câu 1 đề thi TSDH năm 2012 khối A và khối A1)

Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ (1), với m là tham số thực.

Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

Lời giải.

Áp dụng tính chất 1, đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác

vuông khi và chỉ khi $\begin{cases} ab < 0 \\ b^3 + 8a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(m+1) < 0 \\ -8(m+1)^3 + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ (m+1)^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$

Ví dụ 2. (Câu 1 đề thi TSDH năm 2011 khối B)

Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (1), m là tham số.

Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

Lời giải.

Áp dụng tính chất 4, đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$ khi và chỉ khi $\begin{cases} ab < 0 \\ ac^2 + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(m+1) < 0 \\ m^2 - 4(m+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m^2 - 4m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}.$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3$ (1)

Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi các điểm cực trị đó đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Áp dụng tính chất 6, đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi các điểm cực trị là R khi và chỉ khi $\begin{cases} ab < 0 \\ R = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m < 0 \\ R = \frac{(-2m)^3 - 8}{8(-2m)} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ R = \frac{m^3 + 1}{2m} \end{cases}. \text{ Suy ra } R = \frac{1}{2} \left(m^2 + \frac{1}{m} \right).$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, ta có

$$R = \frac{1}{2} \left(m^2 + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{m^2 \cdot \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{2m}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{2}.$$

$$\text{Vậy } \min R = \frac{3}{4} \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{2m} \Leftrightarrow m^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1)

Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm này có bán kính bằng 1.

Lời giải.

Áp dụng tính chất 6, đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm này có bán kính R khi và chỉ khi $\begin{cases} ab < 0 \\ R = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} -2m < 0 \\ R = \frac{(-2m)^3 - 8}{8(-2m)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ R = \frac{m^3 + 1}{2m} \end{cases}$

Theo đề bài ta có $R = 1$, suy ra $1 = \frac{m^3 + 1}{2m} \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m^2 + m - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}. \text{ Đối chiếu với điều kiện } m > 0 \text{ ta được } m = 1, m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m - 2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ (C_m)

Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều.

Lời giải.

Áp dụng tính chất 2, đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm

cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều khi và chỉ khi $\begin{cases} ab < 0 \\ b^3 + 24a = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(m-2) < 0 \\ 8(m-2)^3 + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ (m-2)^3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m = 2 - \sqrt[3]{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt[3]{3}.$$

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + 1$

Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng 120° .

Lời giải.

Theo tính chất 3, đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác có một góc $\alpha = 120^\circ$ khi và chỉ khi $\begin{cases} ab < 0 \\ b^3 + 8a - (b^3 - 8a)\cos\alpha = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m < 0 \\ 8m^3 - 8 - (8m^3 + 8)\cos 120^\circ = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 8m^3 - 8 - (8m^3 + 8)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 12m^3 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^3 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 2$.

Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 32.

Lời giải.

Theo tính chất 5, đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác có

$$\text{diện tích } S = 32 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} ab < 0 \\ S = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m < 0 \\ 32 = \sqrt{-\frac{(-2m)^5}{32 \cdot 1^3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 32 = \sqrt{m^5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 32^2 = m^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m = \sqrt[5]{32^2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m - 1$.

Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng 30° .

Lời giải

Theo tính chất 3, đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác cân có một góc $\alpha = 30^\circ$ khi và chỉ khi ta có hai trường hợp sau

$$+ \text{ Nếu góc ở đỉnh } \alpha = 30^\circ \text{ thì } \begin{cases} ab < 0 \\ b^3 + 8a - (b^3 - 8a)\cos\alpha = 0 \end{cases} \quad (1)$$

+ Nếu góc ở đáy $\alpha = 30^\circ$ thì $\begin{cases} ab < 0 \\ b^3 + 8a + (b^3 - 8a)\cos 2\alpha = 0 \end{cases} \quad (2)$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m < 0 \\ 8m^3 + 8 - (8m^3 - 8)\cos 30^\circ = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 8m^3 + 8 - (8m^3 - 8) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ (2 - \sqrt{3})m^3 + 2 + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^3 = -\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\sqrt[3]{(2 + \sqrt{3})^2}$

Và (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m < 0 \\ 8m^3 + 8 + (8m^3 - 8)\cos 60^\circ = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 8m^3 + 8 + (8m^3 - 8) \cdot \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 3m^3 + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^3 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Vậy khi $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ hoặc $m = -\sqrt[3]{(2 + \sqrt{3})^2}$ thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng 30° .

III. BÀI TẬP

Bài tập 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$.

Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

ĐS: $m = \sqrt[3]{3}$

Bài tập 2. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$.

Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng 30° .

ĐS: $m = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{3})^2}$ hoặc $m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Bài tập 3. Cho hàm số $y = 2x^4 - 2mx^2 - m + 1 \quad (1)$

Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi các điểm cực trị đó đạt giá trị nhỏ nhất

ĐS: $\min R = \frac{3}{4} \Leftrightarrow m = 1$

Bài tập 4. Cho hàm số $y = 2x^4 - 2(m + 3)x^2 + m + 1 \quad (1)$, m là tham số.

Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

ĐS: $m = \pm\sqrt{5}$

Bài tập 5. Cho hàm số $y = -x^4 - 2(m - 1)x^2 + m + 1$.

Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 32.

ĐS: $m = -3$

IV. KẾT LUẬN

Bài viết này đã nêu ra 6 tính chất của các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) và một số ứng dụng của chúng. Hy vọng rằng bài viết này cung cấp cho các bạn một tài liệu để giảng dạy và ôn tập cho học sinh lớp 12 thi vào các trường Đại học và Cao đẳng có kết quả. Cuối cùng tác giả mong đón nhận được sự góp ý chân thành của các bạn và xin chúc các bạn sức khỏe, hạnh phúc và thành đạt.

Trân trọng cảm ơn.

Nguyễn Văn Thiết

MỤC LỤC

Mở đầu	trang 1
I. Cơ sở lý thuyết	1
1) Điều kiện để ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.	1
Tính chất 1	
2) Điều kiện để ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.	1
Tính chất 2	
3) Điều kiện để ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác cân có một góc α cho trước.....	2
Tính chất 3	
4) Điều kiện để ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $BC = OA$ (với O là gốc tọa độ)	2
Tính chất 4	
5) Điều kiện để ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác và tính diện tích tam giác đó.....	2
Tính chất 5	
6) Điều kiện để ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC	3
Tính chất 6	
II. Ứng dụng	
Ví dụ 1	3
Ví dụ 2	3
Ví dụ 3	4
Ví dụ 4	4
Ví dụ 5	4
Ví dụ 6	5
Ví dụ 7	5
Ví dụ 8	5
III. Bài tập	
Bài tập 1	6
Bài tập 2	6
Bài tập 3	6
Bài tập 4	6
Bài tập 5	6
IV. Kết luận	7
Mục lục	8
Nhận xét của BGH.....	9

PHẦN ĐÁNH GIÁ CỦA HỘI ĐỒNG KHOA HỌC TRƯỜNG

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Xếp loại:

Ngàytháng.....năm

PHẦN ĐÁNH GIÁ CỦA HỘI ĐỒNG KHOA HỌC SỞ GD&ĐT THỪA THIÊN HUẾ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ngàytháng.....năm