

ĐỀ 78
HSG TOÁN 9 SÓC TRĂNG 2023-2024

Bài 1. (4,0 điểm) Cho biểu thức $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x}-x-1}\right) - 1$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P - \sqrt{x}$ nhận giá trị nguyên

Bài 2. (4,0 điểm)

a) Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $\frac{1}{3} + \frac{+1}{6} + \frac{+1}{10} + \frac{+1}{15} + \dots + \frac{2}{n^2+3n+2} = \frac{2023}{2025}$

b) Giá bán lẻ điện sinh hoạt được tập đoàn điện lực Việt Nam chia theo thang giá 6 bậc như sau:

Bậc 1: Cho kWh từ 0 đến 50 .

Bậc 2: Cho kWh từ 51 đến 100, giá mỗi kWh cao hơn bậc 1 là 56 đồng.

Bậc 3: Cho kWh từ 101 đến 200, giá mỗi kWh cao hơn bậc 2 là 280 đồng.

Bậc 4: Cho kWh từ 201 đến 300, giá mỗi kWh cao hơn bậc 3 là 522 đồng.

Bậc 5: Cho kWh từ 301 đến 400, giá mỗi kWh cao hơn bậc 4 là 298 đồng.

Bậc 6: Cho kWh từ 401 trở lên, giá mỗi kWh cao hơn bậc 5 là 93 đồng.

Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng trên tổng số tiền điện sử dụng hàng tháng.

Tháng 01 năm 2022, nhà bác Nam sử dụng hết 375 kWh và phải trả 921 965 đồng.

Hãy tính giá bán mỗi kWh điện ở từng bậc.

Bài 3. (4,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên x; y thỏa mãn: $x^2 - 2022xy + 2021y^2 = 2021$

b) Chứng minh rằng nếu số tự nhiên a không chia hết cho 5 thì $a^8 + 3a^4 - 4$ chia hết cho 100

Bài 4. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH và trung tuyến AM. Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các cạnh AB, AC.

a) Chứng minh $HB \cdot HC = HJ \cdot IB + HI \cdot JC$

b) Biết rằng trung tuyến AM dài hơn đường cao AH là 2 cm và chu vi tam giác ABC bằng 24 dm. Hãy tính diện tích tam giác ABC.

Bài 5. (4,0 điểm) Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ABC là tam giác nhọn. Các đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng DE có độ dài không đổi.

b) Gọi M là điểm đối xứng với B qua AH, N là điểm đối xứng với C qua AH. Gọi I là giao điểm của MH và AB, K là giao điểm của NH và AC. Tìm vị trí của điểm A để độ dài IK nhỏ nhất.

---Hết---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (4,0 điểm) Cho biểu thức $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right) - 1$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P - \sqrt{x}$ nhận giá trị nguyên

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức P .

Điều kiện để P có nghĩa là $x \geq 0$ và $x \neq 1$

$$\begin{aligned} P &= \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right) - 1 \\ &= \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right) - 1 = \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} \cdot \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} - 1 \\ &= \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} - 1 \\ &= \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \frac{-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{(x+\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+2}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P - \sqrt{x}$ nhận giá trị nguyên

$$P - \sqrt{x} = \frac{x+2}{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-1}$$

Ta thấy với \sqrt{x} là số vô tỉ thì $\sqrt{x}-1$ là số vô tỉ suy ra $P - \sqrt{x}$ là số vô tỉ (loại)

Với \sqrt{x} là số nguyên thì $\sqrt{x}-1$ là số nguyên. Khi đó $P - \sqrt{x}$ nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x}-1$ là ước của 3 hay $\sqrt{x}-1 = \pm 1$ hoặc $\sqrt{x}-1 = \pm 3$

Suy ra $x = 0$ hoặc $x = 4$ hoặc $x = 16$

Bài 2. (4,0 điểm)

a) Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{2}{n^2+3n+2} = \frac{2023}{2025}$

b) Giá bán lẻ điện sinh hoạt được tập đoàn điện lực Việt Nam chia theo thang giá 6 bậc như sau:

Bậc 1: Cho kWh từ 0 đến 50 .

Bậc 2: Cho kWh từ 51 đến 100, giá mỗi kWh cao hơn bậc 1 là 56 đồng.

Bậc 3: Cho kWh từ 101 đến 200, giá mỗi kWh cao hơn bậc 2 là 280 đồng.

Bậc 4: Cho kWh từ 201 đến 300, giá mỗi kWh cao hơn bậc 3 là 522 đồng.

Bậc 5: Cho kWh từ 301 đến 400, giá mỗi kWh cao hơn bậc 4 là 298 đồng.

Bậc 6: Cho kWh từ 401 trở lên, giá mỗi kWh cao hơn bậc 5 là 93 đồng.

Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng trên tổng số tiền điện sử dụng hàng tháng.

Tháng 01 năm 2022, nhà bác Nam sử dụng hết 375 kWh và phải trả 921 965 đồng.

Hãy tính giá bán mỗi kWh điện ở từng bậc.

Lời giải

a) Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $\frac{1}{3} + \frac{+1}{6} + \frac{+1}{10} + \frac{+1}{15} + \dots + \frac{2}{n^2+3n+2} = \frac{2023}{2025}$

Giải

Ta có $n^2+3n+2 = (n+1)(n+2)$

$$\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{+1}{6} + \frac{+1}{10} + \frac{+1}{15} + \dots + \frac{2}{n^2+3n+2} = \frac{2}{6} + \frac{+2}{12} + \frac{+2}{20} + \frac{2}{30} + \dots + \frac{2}{n^2+3n+2}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n}{n+2}$$

$$\text{Khi đó } \frac{n}{n+2} = \frac{2023}{2025} \Rightarrow n = 2023$$

b) Giá bán lẻ điện sinh hoạt được tập đoàn điện lực Việt Nam chia theo thang giá 6 bậc như sau:

Bậc 1: Cho kWh từ 0 đến 50.

Bậc 2: Cho kWh từ 51 đến 100, giá mỗi kWh cao hơn bậc 1 là 56 đồng.

Bậc 3: Cho kWh từ 101 đến 200, giá mỗi kWh cao hơn bậc 2 là 280 đồng.

Bậc 4: Cho kWh từ 201 đến 300, giá mỗi kWh cao hơn bậc 3 là 522 đồng.

Bậc 5: Cho kWh từ 301 đến 400 , giá mỗi kWh cao hơn bậc 4 là 298 đồng.

Bậc 6: Cho kWh từ 401 trở lên, giá mỗi kWh cao hơn bậc 5 là 93 đồng.

Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng trên tổng số tiền điện sử dụng hàng tháng.

Tháng 01 năm 2022, nhà bác Nam sử dụng hết 375 kWh và phải trả 921 965 đồng.

Hãy tính giá bán mỗi kWh điện ở từng bậc.

Giải

Gọi x (đồng) là giá bán mỗi kWh điện ở bậc 1 ($x > 0$). Khi đó:

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 2 là: $x + 56$

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 3 là: $x + 56 + 280 = x + 336$

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 4 là: $x + 336 + 522 = x + 858$

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 5 là: $x + 858 + 298 = x + 1156$

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 6 là: $x + 1156 + 93 = x + 1249$

Số tiền điện nhà Bác Nam phải trả tháng 1 năm 2022 nếu không tính thuế giá trị gia tăng theo thang bậc là:

$$T = 50x + 50(x+56) + 100(x+336) + 100(x+858) + 75(x+1156)$$

$$\approx 375x + 208900$$

$$\text{Mặt khác: } (100\% + 10\%)T = 921965 \Rightarrow T = 838150 \text{ (đồng)}$$

$$\text{Ta có phương trình } 375x + 208900 = 838150 \Rightarrow x = 1678$$

Vậy:

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 1 là: 1678 đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 2 là: 1734 đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 3 là: 2014 đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 4 là: 2536 đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 5 là: 2834 đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 6 là: 2927 đồng

Bài 3. (4,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $x; y$ thỏa mãn: $x^2 - 2022xy + 2021y^2 = 2021$

b) Chứng minh rằng nếu số tự nhiên a không chia hết cho 5 thì $a^8 + 3a^4 - 4$ chia hết cho 100

Lời giải

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $x; y$ thỏa mãn: $x^2 - 2022xy + 2021y^2 = 2021$

Ta có: $x^2 - 2022xy + 2021y^2 = 2021$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2022xy + 1022121y^2 - 1022121y^2 = 2021$$

$$\Leftrightarrow (x - 1011y)^2 - (1010y)^2 = 2021$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x - 2021y) = 2021$$

Do x nguyên, y nguyên nên $x - y$ nguyên và $x - 2021y$ nguyên

$$\text{Mà } 2021 = 1 \cdot 2021 = 43 \cdot 47 = (-1) \cdot (-2021) = (-43) \cdot (-47)$$

Do đó có các khả năng sau:

$$+) \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2021y = 2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} x - y = 2021 \\ x - 2021y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2022 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} x - y = -1 \\ x - 2021y = -2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} x - y = -2021 \\ x - 2021y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2022 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} x - y = 43 \\ x - 2021y = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21714}{505} \\ y = \frac{-1}{505} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$+) \begin{cases} x - y = 47 \\ x - 2021y = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23736}{505} \\ y = \frac{1}{505} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$+) \begin{cases} x - y = -43 \\ x - 2021y = -47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-21714}{505} \\ y = \frac{1}{505} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$+) \begin{cases} x - y = 43 \\ x - 2021y = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-21714}{505} \\ y = \frac{-1}{505} \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là: $(0; -1); (0; 1); (2022; 1); (-2022; 1)$

b) Chứng minh rằng nếu số tự nhiên a không chia hết cho 5 thì $a^8 + 3a^4 - 4$ chia hết cho 100

Ta có: $M = a^8 + 3a^4 - 4 = a^8 + 4a^4 - a^4 - 4 = (a^4 - 1)(a^4 + 4)$

• Nếu a là số lẻ thì $(a^2 - 1) : 2$ và $(a^2 + 1) : 2$ nên $M : 4$

Suy ra $M : 4$ với mọi a

• Vì a không chia hết cho 5 nên $a \equiv 5k \pm 1$ hoặc $a \equiv 5k \pm 2$, với k là số tự nhiên khác 0.

+) Với $a \equiv 5k \pm 1$ thì $(a^2 - 1) : 5$ và $(a^4 + 1) : 5$ nên $M : 25$

+) Với $a \equiv 5k \pm 2$ thì $(a^2 + 1) : 5$ và $(a^4 + 1) : 5$ nên $M : 25$

Suy ra $M : 25$ với mọi số tự nhiên a không chia hết cho 5

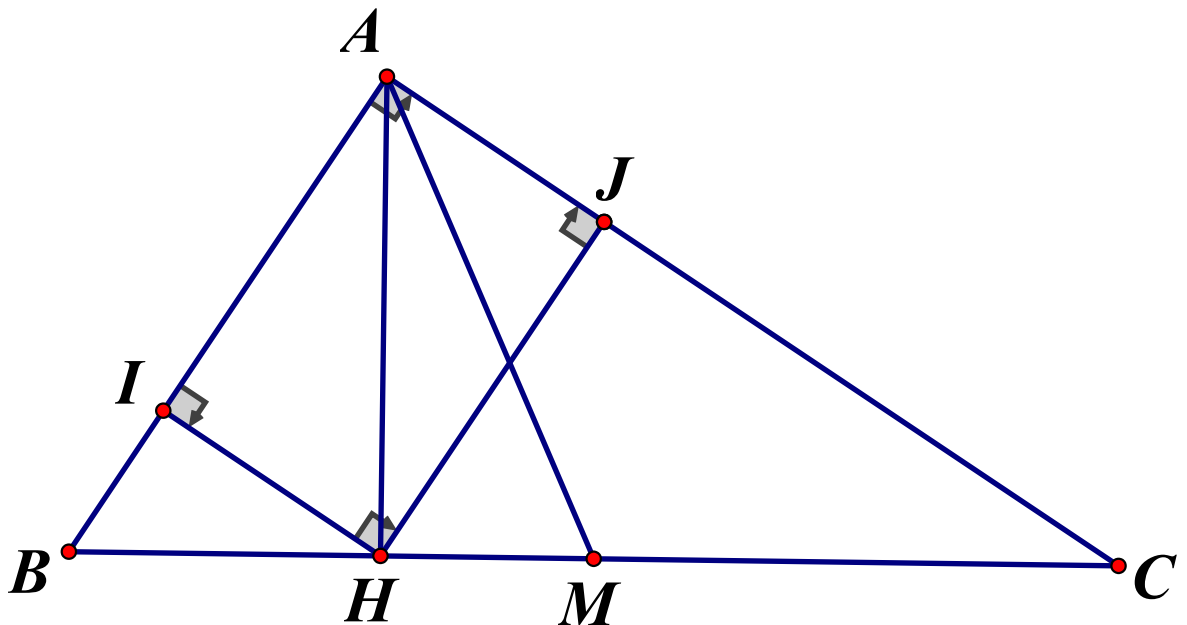
Mà $\text{BCNN}(25, 4) = 100$. Do đó M chia hết cho 100

Bài 4. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH và trung tuyến AM . Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các cạnh AB, AC .

a) Chứng minh $HB \cdot HC = HJ \cdot IB + HI \cdot JC$

b) Biết rằng trung tuyến AM dài hơn đường cao AH là 2 cm và chu vi tam giác ABC bằng 24 dm. Hãy tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải



a) Chứng minh $HB \cdot HC = HJ \cdot IB + HI \cdot JC$

Ta có tứ giác AHJ là hình chữ nhật, suy ra

$$IA = HJ ; JA = HI$$

$$AH^2 = IJ^2 = HI^2 + HJ^2$$

$$\text{Mặt khác } HB \cdot HC = AH^2 = HI^2 + HJ^2$$

$$HB \cdot HC = IA \cdot IB + JA \cdot JC$$

$$HB \cdot HC = HJ \cdot JB + HI \cdot IC \text{ (đpcm)}$$

b) Biết rằng trung tuyến AM dài hơn đường cao AH là 2 cm và chu vi tam giác ABC bằng 24 dm. Hãy tính diện tích tam giác ABC.

Gọi $AM = x$ (cm), $x > 2$ suy ra $BC = 2AM = 2x$

$$\text{Ta có: } AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4x^2 \quad (1)$$

$$AH = AM - 2 = x - 2 \Rightarrow AB \cdot AC = AH \cdot BC = 2x^2 - 4x$$

$$AB + AC + BC = 240 \Rightarrow AB + AC = 240 - BC$$

$$\Rightarrow (AB + AC)^2 = (240 - BC)^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC = 57600 - 480BC + BC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 + 2(2x^2 - 4x) = 57600 - 480 \cdot 2x + 4x^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = -952x + 57600 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có phương trình $4x^2 = -952x + 57600$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 952x - 57600 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \text{ (tm)} \\ x = -288 \text{ (l)} \end{cases}$$

Suy ra $BC = 100$, $AH = 48$

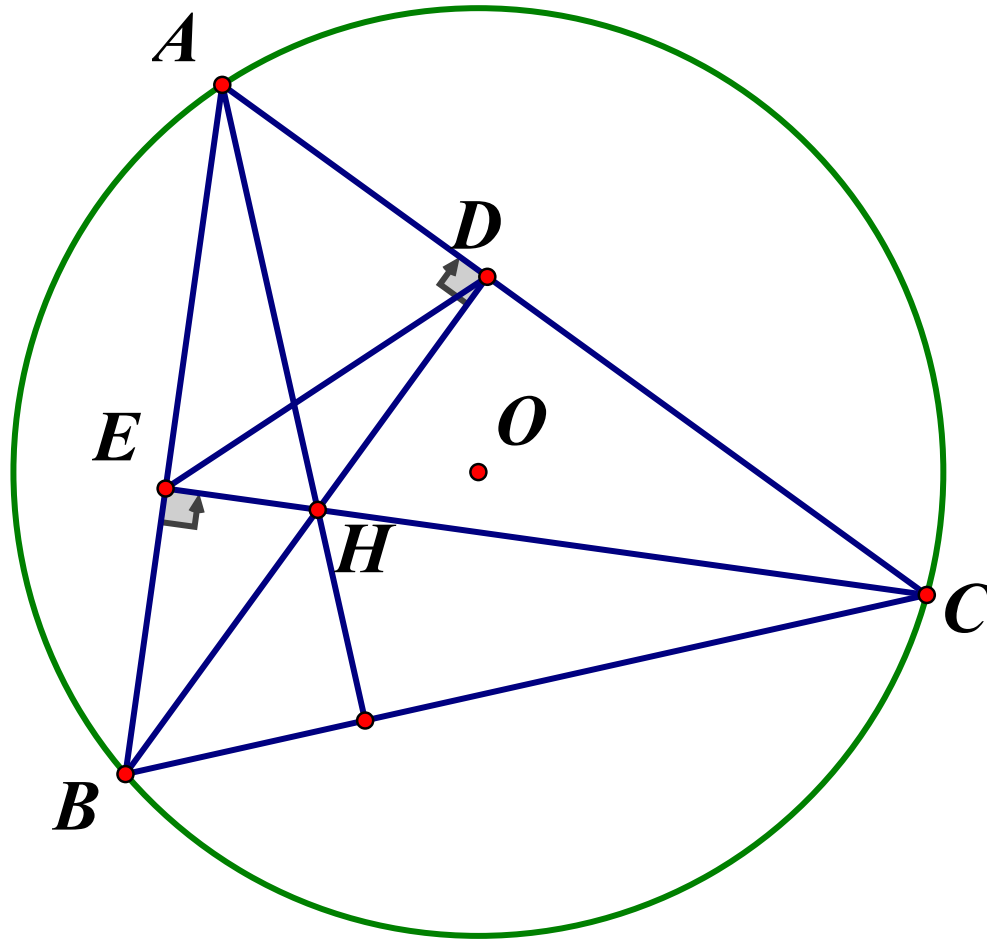
Vậy diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 100 = 2400 \text{ (cm}^2\text{)}$

Bài 5. (4,0 điểm) Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ABC là tam giác nhọn. Các đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng DE có độ dài không đổi.

b) Gọi M là điểm đối xứng với B qua AH, N là điểm đối xứng với C qua AH. Gọi I là giao điểm của MH và AB, K là giao điểm của NH và AC. Tìm vị trí của điểm A để độ dài IK nhỏ nhất.

Lời giải



a) Chứng minh rằng DE có độ dài không đổi.

Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$, suy ra tứ giác BEDC là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{BDE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BE)

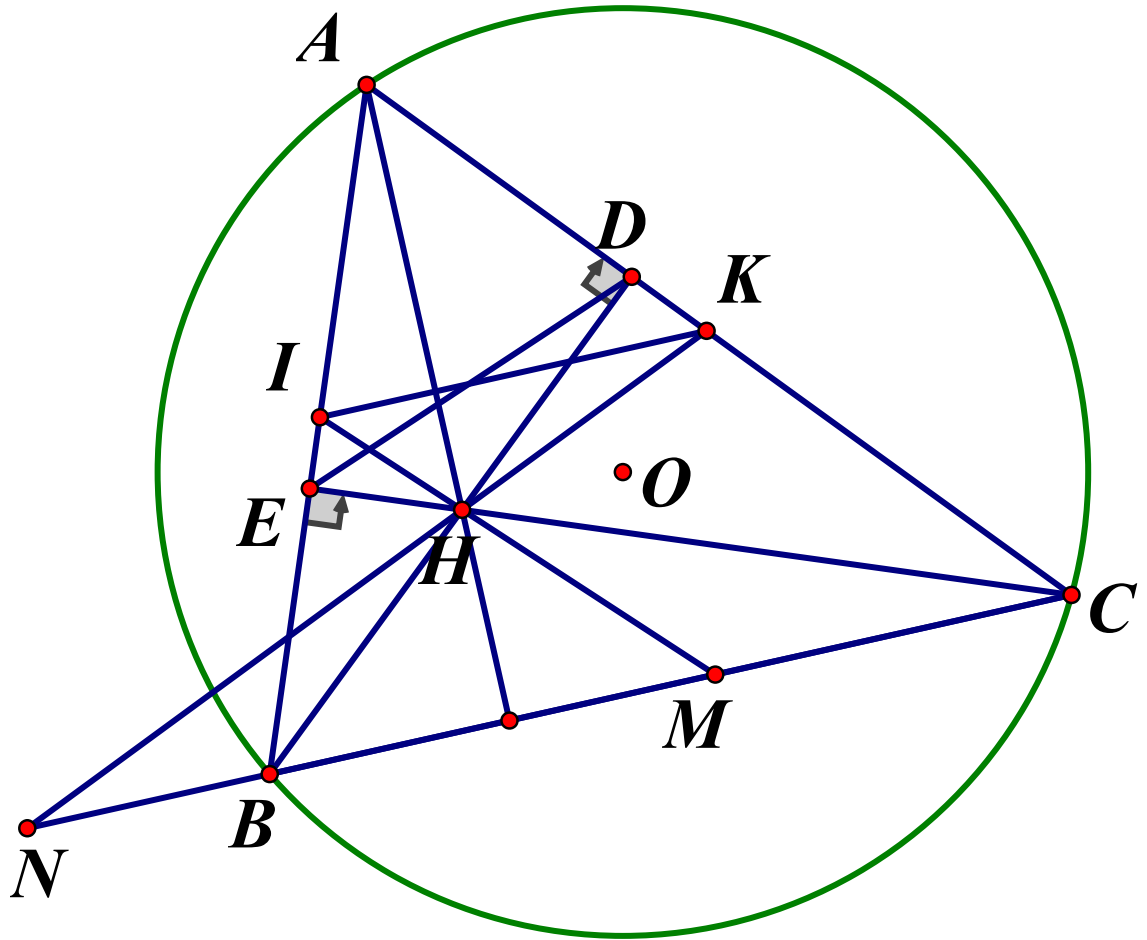
$$\text{Mặt khác } \begin{cases} \widehat{ADE} + \widehat{BDE} = 90^\circ \\ \widehat{ABC} + \widehat{BCE} = 90^\circ \\ \widehat{BDE} = \widehat{BCE} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADE} \text{ Suy ra } \triangle ADE \quad \triangle$$

ABC (g-g)

$$\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \cos A \Rightarrow DE = BC \cdot \cos A \text{ (không đổi).}$$

Do đó DE có độ dài không đổi.

b)



Gọi M là điểm đối xứng với B qua AH , N là điểm đối xứng với C qua AH. Gọi I là giao điểm của MH và AB , K là giao điểm của NH và AC . Tìm vị trí của điểm A để độ dài IK nhỏ nhất.

Ta có: $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 \Rightarrow \widehat{EHI} = \widehat{DHK} \Rightarrow \triangle EHI \sim \triangle DHK$ (g-g) $\Rightarrow \frac{EH}{DH} = \frac{HI}{HK}$

$$\therefore \frac{HJ}{HK}$$

Mặt khác $\begin{cases} \widehat{EHD} = \widehat{EHJ} + \widehat{IHD} \\ \widehat{IHK} = \widehat{DHK} + \widehat{IHD} \Rightarrow \widehat{EHD} = \widehat{IHK} \\ \widehat{EHI} = \widehat{DHK} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle HIK \sim \triangle HED$ (c-g-c) $\Rightarrow \frac{IK}{ED} = \frac{HI}{HE} \geq 1 \Rightarrow IK \geq ED$ (không đổi)

IK nhỏ nhất khi và chỉ khi $IK = ED$

\Leftrightarrow I trùng với E và K trùng với D

\Leftrightarrow A là điểm chính giữa của cung lớn BC .

---Hết---