SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NAM

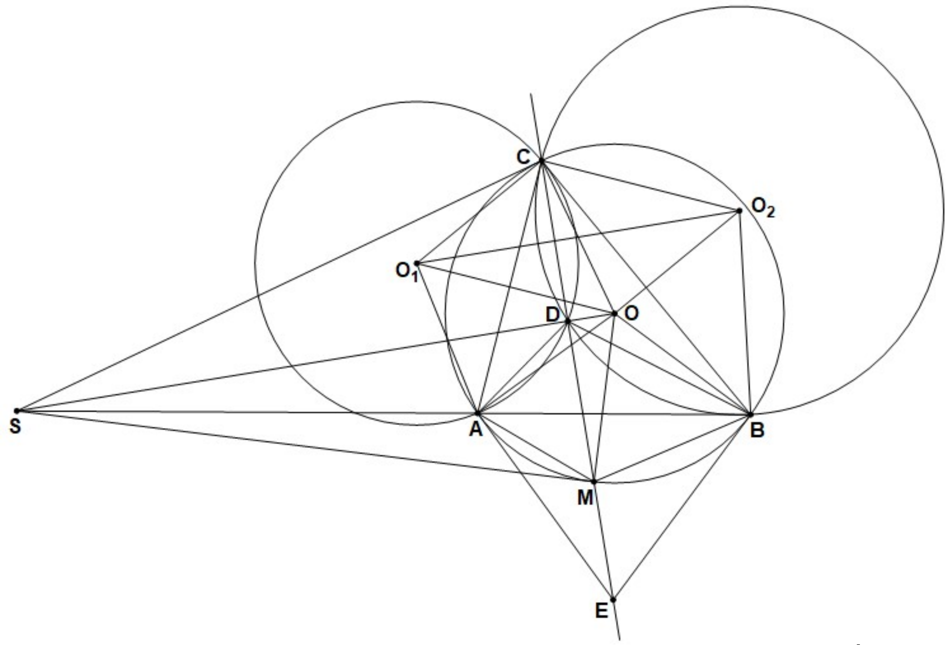
KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT ĐỢT 1
NĂM HỌC 2022 – 2023

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN
Môn: TOÁN
(Hướng dẫn chấm này gồm có 08 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (3,0đ)	*Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2-y^2+x+y=\sqrt{y-1}-\sqrt{x} \\ 2x^2-11y+32=3.\sqrt[3]{4y-8} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.	
	Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 1 \end{cases}$	0,25
	- Xét phương trình thứ nhất của hệ: $x^2-y^2+x+y=\sqrt{y-1}-\sqrt{x} \Leftrightarrow (x+y)(x-y+1)+(\sqrt{x}-\sqrt{y-1})=0$ (*)	0,25
	* Khi $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ không thỏa phương trình thứ hai.	0,25
	* Khi $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}>0$: Phương trình (*) tương đương với phương trình: $(x+y)(x-y+1)+\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y-1})(\sqrt{x}+\sqrt{y-1})}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}=0$ $\Leftrightarrow (x-y+1)\left(x+y+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}\right)=0\,(**)$	0,25
	Để ý rằng $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 1 \end{cases} \Rightarrow x+y+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-1}}>0$ (với $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}>0$) Vì thế phương trình (**) tương đương với phương trình: $x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1$	0,25
	Thay $y=x+1$ vào phương trình thứ hai ta được : $2x^2-11x+21=3.\sqrt[3]{4x-4}$ (1) $\Leftrightarrow 3.(\sqrt[3]{4x-4}-2)-(2x-5)(x-3)=0$ $\Leftrightarrow 3.\dfrac{(\sqrt[3]{4x-4})^3-2^3}{(\sqrt[3]{4x-4})^2+2.\sqrt[3]{4x-4}+2^2}-(2x-5)(x-3)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \dfrac{12}{(\sqrt[3]{4x-4})^2+2.\sqrt[3]{4x-4}+4}=2x-5 \end{array}\right.$	0,25
	- Xét phương trình: $\dfrac{12}{(\sqrt[3]{4x-4})^2+2.\sqrt[3]{4x-4}+4}=2x-5\,(\text{I})$ Đặt $t=\sqrt[3]{4x-4}$. Khi đó phương trình (I) trở thành: $\dfrac{12}{t^2+2t+4}=\dfrac{1}{2}t^3-3$ (II) Từ phương trình (I) suy ra $2x-5>0 \Rightarrow x>\dfrac{5}{2} \Rightarrow t=\sqrt[3]{4x-4}>\sqrt[3]{6}$.	0,25 0,25
	Xét $f(t)=\dfrac{12}{t^2+2t+4}$ với $t>\sqrt[3]{6}$, $f'(t)=\dfrac{-12(t^2+2t+2)'}{(t^2+2t+4)^2}=\dfrac{-24(t+1)}{(t^2+2t+4)^2}<0, \forall t>\sqrt[3]{6}$ Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $\left(\sqrt[3]{6};+\infty\right)$.	0,25

	Xét $g(t)=\frac{1}{2}t^3-3,\ g'(t)=\frac{3}{2}t^2>0,\ \forall t>\sqrt[3]{6}$. Suy ra $g(t)$ đồng biến trên $\left(\sqrt[3]{6};+\infty\right)$.	0,25
	Mà $f(2)=g(2)$. Do đó pt (II) có nghiệm duy nhất $t=2$.	0,25
	+ Với $t=2\Rightarrow x=3,\ y=4$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $(x;y)=(3;4)$.	0,25
Câu 2 (2,0đ)	*Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:* $\begin{cases} u_1=2023 \\ u_{n+1}=\dfrac{2022u_n^3+2022u_n}{2022u_n^2-u_n+2022},\ \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$. *Tính* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{u_i^2}{1+u_i^2}$.	
	- Nhận xét: $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.	0,25
	$u_{n+1}=\dfrac{2022u_n^3+2022u_n}{2022u_n^2-u_n+2022}\Leftrightarrow 2022u_{n+1}u_n^2-u_n.u_{n+1}+2022u_{n+1}=2022u_n(1+u_n^2)$ $\Leftrightarrow 2022u_{n+1}(1+u_n^2)-u_n.u_{n+1}=2022u_n(1+u_n^2)$ (*) + Chia hai vế của (*) cho: $u_n.u_{n+1}(1+u_n^2)$ ta được: $2022.\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{1+u_n^2}=2022.\dfrac{1}{u_{n+1}}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{1+u_n^2}=2022\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\right)$ $\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{1+u_n^2}=2022\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\right)+1\Leftrightarrow\dfrac{u_n^2}{1+u_n^2}=2022\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\right)+1$	0,5
	Mà $\dfrac{u_n^2}{1+u_n^2}<1\Rightarrow 2022\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\right)+1<1\Rightarrow\dfrac{1}{u_{n+1}}<\dfrac{1}{u_n}$. Do đó dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ giảm và bị chặn dưới bởi số 0. Suy ra dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ có giới hạn.	0,25
	Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n}=a$. Mặt khác $\dfrac{u_n^2}{1+u_n^2}=2022\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\right)+1\Leftrightarrow\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{u_n}\right)^2}=2022\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\right)+1$ $\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{u_n}\right)^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2022\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\right)+1\right]\Rightarrow\dfrac{1}{1+a^2}=2022(a-a)+1\Rightarrow a=0.$	0,25
	Lại có: $\dfrac{u_i^2}{1+u_i^2}=2022\left(\dfrac{1}{u_{i+1}}-\dfrac{1}{u_i}\right)+1$. Cho *i* chạy từ 1 đến *n*, ta có: $\dfrac{u_1^2}{1+u_1^2}=2022\left(\dfrac{1}{u_2}-\dfrac{1}{u_1}\right)+1$ $\dfrac{u_2^2}{1+u_2^2}=2022\left(\dfrac{1}{u_3}-\dfrac{1}{u_2}\right)+1$ $\dfrac{u_3^2}{1+u_3^2}=2022\left(\dfrac{1}{u_4}-\dfrac{1}{u_3}\right)+1$ ………………………..	0,25

	$\dfrac{u_n^2}{1+u_n^2}=2022\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\right)+1$		
	Cộng vế theo vế các đẳng thức trên suy ra: $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{u_i^2}{1+u_i^2}=2022\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_1}\right)+n$ $\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{u_i^2}{1+u_i^2}=2022\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{2023}\right)+n\Rightarrow\dfrac{1}{2n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{u_i^2}{1+u_i^2}=\dfrac{2022}{2n+1}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{2023}\right)+\dfrac{n}{2n+1}$		0,25
	$\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{u_i^2}{1+u_i}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{2022}{2n+1}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{2023}\right)+\dfrac{n}{2n+1}\right]$ $\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{u_i^2}{1+u_i}=0\left(0-\dfrac{1}{2023}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.		0,25
	*** Cách khác:** Nhận xét: $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.	0,25	
	Suy ra $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2022u_n^3+2022u_n}{2022u_n^2-u_n+2022}-u_n=\dfrac{u_n^2}{2022u_n^2-u_n+2022}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\Rightarrow u_{n+1}>u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Do đó dãy (u_n) là dãy tăng.	0,25	
	Giả sử (u_n) bị chặn trên . Suy ra tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a\geq 2023$ (do $u_n\geq u_1=2023,\forall n\in\mathbb{N}^*$). Từ $u_{n+1}=\dfrac{2022u_n^3+2022u_n}{2022u_n^2-u_n+2022}$ suy ra $a=\dfrac{2022a^3+2022a}{2022a^2-a+2022}$ $\Leftrightarrow -a^2=0\Leftrightarrow a=0$ (vô lý). Điều này chứng tỏ (u_n) không bị chặn trên. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.	0,5	
	Đặt $v_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{u_i^2}{1+u_i^2}$ và $x_n=2n+1,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Ta có dãy (x_n) tăng và không bị chặn trên. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_{n+1}-v_n}{x_{n+1}-x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n+1}\dfrac{u_i^2}{1+u_i^2}-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{u_i^2}{1+u_i^2}}{2(n+1)+1-(2n+1)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{u_{n+1}^2}{1+u_{n+1}^2}}{2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{u_{n+1}^2}+1}=\dfrac{1}{2}$.	0,5	
	Theo định lý **Stolz**, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{u_i^2}{1+u_i^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_{n+1}-v_n}{x_{n+1}-x_n}=\dfrac{1}{2}$.	0,25	
	Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{u_i^2}{1+u_i^2}=\dfrac{1}{2}$.	0,25	

Câu 3 **(5,0đ)**	*Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm trên đường tròn (O) sao cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Xét một điểm C trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC không cân tại C. Gọi (O_1) là đường tròn đi qua A và tiếp xúc với BC tại C; (O_2) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại C. Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại điểm thứ hai là D (D khác C).* *a) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt đường thẳng OD tại S. Chứng minh OA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADS.* *b) Chứng minh đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định khi điểm C di động trên đường tròn (O) (tam giác ABC không cân tại C).*	
a **(1,5đ)**	 *Hình vẽ phục vụ câu a:* ***0,25*** *(Học sinh không vẽ hình – không chấm)*	
	$O_1C \perp CB, OO_2 \perp CB \Rightarrow O_1C\,//\,OO_2$ Tương tự $O_2C\,//\,OO_1$. Suy ra tứ giác OO_1CO_2 là hình bình hành. Do đó O_1O_2 đi qua trung điểm của OC.	0,5
	Mà O_1O_2 đi qua trung điểm của CD nên O_1O_2 // OD. Mà $O_1O_2 \perp CD$ nên $\widehat{ODC} = 90^0$.	0,5
	Suy ra $OD.OS = OC^2 = OA^2$. Suy ra OA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADS.	0,25
b **(3,5đ)**	$\widehat{ADC} = \frac{1}{2}\left(2\pi - \widehat{AO_1C}\right) \Leftrightarrow \widehat{ADC} + \frac{1}{2}\widehat{AO_1C} = \pi \Rightarrow (DA, DC) \equiv \frac{1}{2}(O_1A, O_1C)(\text{mod}\,\pi)$ Tương tự $(DC, DB) \equiv \frac{1}{2}(O_2C, O_2B)(\text{mod}\,\pi)$	**0,5**
	$(\widehat{ACB} + \widehat{ACO_1}) + (\widehat{ACB} + \widehat{BCO_2}) = 90^0 + 90^0 \Rightarrow 2\widehat{ACB} = 180^0 - \widehat{ACO_1} - \widehat{BCO_2}$ $\Rightarrow 2\widehat{ACB} = 180^0 - \left(\frac{180^0 - \widehat{AO_1C}}{2}\right) - \left(\frac{180^0 - \widehat{CO_2B}}{2}\right) \Rightarrow \widehat{AO_1C} + \widehat{CO_2B} = 4\widehat{ACB}$ $\Rightarrow (O_1A, O_1C) + (O_2C, O_2B) \equiv 4(CA, CB)(\text{mod}\,\pi)$	**0,5**
	Do đó: $(DA, DB) \equiv (DA, DC) + (DC, DB) \equiv \frac{(O_1A, O_1C) + (O_2C, O_2B)}{2} \equiv 2(CA, CB) \equiv (OA, OB)(\text{mod}\,\pi)$ Suy ra 4 điểm A, D, O, B cùng nằm trên một đường tròn.	**0,5**

	*** Cách khác:** Gọi *M* là giao điểm của tia *CD* và đường tròn *(O).* $\widehat{ADM}=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{AC}=\widehat{ACB}$, $\widehat{BDM}=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{BC}=\widehat{ACB}$ *(Đúng một trong hai ý được 0,5)*	**0,75**	
	Suy ra $\widehat{ADB}=\widehat{ADM}+\widehat{MDB}=2\widehat{ACB}$	**0,25**	
	Mà $\widehat{AOB}=2\widehat{ACB}$ nên $\widehat{ADB}=\widehat{AOB}$	**0,25**	
	Suy ra 4 điểm *A*, *D*, *O*, *B* cùng nằm trên một đường tròn.	**0,25**	
	+ Ta thấy *OD*, *AB*, tiếp tuyến của (*O*) tại C là các trục đẳng phương của từng cặp đường tròn (*ADOB*) và (*COD*), (*O*) và (*ADOB*), (*O*) và (*COD*). Do đó 3 đường trên đồng quy tại *S*.		0,75
	+ Đường đối cực của *S* đối với (*O*) đi qua *C* và vuông góc với *OD* nên *CD* là đường đối cực của *S* đối với (*O*). Mà *AB* đi qua cực *S* của *CD* đối với (*O*) nên *CD* đi qua cực *E* của *AB* đối với (*O*).		**0,5** **0,5**
	Hơn nữa *A, B* và (O) cố định nên *E* cố định. Vậy *CD* đi qua *E* cố định.		**0,25**
	*** Lưu ý:** Ta có $SO\perp MC$ nên *SM* là tiếp tuyến của đường tròn (*O*). Mà *S* nằm trên đường chéo *AB* nên tứ giác *AMBC* là tứ giác điều hòa.	**0,5**	
	Suy ra giao điểm *E* của hai tiếp tuyến của đường tròn (*O*) tại *A* và *B* nằm trên đường chéo *CM*.	**0,5**	
	Hơn nữa *A, B* và (O) cố định nên *E* cố định. Vậy *CD* đi qua *E* cố định.	**0,25**	
Câu 4 (2,0đ)	*a) Cho k là số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh $2^{k-1}+1$ không chia hết cho k.* *b) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p và q thỏa mãn 2^p+2^q chia hết cho $p.q$.*		
	Giả sử $2^{k-1}+1\,\vdots\,k$. Suy ra k là số tự nhiên lẻ. Khi đó k có dạng $k=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}...p_r^{\alpha_r}$, với $p_1,p_2,p_3,...,p_r$ là các số nguyên tố lẻ, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_r$ là các số nguyên dương và $r\geq 1$.		0,25
a (1,0đ)	+ Do p_i là số nguyên tố lẻ nên $p_i-1=2^{m_i}.t_i$ (t_i là số tự nhiên lẻ ; $i=1,2,3,...,r$). Không mất tính tổng quát, gọi m_1 là số nhỏ nhất trong các dãy $m_1,m_2,m_3,...,m_r$. Ta có $p_i-1=2^{m_i}.t_i\,\vdots\,2^{m_i}\Rightarrow p_i-1\equiv 0(\text{mod}\,2^{m_i})\Rightarrow p_i\equiv 1(\text{mod}\,2^{m_i})$ $\Rightarrow p_i^{\alpha_i}\equiv 1(\text{mod}\,2^{m_i})$.		0,25
	Mà $k=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}...p_r^{\alpha_r}$ nên $k-1=2^{m_1}.u$ (với *u* số nguyên dương). Lại có $2^{k-1}+1\,\vdots\,k\Rightarrow 2^{k-1}\equiv -1(\text{mod}\,k)$. Do đó $2^{2^{m_1}.u}\equiv -1(\text{mod}\,k)$.		0,25
	Hơn nữa $p_1-1=2^{m_1}.t_1$ và t_1 lẻ nên $2^{(p_1-1)u}=\left(2^{2^{m_1}.u}\right)^{t_1}\equiv -1(\text{mod}\,k)\Rightarrow 2^{(p_1-1)u}\equiv -1(\text{mod}\,p_1)$ (*) Mà $2^{p_1-1}\equiv 1(\text{mod}\,p_1)\Rightarrow 2^{(p_1-1)u}\equiv 1(\text{mod}\,p_1)$ (mâu thuẫn với (*)). Vậy $2^{k-1}+1$ không chia hết cho k.		0,25
b (1,0đ)	Khi 2^p+2^q chia hết cho $p.q$, có 3 trường hợp xảy ra : **- TH1:** *p*, *q* là các số nguyên tố lẻ. Vì 2^p+2^q chia hết cho $p.q$ nên $2^p+2^q\equiv 0(\text{mod}\,p.q)\Rightarrow 2^p+2^q\equiv 0(\text{mod}\,p)$. Lại có $2^p\equiv 2(\text{mod}\,p)\Rightarrow 2^q\equiv -2(\text{mod}\,p)$ $\Rightarrow 2^{pq}\equiv(-2)^p\,(\text{mod}\,p)\Rightarrow 2^{pq}\equiv -2(\text{mod}\,p)$		0,25

	Tương tự ta chứng minh được $2^{pq} \equiv -2 \pmod{q}$. Mà p, q là các số nguyên tố nên $2^{pq} \equiv -2 \pmod{pq} \Rightarrow 2^{pq-1} \equiv -1 \pmod{pq}$ (Mâu thuẫn ở câu a).		0,25
	- TH2: $p=2,\ q>2$. $2^p+2^q \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow 4+2^q \equiv 0 \pmod{q}$ mà $2^q-2 \equiv 0 \pmod{q}$. Suy ra $6 \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow q=3$.		0,25
	- TH3: $p=q=2$. Khi đó $2^2+2^2=8 \equiv 0 \pmod{4}$ Vậy, các cặp số cần tìm là $(p;q)=(2;2),\ (p;q)=(2;3),\ (p;q)=(3;2)$.		0,25
	*** Cách khác:** $2^p+2^q \,\vdots\, pq \Rightarrow 2^p+2^q \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (2^p-p)+(2^q+p) \equiv 0 \pmod{p}$ Mà $2^p-p \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 2^q+p \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 2^q \equiv 0 \pmod{p}$	**0,25**	
	Tương tự $2^p \equiv 0 \pmod{q}$. Mà $(p,q)=1$ nên $2^p.2^q \equiv 0 \pmod{pq} \Rightarrow 2^{p+q} \,\vdots\, pq$ Suy ra pq là số chẵn. Khi đó, xảy ra 2 trường hợp:	**0,25**	
	- TH1: Trong hai số p, q, có đúng một số bằng 2. Khi $p=2$, ta có: $2^p+2^q \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow 4+2^q \equiv 0 \pmod{q}$ mà $2^q-2 \equiv 0 \pmod{q}$. Suy ra $6 \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow q=3$. Tương tự $q=2$. Suy ra $p=3$	**0,25**	
	- TH2: $p=q=2$. Khi đó $2^2+2^2=8 \equiv 0 \pmod{4}$ (thỏa) Vậy, các cặp số cần tìm là $(p;q)=(2;2),\ (p;q)=(2;3),\ (p;q)=(3;2)$.	**0,25**	
Câu 5 (3,0đ)	*Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn* $xf(y)-yf(x)=f\left(\frac{y}{x}\right)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ *và* $x\neq 0$.		
	Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán. - Cho $x=2, y=0 \Rightarrow f(0)=0$. - Cho $x=1, y=1 \Rightarrow f(1)=0$. - Cho $x=-1, y=1 \Rightarrow f(-1)=0$.		0,5
	- Với $x=a\,(a\neq 0), y=1$ ta có: $af(1)-f(a)=f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(\frac{1}{a})=-f(a), \forall a\neq 0$.		0,5
	- Xét $a,b\notin\{-1;0;1\}$ + Với $(x;y)=(\frac{1}{a};b)$ ta có: $\frac{1}{a}f(b)-bf(\frac{1}{a})=f(ab)$ + Với $(x;y)=(\frac{1}{b};a)$ ta có: $\frac{1}{b}f(a)-af(\frac{1}{b})=f(ab)$		0,5
	Suy ra: $\frac{1}{a}f(b)-bf(\frac{1}{a})=\frac{1}{b}f(a)-af(\frac{1}{b}) \Leftrightarrow \frac{1}{a}f(b)-b\left[-f(a)\right]=\frac{1}{b}f(a)-a\left[-f(b)\right]$ $\Leftrightarrow \dfrac{f(a)}{a-\frac{1}{a}}=\dfrac{f(b)}{b-\frac{1}{b}}$		0,5
	$\Rightarrow f(x)=c\left(x-\frac{1}{x}\right)$, với $c\in\mathbb{R}$ (thỏa: $f(-1)=0, f(1)=0$).		0,25

	- Thử lại: Với $x, y \neq 0$, $f(x)=c\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ thay vào $xf\left(y\right)-yf\left(x\right)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ta được : $xc\left(y-\dfrac{1}{y}\right)-yc\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=c\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}\right)$ (luôn đúng với mọi c). *(Phải có phép thử lại)*	0,5
	Vậy hàm số cần tìm là: $f(x)=c\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$, với $x\neq 0$, c là hằng số, $f(0)=0$.	0,25
Câu 6 (2,0đ)	*Cho tập hợp X có 2023 phần tử. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn hai tập hợp con khác nhau của X sao cho giao của hai tập hợp này là một tập hợp có đúng một phần tử?*	
	Giả sử giao của hai tập hợp thỏa yêu cầu là tập hợp $\{a\}$. Ta đếm số cách chọn hai tập hợp *A*, *B* con của $X\setminus\{a\}$ và không giao nhau. Có hai trường hợp xảy ra : **- TH1:** Hai tập hợp *A*, *B* đều khác tập rỗng. Giả sử *A* có k phần tử $(1\le k\le 2021)$. Khi đó *B* là tập hợp con (khác rỗng) của tập hợp có $2022-k$ phần tử. - Ứng với mỗi giá trị k, có C_{2022}^{k} cách chọn tập hợp *A* và có $2^{2022-k}-1$ cách chọn tập hợp *B* (bỏ tập rỗng). Do đó, với mỗi giá trị k, có $(2^{2022-k}-1)C_{2022}^{k}$ cặp tập hợp *A*, *B*.	0,5
	- Cho $k=1,2,3,...,2021$, suy ra số cách chọn hai tập hợp là: $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{2021}(2^{2022-k}-1)C_{2022}^{k}$ (Do mỗi cặp *A*, *B* được tính hai lần).	0,25
	Ta có $\sum\limits_{k=1}^{2021}(2^{2022-k}-1)C_{2022}^{k}=\sum\limits_{k=1}^{2021}2^{2022-k}C_{2022}^{k}-\sum\limits_{k=1}^{2021}C_{2022}^{k}$ Từ $(1+x)^{2022}=C_{2022}^{0}+C_{2022}^{1}x+C_{2022}^{2}x^2+C_{2022}^{3}x^3+...+C_{2022}^{2022}x^{2022}$ suy ra: $2^{2021}C_{2022}^{1}+2^{2020}C_{2022}^{2}+2^{1999}C_{2022}^{3}+....+2^{1}C_{2022}^{2021}=3^{2022}-2^{2022}-1$; $C_{2022}^{1}+C_{2022}^{2}+C_{2022}^{3}+...+C_{2022}^{2021}=2^{2022}-2$	0,25
	Số cách chọn hai tập hợp *A*, *B* (không tính thứ tự) là $\dfrac{1}{2}\left[(3^{2022}-2^{2022}-1)-(2^{2022}-2)\right]=\dfrac{1}{2}(3^{2022}-2^{2023}+1)$.	0,25
	- TH2: Một trong hai tập hợp *A*, *B* có một tập bằng rỗng. Giả sử $A=\varnothing$, tập hợp B là tập hợp con khác rỗng của $X\setminus\{a\}$. Trường hợp này có $2^{2022}-1$ cách chọn tập hợp B.	0,25
	Từ hai trường hợp trên suy ra số cách chọn hai tập hợp con khác nhau (không chứa a) giao nhau bằng rỗng là $\dfrac{1}{2}(3^{2022}-2^{2023}+1)+(2^{2022}-1)$.	0,25
	Với mỗi cách chọn hai tập hợp trên, ta thêm phần tử a vào mỗi tập hợp để được hai tập hợp thỏa đề. Vậy số cách chọn hai tập hợp thỏa đề là $2023\left[\dfrac{1}{2}(3^{2022}-2^{2023}+1)+(2^{2022}-1)\right]=\dfrac{2023\left(3^{2022}-1\right)}{2}$.	0,25

Câu 7 (3,0đ)	*Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện* $y^2 \ge zx,\ z^2 \ge xy$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=\dfrac{z}{z+y}+\dfrac{y}{y+x}+\dfrac{2022z^{2023}}{z^{2023}+x^{2023}}$.	
	Ta có $P=\dfrac{1}{1+\dfrac{y}{z}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{y}}+\dfrac{2022}{1+\left(\dfrac{x}{z}\right)^{2023}}$ Đặt $a=\dfrac{y}{x},\ b=\dfrac{z}{y},\ c=\dfrac{x}{z}$. Khi đó $abc=1\ (a,b,c>0)$ và $ac=\dfrac{y}{z},\ bc=\dfrac{x}{y}$.	0,25 0,25
	Theo đề $\begin{cases} y^2\ge zx \\ z^2 \ge xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}\ge\dfrac{z}{y} \\ \dfrac{z}{y}\ge\dfrac{x}{z}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ge b \\ b\ge c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ge b\ge c>0 \\ abc=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab\ge 1 \\ 0<c\le 1\end{cases}$	0,5
	$P=\dfrac{1}{1+ac}+\dfrac{1}{1+bc}+\dfrac{2022}{1+c^{2023}}\ge\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{2022}{1+\sqrt{c}}$ (vì $0<c\le 1$ nên $1+ac\le 1+a, 1+bc\le 1+b, 1+c^{2023}\le 1+\sqrt{c}$)	0,5
	+ Lại có $\begin{cases} a,b>0 \\ ab\ge 1\end{cases}$ nên $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$ hay $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\ge\dfrac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1}$.	0,5
	Suy ra $P\ge\dfrac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1}+\dfrac{2022}{1+\sqrt{c}}=\dfrac{2\sqrt{c}+2022}{\sqrt{c}+1}$.	0,25
	Xét $f(t)=\dfrac{2t+2022}{t+1}\ \left(0<t=\sqrt{c}\le 1\right),\ f'(t)=\dfrac{-2020}{(t+1)^2}<0\ \forall t\in(0;1]$. Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $(0;1]$. Do đó $f(t)\ge f(1)=1012$. Dấu "=" xảy ra khi $t=1\Leftrightarrow c=1$.	0,5
	Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1012 khi $x=z$.	0,25

--------------- HẾT ---------------

Chú ý: *Nếu học sinh có lời giải đúng, khác với đáp án, Giám khảo căn cứ thang điểm câu tương ứng cho điểm phù hợp.*