|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **TỈNH QUẢNG NAM** | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT ĐỢT 2**  **NĂM HỌC 2022 - 2023** |
| |  | | --- | | **HDC CHÍNH THỨC** | | **HƯỚNG DẪN CHẤM**  **MÔN: TOÁN LỚP 11 (CHUYÊN)** |

*(Bản hướng dẫn này gồm 07 trang)*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **TT** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 1 (3,0)** *Giải hệ phương trình sau: .* | | **3,0** |
|  | Điều kiện: | 0,25 |
|  | 0,5 |
| . | 0,25 |
| Thay  vào phương trình còn lại ta được:  (\*). | 0,25 |
| - Với  thỏa phương trình (\*).  Suy ra  là một nghiệm của hệ phương trình. | 0,25 |
| - Với , ta có: | 0,5 |
|  | 0,25 |
|  | 0,25 |
| (vì ).  Suy ra  là một nghiệm của hệ phương trình. | 0,25 |
| Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm: , . | 0,25 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **TT** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 2. (3,0 điểm)** *Cho dãy số  thỏa mãn :.*  *Chứng minh và tìm giới hạn (nếu có) của dãy số .* | | **3,0** |
|  | - Xét , .  đồng biến trên đoạn . | 0,5 |
| Chứng minh bằng phương pháp quy nạp được | 0,5 |
| - Xét , . | 0,25 |
| + Xét  Suy ra  hay . | 0,5 |
| Chứng minh bằng phương pháp quy nạp được dãy số tăng. | 0,25 |
| Dãy số tăng và bị chặn trên () nên dãy số có giới hạn và giới hạn đó là nghiệm của phương trình  hay . | 0,5 |
| Lại có,  nghịch biến trên đoạn và  nên  là nghiệm duy nhất của .  Vậy | 0,5 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **TT** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 3. (3,0 điểm)** *Cho đa thức  với hệ số thực, thỏa mãn:*    *Chứng minh  không phải là đa thức bậc lẻ và tìm .* | | **3,0** |
|  | + Xét  (C là hằng số), từ đẳng thức đã cho suy ra C = 0 hoặc C =1. | 0,25 |
| + Xét  có bậc lớn hơn 0: Nếu  là một nghiệm của  thì  cũng là một nghiệm của . Bằng quy nạp, nếu  là một nghiệm của  thì  cũng là một nghiệm của . Vì  nên phương trình  có vô số nghiệm, điều này vô lý. Vậy phương trình  vô nghiệm. Suy ra  là đa thức bậc chẵn. | 0,75 |
| Gọi  là hệ số của lũy thừa của  có số mũ cao nhất trong  , từ đẳng thức đã cho suy ra . | 0,25 |
| + Xét , thế vào đẳng thức đã cho và biến đổi ta được:  .  Đồng nhất hệ số ta được . Do đó  thỏa mãn. | 0,5 |
| + Xét , ta có:  ,    Do đó  thỏa mãn. | 0,5 |
| + Xét , với Q(*x*) là đa thức bậc *m* (*m* < 2*n*) và , từ đẳng thức đã cho ta có:    (\*)  Vế trái của (\*) là đa thức bậc 2*n* + *m*, vế phải của (\*) là đa thức bậc bé hơn hoặc bằng 2*m*, điều này vô lý (vì *m* < 2*n*). Do đó và . | 0,5 |
| Vậy, tất cả các đa thức cần tìm là: , với *n* là số tự nhiên. | 0,25 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **TT** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 4. (3,0 điểm)**  a) *Tìm tất cả các cặp số nguyên  thỏa mãn .* | | **1,5** |
|  | Ta có | 0,25 |
| Khi đó, ta có: . | 0,25 |
| - Nếu  ta có .  Lại có:    (không thỏa).  Vậy  (1). | 0,5 |
| - Nếu :  thỏa mãn phương trình khi:    cũng thỏa mãn phương trình. | 0,25 |
| Theo trên, suy ra  (2).  Từ (1) và (2) suy ra (thỏa mãn).  Vậy  là cặp số thỏa yêu cầu. | 0.25 |
| *b) Chứng minh rằng nếu  là số nguyên tố có dạng  thì không tồn tại  số tự nhiên liên tiếp sao cho có thể phân chia tập hợp các số đó thành hai tập hợp con rời nhau để tích tất cả các số thuộc tập hợp này bằng tích tất cả các số thuộc tập hợp kia.* | | **1,5** |
|  | Giả sử với số nguyên tố , tồn tại số tự nhiên liên tiếp mà ta có thể chia tập hợp các số này thành hai tập hợp con sao cho tích tất các số thuộc mỗi tập hợp đều bằng  Khi đó, ta có: . | 0,25 |
| Chia các số:  cho  ta được các số dư đôi một khác nhau.  Nếu trong dãy số  (\*) có số chia hết cho , thì theo giả thiết phản chứng ắt phải có số thứ hai trong dãy (\*) chia hết cho, điều này vô lí (các số dư khi chia các số trong dãy (\*) cho  đôi một khác nhau).  Do đó, tập hợp các số dư có thể là . | 0,25 |
| . | 0,25 |
| Mà  (Định lí Wilson) nên | 0,25 |
| . | 0,25 |
| Lại có (Định lí Fermat) nên  (Vô lí).  Suy ra điều phải chứng minh. | 0,25 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **TT** | | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 5. (5,0 điểm)**  a) *Cho tam giác nhọn* ABC *(*AB *>* AC*). Đường tròn* (O) *đường kính* BC *cắt* AB*,* AC *lần lượt tại* F*,* E*. Gọi* H *là giao điểm của* BE *và* C*F, đường thẳng* AH *cắt đường thẳng* BC *tại* D*, đường thẳng* EF *cắt đường thẳng* BC *tại* K*. Đường thẳng qua* D *song song với* EF *cắt hai đường thẳng* AB*,* AC *lần lượt tại* M*,* N*. Chứng minh bốn điểm* M*,* O*,* N*,* K *cùng nằm trên một đường tròn.* | | | **3,0** |
|  |  | | 0,25 |
| + Tứ giác BFHD nội tiếp đường tròn nên .  Mà  nên . | | 0,25 |
| Hơn nữa  nên . Suy ra tứ giác OFED nội tiếp đường tròn. | | 0,5 |
| Suy ra . Do đó hai tam giác ODF và OFK đồng dạng, nên  . | | 0,5 |
| Ta có  và  Suy ra hai tam giác DNC và DBM đồng dạng  . | | 0,5 |
| Ta có | | 0,5 |
| Suy ra .  Hơn nữa  nên hai tam giác DMO và DKN đồng dạng  . Vậy bốn điểm M, O, N, K cùng nằm trên một đường tròn. | | 0,5 |

**\* Cách khác:** Xét tứ giác toàn phần AEHFCB có (BCDK) = -1.

Vì O là trung điểm của BC nên theo hệ thức Macloranh, ta có:  (1).

Mặc khác, ta có: (đồng vị),  (đồng vị). Suy ra 

Do đó, tứ giác MBNC nội tiếp trong đường tròn. Suy ra  (2).

Từ (1) và (2) suy ra. Do đó tứ giác MONK nội tiếp đường tròn.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **TT** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 5. (5,0 điểm)**  b) *Cho tam giác* ABC *cân tại* B*, . Ba điểm* D*,* E*,* F *lần lượt thay đổi trên ba cạnh* AB*,* BC*,* AC *sao cho . Gọi  lần lượt là chu vi của , . Chứng minh .* | | **2,0** |
|  | C:\Users\MyPC\Desktop\ScreenHunter\ScreenHunter 296.png |  |
| Đặt , khi đó .  . | 0,5 |
| Hơn nữa,  nên hai tam giác BFD và EFB đồng dạng  .  Lại có: . | 0,75 |
| .  (1). | 0,25 |
| (2).  (M là trung điểm của AC) | 0,25 |
| Từ (1) và (2) suy ra .  Dấu bằng xảy ra khi F là trung điểm của BC, khi đó FD = FE. | 0,25 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **TT** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 6. (3,0 điểm)**  *Tô màu tất cả các đỉnh của một đa giác lồi 10 đỉnh bằng hai màu xanh và đỏ (mỗi đỉnh một màu). Hỏi có bao nhiêu cách tô màu sao cho không có hai đỉnh liền kề nào của đa giác đó cùng màu đỏ?* | | **3,0** |
|  | *C:\Users\MyPC\Desktop\ScreenHunter\ScreenHunter 177.png* |  |
| *Nhận xét:* Nếu có nhiều hơn 5 đỉnh cùng màu đỏ thì sẽ có hai đỉnh màu đỏ liền kề. | 0,25 |
| **- TH1:** *Có nhiều nhất một đỉnh màu đỏ*  + Không có đỉnh nào màu đỏ có 1 cách (tất cả màu xanh).  + Có đúng một đỉnh màu đỏ có 10 cách.  Suy ra TH1 có: 1 + 10 = 11 cách. | 0,25 |
| **- TH2:** *Có đúng hai đỉnh màu đỏ, nhưng hai đỉnh màu đỏ không liền kề*  TH này có:  cách. | 0,25 |
| **- TH3:** *Có đúng ba đỉnh màu đỏ, nhưng không có hai đỉnh màu đỏ liền kề*  + 3 đỉnh màu đỏ liền kề có 10 cách.  + 3 đỉnh màu đỏ, mà có đúng 2 đỉnh màu đỏ liền kề có:  cách.  Suy ra TH3 có:  cách. | 0,5 |
| **- TH4:** *Có đúng bốn đỉnh màu đỏ, nhưng không có hai đỉnh màu đỏ liền kề*  + 4 đỉnh màu đỏ liền kề có 10 cách.  + 4 đỉnh màu đỏ, mà có đúng 3 đỉnh màu đỏ liền kề có:  cách.  + 4 đỉnh màu đỏ, mà có đúng 2 đỉnh màu đỏ liền kề có:  cách.  + 4 đỉnh màu đỏ, mà có 2 cặp đỉnh màu đỏ liền kề, nhưng hai cặp này không liền kề nhau có:  cách.  Suy ra TH4 có:  cách. | 1,25 |
| **- TH5:** *Có đúng năm đỉnh màu đỏ, nhưng không có hai đỉnh màu đỏ liền kề*  TH này có 2 cách (5 đỏ xen kẽ 5 xanh).  Vậy số cách tô màu thỏa đề là:  cách. | 0,5 |

**---------- HẾT----------**

***\* Lưu ý:*** *Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong HDC nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.*