

Người làm: Nguyễn Thanh An  
Zalo: An An - số đt zalo: 0396820662  
Email: hocthanhan@gmail.com

**CD8: CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÂN SỐ**

**Dạng 1. Tìm phân số thỏa mãn điều kiện cho trước**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Duyên Hải 2022 - 2023)**

Tìm ba phân số tối giản. Biết tổng của chúng bằng  $\frac{269}{30}$ . Tử số của chúng tỉ lệ thuận với 5; 7;

11. Mẫu số của chúng tỉ lệ nghịch với  $\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}$ .

**Lời giải**

Gọi ba phân số tối giản cần tìm là:  $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}; \frac{e}{f}$  (Điều kiện  $(a,b)=1; (c,d)=1; (e,f)=1$ ).

Vì tử số của chúng tỉ lệ thuận với 5; 7; 11 nên

$$\frac{a}{5} = \frac{c}{7} = \frac{e}{11} = k$$

$$\Rightarrow a = 5k; c = 7k; e = 11k$$

Vì mẫu số của chúng tỉ lệ nghịch với  $\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}$  nên  $\frac{1}{b} = \frac{1}{5}d = \frac{1}{6}f$

$$\Rightarrow \frac{b}{4} = \frac{d}{5} = \frac{f}{6} = q$$

$$\Rightarrow b = 4q; d = 5q; f = 6q$$

Do tổng của ba phân số bằng  $\frac{269}{30}$  nên  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{269}{30}$

$$\Leftrightarrow \frac{5k}{4q} + \frac{7k}{5q} + \frac{11k}{6q} = \frac{269}{30}$$

$$\Leftrightarrow \frac{269}{60} \cdot \frac{k}{q} = \frac{269}{30}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{q} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{5k}{4q} = \frac{5}{4} \cdot 2 = \frac{5}{2} \\ \frac{c}{d} = \frac{7k}{5q} = \frac{7}{5} \cdot 2 = \frac{14}{5} \\ \frac{e}{f} = \frac{11k}{6q} = \frac{11}{6} \cdot 2 = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Vậy ba phân số cần tìm là  $\frac{5}{2}$ ;  $\frac{14}{5}$ ;  $\frac{11}{3}$ .

**Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)**

Tìm ba phân số tối giản biết tổng của chúng là  $4\frac{9}{40}$ ; các tử của chúng tỉ lệ với 2; 3; 5 còn các mẫu của chúng tương ứng tỉ lệ với 5; 4; 3.

**Lời giải**

Gọi ba phân số tối giản cần tìm là  $\frac{a}{a'}$ ;  $\frac{b}{b'}$ ;  $\frac{c}{c'}$  (Điều kiện  $(a, a')=1$ ;  $(b, b')=1$ ;  $(c, c')=1$ )

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} \frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 4\frac{9}{40} \\ \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} \quad (1) \\ \frac{a'}{5} = \frac{b'}{4} = \frac{c'}{3} \quad (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} : \frac{a'}{5} &= \frac{b}{3} : \frac{b'}{4} = \frac{c}{5} : \frac{c'}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{a'} \cdot \frac{5}{2} &= \frac{b}{b'} \cdot \frac{4}{3} = \frac{c}{c'} \cdot \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{\frac{a'}{5}} &= \frac{b}{\frac{b'}{4}} = \frac{c}{\frac{c'}{3}} \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\frac{a}{\frac{a'}{5}}}{\frac{b}{\frac{b'}{4}}} = \frac{\frac{b}{\frac{b'}{4}}}{\frac{c}{\frac{c'}{3}}} = \frac{\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{4\frac{9}{40}}{\frac{169}{60}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{5} \\ \frac{b}{b'} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8} \\ \frac{c}{c'} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy ba phân số tối giản cần tìm là  $\frac{3}{5}; \frac{9}{8}; \frac{5}{2}$ .

**Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023)**

Tìm 3 phân số có tổng của chúng bằng  $1\frac{1}{70}$ , các tử của chúng tỉ lệ với 3; 4; 5 và các mẫu tương ứng của chúng tỉ lệ với 5; 1; 2.

**Lời giải**

Gọi ba phân số cần tìm lần lượt là  $\frac{a}{x}; \frac{b}{y}; \frac{c}{z}$ .

Theo đề bài ta có

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1\frac{1}{70}; \quad \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \quad \text{và} \quad \frac{x}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} : \frac{x}{5} = \frac{b}{4} : \frac{y}{1} = \frac{c}{5} : \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{\frac{a}{3}}{\frac{x}{5}} = \frac{\frac{b}{4}}{\frac{y}{1}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{z}{2}}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\frac{a}{3}}{\frac{x}{5}} = \frac{\frac{b}{4}}{\frac{y}{1}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{z}{2}} = \frac{\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}}{\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5}} = \frac{1\frac{1}{70}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{x} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{35} \\ \frac{b}{y} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{7} \\ \frac{c}{z} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{14} \end{cases}$$

Vậy ba phân số cần tìm là  $\frac{3}{35}; \frac{4}{7}; \frac{5}{14}$ .

**Dạng 2. Chứng minh phân số đã cho là tối giản**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Hoa Lư, tỉnh Ninh Bình 2020 - 2021)**

Chứng minh với  $n$  là số nguyên thì phân số  $\frac{2n+5}{n+3}$  là phân số tối giản.

**Lời giải**

Điều kiện:  $n \neq -3$

Gọi  $\text{ÖCLN}(n+3, 2n+5) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n+3):d \\ (2n+5):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(n+3):d \\ (2n+5):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [(2n+6) - (2n+5)] : d$$

$$\Rightarrow 1 : d$$

$$\Rightarrow d = 1$$

Vậy  $\frac{2n+5}{n+3}$  là phân số tối giản.

**Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Ba, tỉnh Phú Thọ 2020 - 2021)**

Chứng minh phân số  $\frac{12n+1}{30n+2}$  là phân số tối giản với mọi số tự nhiên  $n$ .

**Lời giải**

Gọi  $\text{ÖCLN}(12n+1, 30n+2) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12n+1:d \\ 30n+2:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12n+1):d \\ 2(30n+2):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (60n+5) - (60n+4) : d$$

$$\Rightarrow 1 : d$$

$$\Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số  $\frac{12n+1}{30n+2}$  là phân số tối giản với mọi số tự nhiên  $n$ .

**Câu 3. (HSG 7 huyện Sơn Tịnh, tỉnh Quảng Ngãi 2020 - 2021)**

Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên  $n$ , phân số  $\frac{12n+5}{15n+6}$  là phân số tối giản.

**Lời giải**

Gọi  $\text{ÖCLN}(12n+5, 15n+6) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12n+5;d \\ 15n+6;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12n+5);d \\ 4(15n+6);d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (60n+25) - (60n+24);d$$

$$\Rightarrow 1;d$$

$$\Rightarrow d=1$$

Vậy phân số  $\frac{12n+5}{15n+6}$  là phân số tối giản.

**Câu 4. (HSG 7 huyện Nho Quan, tỉnh Ninh Bình 2020 - 2021)**

Chúng tỏ rằng với  $n$  là số nguyên dương thì  $\frac{14n+3}{24n+5}$  là phân số tối giản.

**Lời giải**

Gọi  $d = \text{ÖCLN}(14n+3; 24n+5)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14n+3;d \\ 24n+5;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12.(14n+3);d \\ 7.(24n+5);d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 168n+36;d \\ 168n+35;d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (168n+36) - (168n+35);d$$

$$\Rightarrow 168n+36 - 168n - 35;d$$

$$\Rightarrow 1;d \Rightarrow d=1$$

Vậy: phân số  $\frac{14n+3}{24n+5}$  là phân số tối giản với  $n$  là số nguyên dương.

**Dạng 3. Tìm điều kiện để phân số là phân số tối giản**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Phù Cát, tỉnh Bình Định 2020 - 2021)**

Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $\frac{n+1}{3n-1}$  là phân số tối giản.

**Lời giải**

Gọi  $\text{ÖCLN}(n+1, 3n-1) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1;d \\ 3n-1;d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n+3;d \\ 3n-1;d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3n+3) - (3n-1);d$$

$$\Rightarrow 4;d$$

$$\Rightarrow d \in \{1; 2; 4\}$$

Để  $\frac{n+1}{3n-1}$  là phân số tối giản thì  $d \notin \{2; 4\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 \not\vdots 2 \\ n+1 \not\vdots 4 \end{cases} \Rightarrow n+1 \not\vdots 2$$

$$\Rightarrow n+1 \neq 2k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow n \neq 2k - 1$$

Vậy  $n \neq 2k - 1 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$  thì phân số  $\frac{n+1}{3n-1}$  là phân số tối giản.

**Câu 2. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2020 - 2021)**

Tìm các số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{1-3n}{2n-3}$  là phân số tối giản.

**Lời giải**

Gọi  $d \in \text{ÖC}(1-3n; 2n-3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-3n : d \\ 2n-3 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot (1-3n) : d \\ 3 \cdot (2n-3) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-6n : d \\ 6n-9 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2-6n) + (6n-9) : d$$

$$\Rightarrow 2-6n+6n-9 : d$$

$$\Rightarrow -7 : d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 7\}$$

Để phân số  $\frac{1-3n}{2n-3}$  là phân số tối giản thì  $d \neq \pm 7$

Hay  $2n-3$  không chia hết cho 7

$$\Rightarrow 2n-3 \neq 7k$$

$$\Rightarrow 2n-3-7 \neq 7k$$

$$\Rightarrow 2n-10 \neq 7k$$

$$\Rightarrow n-5 \neq 7k$$

$$\Rightarrow n \neq 7k+5$$

Vậy với  $n \neq 7k+5$  phân số  $\frac{1-3n}{2n-3}$  là phân số tối giản.

**Câu 3. (HSG 7 huyện Phú Lương, tỉnh Thái Nguyên 2020 - 2021)**

Tìm số tự nhiên  $n$  nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản:

$$\frac{7}{n+9}; \frac{8}{n+10}; \frac{9}{n+11}; \dots; \frac{100}{n+102}$$

**Lời giải**

Ta có các phân số đã cho đều có dạng  $\frac{x}{x+(n+2)}$  với  $x \in \{7; 8; 9; \dots; 100\}$

Do đó để các phân số đều tối giản thì  $x$  và  $n+2$  phải nguyên tố cùng nhau.

Suy ra  $n+2$  phải nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số  $7; 8; 9; \dots; 100$ .

$\Rightarrow n+2$  là số nguyên tố nhỏ nhất và lớn hơn 100

$\Rightarrow n+2 = 101$

$\Rightarrow n = 99$

#### Dạng 4. Tìm số tự nhiên $n$ để phân số rút gọn được

##### A. Trắc nghiệm (nếu có)

##### B. Tự luận

**Câu 1.** Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  để phân số  $B = \frac{6n+7}{3n+2}$  không là phân số tối giản.

##### Lời giải

Gọi  $d$  là ước nguyên tố chung (nếu có) của  $6n+7$  và  $3n+2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6n+7:d \\ 3n+2:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+7:d \\ 6n+4:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6n+7) - (6n+4):d \quad \text{hay} \quad 3:d$$

Vì  $d$  là ước nguyên tố nên  $d=3$

Khi đó  $3n+2:3 \Rightarrow 2:3$  vô lý

Vậy không có số tự nhiên  $n$  để phân số  $B = \frac{6n+7}{3n+2}$  không là phân số tối giản.

**Câu 2.** Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$  không là phân số tối giản.

##### Lời giải

Gọi  $d$  là ước nguyên tố chung (nếu có) của  $3n^2+2n+3$  và  $2n+1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n^2+2n+3:d \\ 2n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3n^2+2n+3):d \\ 3n(2n+1):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [2(3n^2+2n+3) - 3n(2n+1)] : d \quad \text{hay} \quad 2n+12 : d \Rightarrow 2n+1+11 : d$$

Suy ra  $11:d \Rightarrow d=11$

Khi đó  $(2n+1-11):11 \quad \text{hay} \quad 2(n-5):11$

$\Rightarrow n-5:11$

$\Rightarrow n=11k+5 (k \in \mathbb{N})$

Vậy với  $n = 11k + 5 (k \in \mathbb{N})$  để phân số  $\frac{3n^2 + 2n + 3}{2n + 1}$  không là phân số tối giản.

### Dạng 5. Một số bài toán có lời văn

#### A. Trắc nghiệm (nếu có)

#### B. Tự luận

#### Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Tân Tiến 2022 - 2023)

Một người đi từ A đến B trong một thời gian dự định. Sau khi đi được  $\frac{1}{3}$  quãng đường người đó tăng vận tốc thêm 20% do đó đến B sớm hơn dự định 10 phút. Tính thời gian người đó dự định đi từ A đến B.

#### Lời giải

Gọi thời gian người đó khi đi  $\frac{1}{3}$  quãng đường đầu và  $\frac{2}{3}$  quãng đường sau lần lượt là  $t_1; t_2$  (phút), vận tốc tương ứng là  $v_1; v_2$  (m/phút), quãng đường đi lần lượt là  $s_1; s_2$  (m)

(Điều kiện:  $t_1; t_2; v_1; v_2; s_1; s_2 > 0$ ).

Khi đó thời gian người đó đi quãng đường AB theo dự định và theo thực tế lần lượt là  $3t_1; t_1 + t_2$  (phút).

Theo đề bài ta có:  $3t_1 - (t_1 + t_2) = 10 \Rightarrow 2t_1 - t_2 = 10$

Mà vận tốc lúc sau lại tăng 20% so với lúc trước nên ta có:

$$v_2 = v_1 + 20\%v_1 = 1,2v_1$$

$$\frac{v_2}{v_1} = 1,2 = \frac{6}{5}$$

Ta lại có:  $s_2 = 2s_1$  hay  $v_2 \cdot t_2 = 2v_1 \cdot t_1$

$$\Rightarrow \frac{2t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{2t_1}{6} = \frac{t_2}{5}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{2t_1}{6} = \frac{t_2}{5} = \frac{2t_1 - t_2}{6 - 5} = \frac{10}{1} = 10 \quad (\text{Do } 2t_1 - t_2 = 10)$$

$$\text{Do đó } \frac{2t_1}{6} = 10 \Rightarrow \frac{t_1}{3} = 10 \Rightarrow t_1 = 30$$

Vậy thời gian người đó dự định đi từ A đến B là  $3 \cdot 30 = 90$  (phút).

#### Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Văn Lang 2022 - 2023)

Ba kho A, B, C chứa một số gạo. Nếu nhập vào kho A thêm  $\frac{1}{7}$  số gạo của kho đó, xuất ở kho B đi  $\frac{1}{9}$  số gạo của kho đó và xuất ở kho C đi  $\frac{2}{7}$  số gạo của kho đó thì khi đó số gạo ở ba kho bằng nhau. Tính số gạo ở mỗi kho lúc đầu, biết kho B nhiều hơn kho A 20 tạ.

**Lời giải**

Gọi số gạo lúc đầu của kho A, B, C lần lượt là  $x; y; z$  (tạ) ( $x; y; z > 0$ )

Theo bài ra, ta có:  $\frac{8}{7}x = \frac{8}{9}y = \frac{5}{7}z$  và  $y - x = 20$

Từ  $\frac{8}{7}x = \frac{8}{9}y = \frac{5}{7}z \Rightarrow \frac{x}{35} = \frac{y}{45} = \frac{z}{56}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{35} = \frac{y}{45} = \frac{z}{56} = \frac{y - x}{45 - 35} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{35} = 2 \\ \frac{y}{45} = 2 \\ \frac{z}{56} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 70 \\ y = 90 \\ z = 112 \end{cases}$$

Vậy số gạo ở mỗi kho A, B, C lúc đầu lần lượt là 70 tạ, 90 tạ, 112 tạ.

**Câu 3. (HSG 7 huyện Thái Thụy, tỉnh Thái Bình 2021 - 2022)**

Cuối học kì I, ba bạn An, Tâm, Bình được thưởng tổng số vở là 58 quyển. Ba bạn quyết định dùng một nửa số vở của An,  $\frac{1}{3}$  số vở của Tâm,  $\frac{1}{4}$  số vở của Bình để tặng các bạn học sinh nghèo. Biết số vở còn lại sau khi tặng của ba bạn bằng nhau. Hỏi mỗi bạn được thưởng bao nhiêu quyển vở?

**Lời giải**

Gọi số vở được thưởng của ba bạn An, Tâm, Bình thứ tự là  $x, y, z$  (quyển)

(Điều kiện:  $x, y, z$  nguyên dương)

Theo bài ra ta có:  $\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}y = \frac{3}{4}z$  và  $x + y + z = 58$

$$\Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{8} \text{ và } x + y + z = 58$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{8} = \frac{x + y + z}{12 + 9 + 8} = \frac{58}{29} = 2$$

Nên  $x = 2.12 = 24$  (TMĐK)

$$y = 2.9 = 18 \quad (\text{TMDK})$$

$$z = 2.8 = 16 \quad (\text{TMDK})$$

Vậy An được thưởng  $2^4$  quyền vở; Tâm được thưởng  $1^8$  quyền vở; Bình được thưởng  $1^6$  quyền vở.

**Câu 4. (HSG 7 huyện Ý Yên, tỉnh Nam Định 2021 - 2022)**

Hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc từ hai địa điểm  $A$  và  $B$ , đi ngược chiều nhau trên cùng một tuyến đường. Đến điểm gặp nhau, xe thứ hai đi được quãng đường dài hơn xe thứ nhất là  $20$  km. Biết rằng nếu đi hết quãng đường  $AB$ , xe thứ nhất đi hết  $4$  giờ  $15$  phút, xe thứ hai đi hết  $3$  giờ  $45$  phút. Tính độ dài quãng đường  $AB$ .

**Lời giải**

$$\text{Đổi } 4 \text{ giờ } 15 \text{ phút} = \frac{17}{4} \text{ giờ}, \quad 3 \text{ giờ } 45 \text{ phút} = \frac{15}{4} \text{ giờ}.$$

Gọi  $a$  (km/h) và  $b$  (km/h) lần lượt là vận tốc xe ô tô xuất phát từ  $A$  và xuất phát từ  $B$ . Điều kiện  $a > 0, b > 0$ .

Hai xe ô tô cùng khởi hành và đi ngược chiều nhau, đến điểm gặp nhau xe thứ hai đi được quãng đường dài hơn xe thứ nhất là  $20$  km nên vị trí gặp nhau cách điểm chính giữa đoạn đường  $AB$  là  $10$  km.

Gọi độ dài quãng đường  $AB$  là  $s$  (km),  $s > 0$ .

$$\frac{\frac{1}{2}s - 10}{a} = \frac{\frac{1}{2}s + 10}{b}$$

Vì thời gian đi ngược chiều của hai xe là như nhau nên ta có:

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}s - 10\right)}{a} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}s + 10\right)}{b}$$

$$\text{hay} \quad \frac{s - 20}{a} = \frac{s + 20}{b} \quad (1)$$

Nếu cùng đi hết quãng đường  $AB$  như nhau thì vận tốc và thời gian của mỗi xe là hai đại lượng tỉ lệ

$$\text{nghịch, suy ra} \quad \frac{17}{4}a = \frac{15}{4}b \Leftrightarrow 17a = 15b \Leftrightarrow \frac{a}{15} = \frac{b}{17} \quad (2)$$

$$\text{Nhân vế với vế của (1) và (2) ta được:} \quad \frac{s - 20}{15} = \frac{s + 20}{17}$$

$$\text{Suy ra} \quad 17(s - 20) = 15(s + 20)$$

$$17s - 340 = 15s + 300$$

$$17s - 15s = 340 + 300$$

$$2s = 640$$

$$s = 320 \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Vậy quãng đường  $AB$  dài 150 km.

**Dạng 6. Các bài toán về so sánh**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Hồng Lĩnh 2022 - 2023)**

Cho  $B = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$ . Hãy so sánh  $B$  với  $-\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

$B$  là tích của 99 số âm, do đó:

$$-B = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2}\right)$$

$$-B = \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \dots \frac{99.101}{100^2}$$

$$-B = \frac{1.2.3.4 \dots 98.99}{2.3.4 \dots 99.100} \cdot \frac{3.4.5 \dots 100.101}{2.3.4 \dots 99.100}$$

$$-B = \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2}$$

$$-B = \frac{101}{200}$$

Vì  $\frac{101}{200} > \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$  nên  $-B > \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow B < -\frac{1}{2}$$

Vậy  $B < -\frac{1}{2}$ .

**Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Dân Chủ 2022 - 2023)**

Cho  $B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$  (với  $n$  là số tự nhiên lớn hơn 1).

Chứng minh rằng  $B < 1$ .

**Lời giải**

$$B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$B = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{n^2 - (n-1)^2}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$B = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Vì  $n$  là số tự nhiên lớn hơn 1 nên  $\frac{1}{n^2} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} < 1$ .

Vậy  $B < 1$ .

**Câu 3.** (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường TH&THCS Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho biểu thức:  $P = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$ . Chứng minh rằng:  $P < \frac{3}{16}$ .

**Lời giải**

$$\text{Xét } 3P = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$\Rightarrow 3P + P = 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{3^2} - \frac{2}{3^2}\right) + \left(\frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{99}{3^{98}} - \frac{98}{3^{98}}\right) + \left(\frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{99}}\right) - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 4P = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 12P = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$\Rightarrow 4P + 12P = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}\right) + \left(3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}\right)$$

$$\Rightarrow 16P = 3 - \frac{101}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 16P = 3 - \frac{303}{3^{100}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 16P = 3 - \frac{403}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{3}{16} - \frac{403}{16 \cdot 3^{100}}$$

$$\text{Vì } \frac{3}{16} - \frac{403}{16 \cdot 3^{100}} < \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow P < \frac{3}{16}$$

**Câu 4.** (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường TH&THCS Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho  $A = \frac{2001}{2000^2 + 1} + \frac{2001}{2000^2 + 2} + \dots + \frac{2001}{2000^2 + 2000}$ . Chứng minh rằng:  $1 < A^2 < 4$ .

**Lời giải**

Tổng  $A$  có tất cả  $2000$  số hạng.

Ta có :  $\frac{2001}{2000^2 + 1} > \frac{2001}{2000^2 + 2} > \frac{2001}{2000^2 + 3} > \dots > \frac{2001}{2000^2 + 2000}$   
 $\Rightarrow A > \frac{2001}{2000^2 + 2000} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000(2000 + 1)} = 1$  (1)

Mặt khác:

$$A < \frac{2001}{2000^2 + 1} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{(2000 + 1) \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{2000^2 + 2000}{2000^2 + 1}$$

$$= \frac{(2000 + 1) \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{(2000^2 + 1) + 1999}{2000^2 + 1} = 1 + \frac{1999}{2000^2 + 1} < 2$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $1 < A < 2 \Rightarrow 1 < A^2 < 4$ .

**Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Tân Tiên 2022 - 2023)**

So sánh  $B$  và  $C$ , biết:

$$B = \frac{1}{1010} + \frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}$$

$$C = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}$$

**Lời giải**

$$C = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}$$

$$= \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2023} \right) - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \right)$$

$$= \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1011} \right) + \left( \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \dots + \frac{1}{2023} \right) - \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1010} + \frac{1}{1011} \right)$$

$$= \frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}$$

$$\Rightarrow B = C$$

**Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)**

Cho  $B = \left( 1 + \frac{1}{1.3} \right) \left( 1 + \frac{1}{2.4} \right) \dots \left( 1 + \frac{1}{2018.2020} \right)$

So sánh  $B$  với  $2$ .

**Lời giải**

$$B = \left( 1 + \frac{1}{1.3} \right) \left( 1 + \frac{1}{2.4} \right) \dots \left( 1 + \frac{1}{2018.2020} \right)$$

$$B = \frac{4}{1.3} \cdot \frac{9}{2.4} \cdot \frac{16}{3.5} \dots \frac{2019.2019}{2018.2020}$$

$$B = \frac{2.2.3.3.4.4.....2019.2019}{1.3.2.4.3.5.....2018.2020}$$

$$B = \frac{2.3.4.....2019.2.3.4.....2019}{1.2.3.....2018.3.4.5.....2020}$$

$$B = 2019 \cdot \frac{2}{2020}$$

$$B = \frac{2019}{1010}$$

Ta có  $\frac{2019}{1010} < \frac{2020}{1010}$

$$\Rightarrow B < 2$$

**QUY ĐỊNH BIÊN SOẠN ĐỀ KIỂM TRA, TÀI LIỆU CỦA NHÓM**

**Thường gặp – Không chuẩn**

**CHUẨN**

1. Dấu độ  $90^0$
2. Dấu phẩy  $\Delta', d'$  hoặc  $A'$
3. Cặp ngoặc tròn  $(3;4)$
4. Tọa độ điểm  $(1;2)$

1.  $90^\circ$  **Nhấn Ctrl +Shiff +K, buông ra nhấn D**
2.  $\Delta', d'$  hoặc  $A'$  **Nhấn Ctrl Alt ‘**
3.  $(3;4)$  **Nhấn Ctrl (có thêm 1 dấu cách trước và sau ; trong cặp ngoặc)**
5.  $(1;2)$  **Trước và sau dấu ; có 1 dấu cách .**

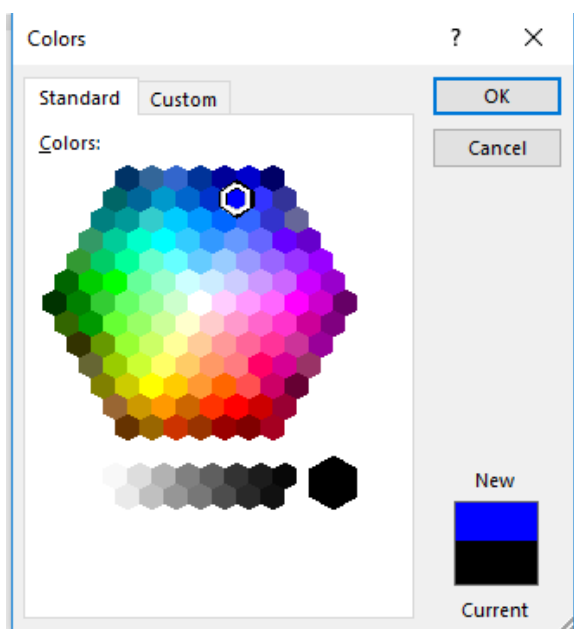
**Nhấn Ctrl Space để gõ dấu cách trong MT.**

5.  $f[g(x)], [f(x)+g(x)]$
6. Dấu song song  $a // b$
7. Tách rời công thức  $x, y$   
hoặc  $x_1; x_2$
8. Các tập số  $N, Z, R \dots$
9.  $(x, y), (x, y \in \mathbb{R})$  (dấu ngoặc  
gõ thường bằng Word)
10.  $\{1,2,3,\dots,100\}$  hoặc 1, 2, 3...

7.  $f(g(x)), (f(x)+g(x))$  vì dấu  $()$  trong  $f(x)$  là kí hiệu, không phải phép toán.
8.  $a // b$  Trước và sau dấu  $//$  phải có 1 dấu cách **Gõ // bình thường trong MT, bôi đen // (Ctrl+Shift+E).**
9.  $x, y$  hoặc  $x_1, x_2$  **Dấu , hoặc dấu ; nằm ngoài MT, tách ra thành 2 công thức có tính chất riêng biệt.**
11.  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$  (nhấn Ctrl D, buông ra nhấn Shift N)
13.  $(x, y), (x, y \in \mathbb{R})$  (gõ hết trong MT, sau dấu phẩy gõ thêm 1 dấu cách)
15.  $\{1;2;3;\dots;100\}$  (khi liệt kê và giữa các phần tử trong một tập hợp phải ngăn cách nhau bằng dấu chấm phẩy, sau dấu ; thêm 1 dấu cách cho đẹp)
16.  $(1) (*), ( )$  (Gõ hết trong MT và đề riêng)

12. Cặp ngoặc  $()$  để thường bên ngoài. **Cặp ngoặc bên trong MT  $()$ .**
13. Tách Công Thức cho những trường hợp có dấu , hoặc dấu ; . **Hai CT có tính chất riêng biệt. và không xuống hàng trong MT.**
14. Các chữ số tự nhiên không đi cùng bất kì kí tự nào khác có thể gõ bằng Word bình thường, không cần gõ trong Mathtype.
15. Các biến số như  $x, y, t \dots$  và các chữ cái như  $a, b, m, A, B \dots$  đều phải được gõ trong Mathtype và in nghiêng.
16. Đơn vị in đứng và cách số liệu 1 dấu cách.  $(km); (km/h)$  ; **(nếu gõ trong MT thì dùng cặp ngoặc MT). Có thể gõ ngoài word thông thường và cách số liệu 1 dấu cách.**
17. Hình vẽ canh giữa trang, để chế độ **In line with Text. Trên Hình dạng điểm nhỏ, Nét Vẽ mảnh, Miền diện tích cần Tô màu. Thể hiện đúng nội dung bài giải.**
18. Hình vẽ, bảng giá trị cần phải hóa ảnh.
19. Nội dung trong công thức Mathtype canh đều về bên trái.
20. Toàn bộ văn bản phải canh đều hai biên (Ctrl J), trừ chữ **Lời giải** và các hình ảnh.

21. Không dùng dấu cách trong các công thức Toán.
22. Kí hiệu trong góc, khoảng cách, **không** dùng dấu chấm phẩy. Góc, khoảng cách dùng ngoặc tròn không dùng ngoặc vuông.
23. **Không viết tắt** các cụm từ như TXĐ, BBT, VTPT, VTCP, PT, BTP, TH, ĐKXĐ..., **cho phép viết tắt** đvtt, đvdt, SGK, Đpcm.
24. Các chữ (g – c – g), (g – g), (c – g – c), (c – c – c) cho phép viết tắt và **phải gõ bằng Word** thông thường, không in nghiêng.
25. Các chữ **loại, nhận, thỏa mãn** **khí gõ** trong Mathtype **không viết tắt và nằm trong cặp ngoặc tròn** ( **Chuẩn** (loaii) ; (thoúa maön) ; (nhaän) ; (chuyển sang Fonf Vni-tmie: rồi gõ cái chữ trên trong text). Có thể gõ ngoài MT (loại); (nhận).
26. Nếu câu hỏi muốn hỏi mệnh đề sai, hoặc không (thuộc, đúng...) thì các chữ **sai, không phải in đậm, không nghiêng, không gạch chân**.
27. **Tuyệt đối không dùng gạch đầu dòng** trong văn bản Toán học.



Màu xanh chuẩn:

### BẢNG GÕ TẮT TRONG MATHTPYE

|                      |                        |
|----------------------|------------------------|
| Mở cửa sổ mathtype   | Ctrl + Alt + Q         |
| Đóng cửa sổ mathtype | Alt + F4               |
| Số mũ                | Ctrl + H               |
| Chỉ số dưới          | Ctrl + L               |
| Số mũ + chỉ số dưới  | Ctrl + J               |
| Phân số              | Ctrl + F               |
| Căn bậc hai          | Ctrl + R               |
| Căn bậc n            | Ctrl + T,n             |
| $\geq$               | Ctrl + K, >            |
| $\leq$               | Ctrl + K, <            |
| $\Rightarrow$        | Ctrl +K, Shift + Right |

|   |                               |
|---|-------------------------------|
| ↔ | Ctrl + K, Alt + Shift + Right |
| ≠ | Ctrl + K, Shift +             |
| ≡ | Ctrl + K, +                   |
| ∈ | Ctrl + K, E                   |

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com  
<https://www.vnteach.com>