SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
TỈNH BÌNH DƯƠNG
Trường THPT chuyên Hùng Vương

ĐỀ ĐỀ XUẤT

ĐỀ ĐỀ XUẤT KỲ THI HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM 2023
Môn**: TOÁN – KHỐI 10**
*Thời gian: **180 phút,** không kể thời gian phát đề*

Câu 1: (4 *điểm*).

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho

$$f\left(x^3\right)-f\left(y^2\right)=\left(x^2+xy+y^2\right)\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

Câu 2: (4 *điểm*).

Tìm số thực k lớn nhất sao cho Bất đẳng thức

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq k\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(9-k\right)\left(ab+bc+ca\right)$$

đúng với mọi $a,b,c>0$.

Câu 3: (4 *điểm*).

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn $\left(I\right)$. Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của $\left(I\right)$ với BC,CA,AB. AD giao với $\left(I\right)$ tại M, BM giao với $\left(I\right)$ tại N. Chứng minh rằng FM,EN,BC đồng quy.

Câu 4: (4 *điểm*).

Gọi a,b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng $a^2+\left\lceil\frac{4a^2}{b}\right\rceil$ không là số chính phương (ở đây $\left\lceil x\right\rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng x).

Câu 5: (4 *điểm*).

Cho 5 điểm nằm trên một mặt phẳng sao cho tất cả các đường thẳng đi qua hai điểm trong chúng không song song và không vuông góc nhau. Tại mỗi điểm ta dựng các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng xuất phát từ 4 đỉnh còn lại mà không nối với đỉnh đã chọn. Chứng minh rằng số giao điểm hệ các đường thẳng vuông góc này không vượt quá 310.

---------------HẾT---------------

ĐÁP ÁN VẢ THANG ĐIỂM CHẤM – TOÁN – KHỐI 10

Câu 1: **(4 *điểm*)**. **(Người ra đề: Trần Văn Trí).**

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho

$$f\left(x^3\right)-f\left(y^2\right)=\left(x^2+xy+y^2\right)\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right),\forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

THANG ĐIỂM CÂU 1

\+ Cho $y=0$ vào (1) ta được

$$f\left(x^3\right)-f\left(0\right)=x^2\left(f\left(x\right)-f\left(0\right)\right),\forall x\in\mathbb{R} \qquad (2)$$ **(0,5điểm)**

\+ Cho $x=0$ vào (1) ta được

$$f\left(0\right)-f\left(y^2\right)=y^2\left(f\left(0\right)-f\left(y\right)\right),\forall y\in\mathbb{R} \qquad (3)$$ **(0,5điểm)**

Từ (2) và (3) suy ra

$$f\left(x^3\right)-f\left(0\right)=f\left(x^2\right)-f\left(0\right)\Rightarrow f\left(x^3\right)=f\left(x^2\right),\forall x\in\mathbb{R} \quad (4)$$ **(0,5điểm)**

Từ (4) ta suy ra f là hàm số chẵn. **(0,25điểm)**

Thay y = 1 vào (1) ta được

$$f\left(x^3\right)-f\left(1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(f\left(x\right)-f\left(1\right)\right),\forall x\in\mathbb{R} \qquad (5)$$ **(0,5điểm).**

Thay y = -1 vào (1) ta được

$$f\left(x^3\right)-f\left(1\right)=\left(x^2-x+1\right)\left(f\left(x\right)-f\left(1\right)\right),\forall x\in\mathbb{R} \qquad (6)$$ **(0,5điểm)**

Từ (5) và (6) ta suy ra

$$x\left(f\left(x\right)-f\left(1\right)\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(x\right)=f\left(1\right),\forall x\neq 0$$ **(0,5điểm)**

Cho $x=2$ vào (1) ta được

$$f\left(1\right)-f\left(0\right)=4\left(f\left(1\right)-f\left(0\right)\right)\Rightarrow f\left(1\right)=f\left(0\right)$$ **(0,5 điểm)**

Vậy $f\left(x\right)=c,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thỏa mãn. **(0,25điểm)**

Câu 2: **(4 *điểm*)**. **(Người ra đề: Nguyễn Văn Phi)**

Tìm số thực k lớn nhất sao cho Bất đẳng thức

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq k\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(9-k\right)\left(ab+bc+ca\right)$$

đúng với mọi $a,b,c>0$.

THANG ĐIỂM CÂU 2

Ta viết lại bất đẳng thức thành

$$\left(1+\frac{2}{a^2}\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge k\left(1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\left(9-k\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{bc}{a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

Xét bộ số $\left(a,b,c\right)$ với $a=x;\, b=c=\dfrac{1}{x}$ và cho $x\longrightarrow+\infty$ từ đẳng thức ta thu được

$$\left(1+0\right)\left(0+2\right)\left(0+2\right)\ge k\left(1+0+0\right)+\left(9-k\right)\left(0+0+0\right).$$

Suy ra $k\le 4$. **(1 điểm)**

Ta sẽ chứng minh $k=4$ thỏa mãn, tức là:

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge 4\left(a^2+b^2+c^2\right)+5\left(ab+bc+ca\right)$$

Hay chứng minh

$$a^2b^2c^2+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+8\ge 5\left(ab+bc+ca\right)$$

Đặt $ab=x,bc=y,ca=z$ bài toán trở thành chứng minh

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right)+xyz+8\ge 5\left(x+y+z\right) \text{ với mọi } x,y,z>0. \ (1)$$ **(1 điểm)**

Ta có

$$\left(x+y+z-3\right)^2+2\left(x-1\right)^2+2\left(y-1\right)^2+2\left(z-1\right)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\left(xy+yz+zx\right)-10\left(x+y+z\right)+15\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\left(xy+yz+zx\right)+15\ge 10\left(x+y+z\right) \quad (2).$$ **(1 điểm)**

Mặt khác

Do vai trò bình đẳng của x,y,z. Theo nguyên lý Dirichlet ta giả sử

$$\left(x-1\right)\left(y-1\right)\ge 0 \text{ suy ra } xy\ge x+y-1$$

Suy ra $x^2+y^2+z^2+2xyz+1\ge x^2+y^2+z^2+2z\left(x+y-1\right)$

$$\ge x^2+y^2+\left(z-1\right)^2+2yz+2zx\ge 2\left(xy+yz+zx\right) \ (3)$$

Từ (2) và (3) dễ dàng thu được:

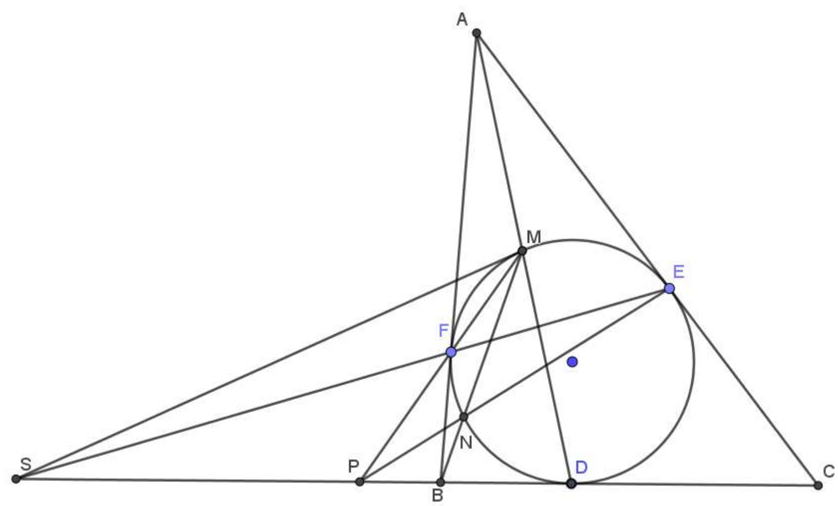
$$4\left(x^2+y^2+z^2\right)+2xyz+16\ge 10\left(x+y+z\right)$$

Vậy (1) đúng. Bài toán đã được giải xong, $k=4$ là giá trị cần tìm. **(1 điểm)**

Câu 3: (4 *điểm*). (Người ra đề: Trần Nguyễn Quốc Anh)

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn $\left(I\right)$. Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của $\left(I\right)$ với BC,CA,AB. AD giao với $\left(I\right)$ tại M, BM giao với $\left(I\right)$ tại N. Chứng minh rằng FM,EN,BC đồng quy.

THANG ĐIỂM CÂU 3



Dễ thấy tứ giác $MFDE$ điều hòa nên tiếp tuyến tại M,EF,BC đồng quy tại S **(1 điểm)**

Gọi P,Q là các giao điểm của MF,ME với BC.

Ta có $M\left(MDFE\right)=-1$ nên $\left(SD,PQ\right)=-1\,(1)$ **(1 điểm)**

Mặt khác tứ giác $MFND$ điều hòa suy ra $E\left(MNFD\right)=-1$. **(1 điểm)**

Gọi K là giao của EN và BC ta được $\left(SD,KQ\right)=-1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P\equiv K$ Suy ra điều phải chứng minh. **(1 điểm)**

Câu 4: (4 *điểm*). (Người ra đề: Nguyễn Thành Nhân)

Gọi a,b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng $a^2+\left\lceil\dfrac{4a^2}{b}\right\rceil$ không là số chính phương (ở đây $\left\lceil x\right\rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng x).

THANG ĐIỂM CÂU 4

Cách 1: *Phương pháp gián tiếp*

Giả sử $a^2+\left[\dfrac{4a^2}{b}\right]=\left(a+k\right)^2$, tức là $\left[\dfrac{\left(2a\right)^2}{b}\right]=\left(2a+k\right).k$. **(0.5 điểm)**

Rõ ràng $k\geq 1$ vì $a^2+\left[\dfrac{4a^2}{b}\right]>1$. Nói cách khác phương trình

$$\left[\frac{c^2}{b}\right]=\left(c+k\right).k\ \ \left(1\right)$$

có nghiệm nguyên dương $\left(c,k\right)$ với k là số chẵn. **(1 điểm)**

Chọn nghiệm nguyên dương của $\left(1\right)$ với k nhận giá trị nhỏ nhất, không liên quan đến tính chẵn lẻ của c. Từ

$$\frac{c^2}{b}>\left[\frac{c^2}{b}\right]-1=ck+k^2-1\geq ck,$$

và

$$\frac{\left(c-k\right).\left(c+k\right)}{b}<\frac{c^2}{b}\leq\left[\frac{c^2}{b}\right]=\left(c+k\right).k,$$

có thể thấy rằng $c>bk>c-k$. Do đó $c=bk+r,\ 0<r<k$. **(1 điểm)**

Thay vào $\left(1\right)$ ta được

$$\left[\frac{c^2}{k}\right]=\left[\frac{\left(bk+r\right)^2}{k}\right]=k^2b+2kr+\left[\frac{r^2}{b}\right]$$

và

$$\left(c+k\right).k=\left(kb+r+k\right).k=k^2b+2kr+k\left(k-r\right).$$

Từ đó

$$\left[\frac{r^2}{b}\right]=k\left(k-r\right)=\left(k-r+r\right)\left(k-r\right).\ \left(2\right)$$ **(1 điểm)**

Cấu trúc phương trình $\left(2\right)$ giống như $\left(1\right)$ nên có một bộ nghiệm $\left(c',k'\right)$ với $c'=r$ và $k'=k-r<k$, mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của k.

Vậy $a^2 + \left[\frac{4a^2}{b}\right]$ không thể là số chính phương. **(0,5 điểm)**

Cách 2: *Bước nhảy Viète.*

Giả sử $a^2 + \left[\frac{4a^2}{b}\right] = c^2$ với c là số nguyên dương lớn hơn a. Từ đó

$$c^2 - 1 < a^2 + \frac{4a^2}{b} \le c^2; 0 \le c^2 b - a^2(b+4) < b. \quad (3)$$ **(1 điểm)**

Đặt $d = c^2 b - a^2(b+4)$, $x = c + a$, $y = c - a$. Khi đó ta có $c = \frac{x+y}{2}; d = \frac{x-y}{2}$ và (3) có thể viết lại

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 b - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 (b+4) = d;$$

$$x^2 - (b+2)xy + y^2 + d = 0, \ 0 \le d < b. \quad (4)$$ **(1 điểm)**

Vì vậy, theo giả thiết phản chứng, phương trình (4) có nghiệm nguyên dương (x, y).

Gọi (x, y) là một nghiệm nguyên dương của (4) có tổng $x + y$ bé nhất. Do tính đối xứng nên ta có thể giả sử rằng $x \ge y \ge 1$. Ta sẽ sử dụng *Bước nhảy Viète* để xử lý tiếp.

Xem (4) là phương trình bậc hai ẩn x và gọi z là nghiệm kia của nó. Theo hệ thức Viète ta có

$$x + z = (b+2); xz = y^2 + d,$$

từ đó

$$z = (b+2)y - x = \frac{y^2 + d}{x}.$$

Từ hệ thức đầu ta suy ra z là số nguyên và hệ thức thứ hai suy ra z là số nguyên dương. Từ đó (z, y) là một nghiệm nguyên dương của phương trình (4). **(1 điểm)**

Từ

$$\begin{aligned}(x-1)(z-1) = xz - (x+z) + 1 &= (y^2 + d) - (b+2d)y + 1 \\ &< (y^2 + b) - (b+2)y + 1 = (y-1)^2 - b(y-1) \\ &\le (y-1)^2 \le (x-1)^2,\end{aligned}$$

ta có thể thấy $z < x$ và dẫn đến $z + y < x + y$. Nhưng điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của tổng $x + y$ được chọn ở trên. Giả thiết phản chứng là sai.

Phép chứng minh hoàn tất. **(1 điểm)**

Câu 5: ***(4 điểm)*****. (Người ra đề: Trần Văn Trí)**

Cho 5 điểm nằm trên một mặt phẳng sao cho tất cả các đường thẳng đi qua hai điểm trong chúng không song song và không vuông góc nhau. Tại mỗi điểm ta dựng các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng xuất phát từ 4 đỉnh còn lại mà không nối với đỉnh đã chọn. Chứng minh rằng số giao điểm hệ các đường thẳng vuông góc này không vượt quá 310 .

THANG ĐIỂM CÂU 5

+ Số đường thẳng đi qua 2 điểm trong hệ 5 điểm là $C_5^2 = 10$ và có 4 đường thẳng đi qua mỗi điểm.
+ Do đó từ mỗi điểm ta có dựng được 6 đường thẳng vuông góc với các đường thẳng còn lại.
(0,5 điểm)

+ Xét hai điểm bất kì, gọi hai điểm đó A, B và ta đi tính số giao điểm giữa các đường vuông góc xuất phát từ A và từ B. Ba điểm còn lại là C, D, E.
Chia các đường thẳng vuông góc từ A thành hai nhóm:

- Nhóm 1: Gồm các đường p_1, p_2, p_3 lần lượt vuông với đường thẳng BC, BD, BE

  Khi đó số giao điểm của nhóm này với tất cả 6 đường thẳng $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ vuông góc từ B là $3.6 = 18$. **(1 điểm)**
- Nhóm 2: Gồm các đường q_1, q_2, q_3 lần lượt vuông với đường thẳng CD, CE, DE

  Khi đó số giao điểm của nhóm này với 5 đường thẳng vuông góc từ B là $3.5 = 15$. Bởi vì khi đó mỗi đường vuông góc từ A sẽ song song với một đường vuông góc từ B (Vì cùng vuông góc với một trong các cạnh CD, CE, DE) **(1 điểm)**

+ Do đó số giao điểm có thể từ các đường vuông góc từ A và B là : $15 + 18 = 33$
+ Số cách chọn ra hai điểm trong 5 điểm là $C_5^2 = 10$
+ Ta biết mỗi tam giác sẽ có ba đường cao đồng quy. Số tam giác tạo thành từ 3 điểm trong 5 điểm là $C_5^3 = 10$ **(1 điểm)**

Do đó số giao điểm nhiều nhất có thể là $330 - 2.10 = 310$ **(0,5 điểm)**

---------------HẾT---------------