**Bài 2. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP**

**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

**1. Hoán vị**

Khi sắp xếp  phần tử của một tập hợp theo một thứ tự, ta được một ***hoán vị*** của  phần tử đó.

Số các hoán vị của  phần tử  bằng .

**2. Chỉnh hợp**

Cho tập hợp  có  phần tử  và số nguyên  với .

Mỗi cách lấy  phần tử của  và sắp xếp chúng theo một thứ tự gọi là một ***chỉnh hợp*** chập  của  phần tử đó.

Số các chỉnh hợp chập  của  phần tử  bằng

.

**3. Tổ hợp**

Mỗi tập con gồm  phần tử  của một tập hợp gồm  phần tử được gọi là một ***tổ hợp*** chập  của  phần tử đó.

Số các tổ hợp chập  của  phần tử  bằng .

**B. BÀI TẬP MẪU**

**Bài 1.** Có  cuốn sách Toán học khác nhau và  cuốn sách Sinh học khác nhau.

a) Có bao nhiêu cách xếp các cuốn sách này thành một dãy trên giá sách?

b) Nếu yêu cầu thêm các cuốn sách cùng môn phải được xếp cạnh nhau thì có bao nhiêu cách xếp?



**Lời giải**

a) Mỗi cách sắp xếp  cuốn sách thành một dãy trên giá là một hoán vị của  cuốn sách này. Do đó, có  cách sắp xếp.

b) Có  cách sắp xếp  cuốn sách Toán học cạnh nhau để thành một dãy. Có  cách sắp xếp  cuốn sách Sinh học cạnh nhau để thành một dãy. Có  cách sắp xếp hai dãy trên cạnh nhau để thành một dãy mới. Từ đó, áp dụng quy tắc nhân, số cách sắp xếp các cuốn sách trên thành một dãy sao cho các sách cùng môn được xếp cạnh nhau là  (cách xếp).

**Bài 2.** Một ga tàu hỏa có  đường nhánh, mỗi nhánh chỉ đỗ được một đoàn tàu. Hiện các đường nhánh đều đang trống và có  đoàn tàu sắp vào ga. Có bao nhiêu cách bố trí nhánh đỗ cho  đoàn tàu?

****

**Lời giải**

Mỗi cách chọn ba đường nhánh và bố trí nhánh đỗ cho ba đoàn tàu là một chỉnh hợp chập  của  đường nhành. Do đó, số cách bố trí là  (cách).

**Bài 3.** Một bệnh viện có  bác sĩ nội khoa và  bác sĩ ngoại khoa. Bệnh viện cần cử  bác sĩ tham gia vào đội y tế cứu trợ thiên tai.

a) Cần cử  bác sĩ nội khoa và hai bác sĩ ngoại khoa. Có bao nhiêu lựa chọn?

b) Cần cử ít nhất hai bác sĩ nội khoa và ít nhất hai bác sĩ ngoại khoa. Có bao nhiêu lựa chọn?

**Lời giải**

a) Mỗi cách chọn ba trong  bác sĩ nội khoa là một tổ hợp chập  của  bác sĩ này. Do đó, có  cách chọn  trong  bác sĩ nội khoa. Có  cách chọn  trong  bác sĩ ngoại khoa. Áp dụng quy tắc nhân, số cách cử  bác sĩ trong đó có ba bác sĩ nội khoa và hai bác sĩ ngoại khoa là  (cách).

b) Có hai phương án thực hiện.

*Phương án 1:* Chọn hai bác sĩ nội khoa và ba bác sĩ ngoại khoa, có  cách chọn.

*Phương án 2:* Chọn ba bác sĩ nội khoa và hai bác sĩ ngoại khoa, có  cách chọn.

Áp dụng quy tắc cộng, số cách cử năm bác sĩ trong đó có ít nhất hai bác sĩ nội khoa và ít nhất hai bác sĩ ngoại khoa là  (cách).

**Bài 4.** Trong một lô 100 sản phẩm, có 97 chính phẩm (sản phẩm đạt tiêu chuẩn) và 3 thứ phẩm (sản phẩm không đạt tiêu chuẩn). Từ 100 sản phẩm này, có bao nhiêu cách lấy ra 3 sản phẩm mà

a) 3 sản phẩm được lấy bất kì?

b) trong đó có 2 chính phẩm và 1 thứ phẩm?

c) trong đó có it nhất một thứ phẩm?

**Lời giải**

a) Mỗi cách lấy 3 sản phẩm từ 100 sản phẩm là một tổ hợp chập 3 của 100 sản phẩm. Do đó, số cách lấy 3 sản phẩm bất kì là  (cách).

b) Có  cách lấy 2 chính phẩm từ 97 chính phẩm. Có  cách lấy 1 thứ phẩm từ 3 thứ phẩm. Từ đó, áp dụng quy tắc nhân, số cách lấy 2 chính phẩm và 1 thứ phẩm là  (cách).

c) Trong 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất 1 thứ phẩm trong 3 trường hợp sau đây.

Tritờng hợp 1: Có đúng 1 thứ phẩm.

Trường hợp này có  cách lấy, như đã tính ở trên.

Trương hợp 2: Có đúng 2 thứ phẩm.

Trường hợp này có  cách lấy.

Trương hơp 3: Có đúng 3 thứ phẩm.

Trường hợp này có  cách lấy.

Áp dụng quy tắc cộng, số cách lấy 3 sản phẩm có ít nhất 1 thứ phẩm là



**Cách khác:** Có thể giải bài toán bằng cách tìm phần bù. Số cách lấy 3 sản phẩm đều là chính phẩm là . Từ đó, số cách lấy 3 sản phẩm trong đó có ít nhất một thứ phẩm là  (cách).

**Bài 5.** Từ các chữ số  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên:

a) Có bốn chữ số khác nhau?

b) Có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 5 ?

c) Có bốn chữ số khác nhau và lớn hơn 4500 ?

**Lời giải**

a) Để lập số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau từ 6 chữ số đã cho, ta chọn 4 trong 6 chữ số đó và sắp xếp theo một thứ tự. Do đó, có thể coi mỗi số đó là một chỉnh hợp chập 4 của 6 chữ số đó. Do đó, có  số như vậy.

b) Để số lập được chia hết cho 5 , chữ số tận cùng của nó phải chia hết cho 5 . Vậy chữ số tận cùng là 5. Có  cách chọn 3 trong 5 chữ số còn lại để viết các chữ số còn lại. Một số chia hết cho 5 thì .

c) Kí hiệu  là số tự nhiên có bốn chữ số thoả mãn yêu cầu. Vì  nên 

Trương hợp 1: . Khi đó, để  điều kiện cần và đủ là . Có hai cách chọn chữ số  (5 hoặc 6). Có  cách chọn hai chữ số còn lại.

Do đó, trường hợp này có  số thoả mãn yêu cầu.

Trường hơp 2: . Khi đó, đương nhiên . Có hai cách chọn chữ số  (5 hoặc 6). Có  cách chọn ba chữ số còn lại.

Do đó, trường hợp này có  số thoả mãn yêu cầu. Áp dụng quy tắc cộng, có  số tự nhiên thoả mãn yêu cầu.

**C. BÀI TẬP**

1. Sau khi biên soạn 9 câu hỏi trắc nghiệm, cô giáo có thể tạo ra bao nhiêu đề kiểm tra khác nhau bằng cách đảo thứ tự các câu hỏi đó.

2. Cô giáo đã biên soạn 10 câu hỏi trắc nghiệm. Từ 10 câu hỏi này, cô giáo chọn ra 6 câu hỏi và sắp xếp theo thứ tự để tạo nên một đề trắc nghiệm. Cô giáo có thể tạo bao nhiêu đề kiểm tra trắc nghiệm khác nhau?

3. Một giải đấu có 4 đội bóng  và  tham gia. Các đội đấu vòng tròn một lượt để tính điểm và xếp hạng.

a) Có tất cả bao nhiêu trận đấu?

b) Có tất cả bao nhiêu khả năng có thể xảy ra về đội vô địch và á quân?

c) Có bao nhiêu khả năng về bảng xếp hạng sau khi giải đấu kết thúc? Biết rằng không có hai đội nào đồng hạng.

4. Cho 7 điểm trong mặt phẳng.

a) Có bao nhiêu đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là 2 trong 7 điểm đã cho?

b) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu và điểm cuối là 2 trong 7 điểm đã cho?

5. Chọn 4 trong 6 giống hoa khác nhau và trồng trên 4 mảnh đất khác nhau để thử nghiệm. Có bao nhiêu cách thực hiện khác nhau?

6. Một tổ công nhân 9 người làm vệ sinh cho một toà nhà lớn. Cần phân công 3 người lau cửa sổ, 4 người lau sàn và 2 người lau cầu thang. Tổ có bao nhiêu cách phân công?

7. Chọn  trong số  học sinh nam và  học sinh nữ tham gia một cuộc thi.

a) Nếu chọn  nam và  nữ thì có bao nhiêu cách chọn?

b) Nếu trong số học sinh được chọn nhất thiết phải có học sinh nam A và học sinh nữ  thì có bao nhiêu cách chọn?

c) Nếu phải có ít nhất một trong hai học sinh  và  được chọn, thì có bao nhiêu cách chọn?

d) Nếu trong  học sinh được chọn phải có cả học sinh nam và học sinh nữ thì có bao nhiêu cách chọn?

8. Lấy hai số bất kì từ  và lấy hai số bất kì từ , đề lập các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau.

a) Lập được bao nhiêu số như vậy?

b) Trong số đó, có bao nhiêu số có chữ số hàng nghìn và hàng đơn vị là chữ số lẻ?

9. Cần sắp xếp thứ tự  tiết mục văn nghệ cho buổi biểu diễn văn nghệ của trường. Ban tổ chức dự kiến xếp  tiết mục ca nhạc ở vị trí thứ , thứ , thứ  và thứ  tiết mục múa ở vị trí thứ  và thứ  tiết mục hài ở vị trí thứ  và thứ . Có bao nhiêu cách xếp khác nhau?