

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO
NĂM HỌC 2009 – 2010 -Lớp 12 THPT**

Nếu không có yêu cầu gì thêm, hãy tính chính xác đến 4 chữ số thập phân.

Bài 1: (3 điểm) Tính gần đúng các nghiệm (độ, phút, giây) của phương trình
 $3(\sin x + \cos x) - 5 \sin x \cos x = 2$

Bài 2: (3 điểm) Tính gần đúng giá trị của a và b nếu đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $A(5;2)$ và là tiếp tuyến của Elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Bài 3: (3 điểm) Cho biết $\tan x = \tan 35^\circ \cdot \tan 36^\circ \cdot \tan 37^\circ \dots \tan 52^\circ \cdot \tan 53^\circ$ và $0^\circ < x < 90^\circ$
Tính $M = \frac{\tan^2 x (1 + \cos^3 x) + \cot^2 x (1 + \sin^3 x)}{(\cos^3 x + \sin^3 x)(1 + \cos x + \sin x)}$

Bài 4: (3 điểm) Một số tiền 58000 đồng được gửi tiết kiệm theo lãi kép. Sau 25 tháng được cả vốn lẫn lãi là 84155 đ. Tính lãi suất/tháng.

Bài 5: (3 điểm) Tính gần đúng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2 \sin x + 3 \cos x - 1}{\cos x + 2}$

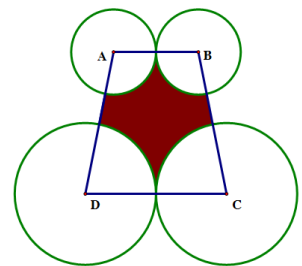
Bài 6: (3 điểm) Cho các hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1}$; $g(x) = \frac{2 \sin x}{1 + \cos^4 x}$.
Hãy tính giá trị của các hàm hợp $g(f(x))$ và $f(g(x))$ tại $x = \sqrt[3]{5}$.

Bài 7: (5 điểm) Cho dãy số u_n xác định bởi:

$$u_1 = 1; u_2 = 2; u_3 = 3; \dots; u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + 3u_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

- Tính giá trị của u_4, u_5, u_6, u_7
- Viết quy trình bấm phím để tính u_{n+1} ?
- Sử dụng quy trình bấm phím trên để tính $u_{10}, u_{21}, u_{25}, u_{28}$

Bài 8: (3 điểm) Tính tổng diện tích hình nằm giữa hình thang và ngoài hình tròn (phần màu đậm) biết chiều dài hai đáy hình thang là 3m và 5m, diện tích hình thang bằng $20m^2$.



Bài 9: (3 điểm) Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 7x - 4}{x^2 - 5x + 6}$. Tính $y^{(5)}$ tại $x = \frac{3}{5}$

Bài 10: (3 điểm) Cho tứ diện ABCD có các cạnh $AB = 7\sqrt{2}$, $BC = 6\sqrt{2}$, $CD = 5\sqrt{2}$, $BD = 4\sqrt{2}$ và chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) là trọng tâm của tam giác BCD. Tính V_{ABCD} .

Bài 11: (5 điểm) Cho phương $x + \log_6(47 - 6^x) = m$ (1)

- a) Tìm các nghiệm gần đúng của phương trình khi $m = 0,4287$
- b) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của m để phương trình (1) có nghiệm

Bài 12: (3 điểm) Cho đa thức $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \dots + 15(1+x)^{15}$

Được viết dưới dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{15}x^{15}$. Tìm hệ số a_{10}

-----Hết-----

ĐÁP ÁN

Bài 1: Tính gần đúng các nghiệm (độ, phút, giây) của phương trình

$$3(\sin x + \cos x) - 5 \sin x \cos x = 2$$

Cách giải	Kết quả	Điểm
Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + 45^\circ), t \leq \sqrt{2}$ Suy ra $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ $Pt \Leftrightarrow 5t^2 - 6t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3 + \sqrt{14}}{5} \\ t_2 = \frac{3 - \sqrt{14}}{5} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x + 45^\circ) = \frac{3 + \sqrt{14}}{5\sqrt{2}} \\ \sin(x + 45^\circ) = \frac{3 - \sqrt{14}}{5\sqrt{2}} \end{cases}$	$x_1 \approx 27^\circ 26' 32,75'' + k360^\circ$ $x_2 \approx 62^\circ 33' 27,25'' + k360^\circ$ $x_3 \approx -51^\circ 1' 14,2'' + k360^\circ$ $x_4 \approx 141^\circ 1' 14,2'' + k360^\circ$	0.5 1 1 0.5

Bài 2: Tính gần đúng giá trị của a và b nếu đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $A(5;2)$ và là tiếp tuyến của

Elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Cách giải	Kết quả	Điểm
Do điểm $A(5;2)$ thuộc đường thẳng (d): $y = ax + b$, nên ta có $5a + b = 2$ (1) Điều kiện để đường thẳng (d) tiếp xúc với Elip: $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2 \Leftrightarrow 16a^2 + 9 = b^2$ (2) Thay (1) vào (2): $9a^2 - 20a - 5 = 0$ (*) Vào Equation giải phương trình bậc hai (*) ta được kết quả.	$\begin{cases} a_1 \approx 2,44907 \\ b_1 \approx -10,24533 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 \approx -0,22684 \\ b_2 \approx 3,13422 \end{cases}$	1 1 1

Bài 3:

(3 điểm) Cho biết $\tan x = \tan 35^\circ \cdot \tan 36^\circ \cdot \tan 37^\circ \dots \tan 52^\circ \cdot \tan 53^\circ$ và $0^\circ < x < 90^\circ$

Tính $M = \frac{\tan^2 x (1 + \cos^3 x) + \cot^2 x (1 + \sin^3 x)}{(\cos^3 x + \sin^3 x)(1 + \cos x + \sin x)}$

Cách giải	Kết quả	Điểm
$\tan x = \tan 35^\circ \tan 36^\circ$ $x = 26,96383125$	$M = 2,483639682$	1 2

Bài 4:

(3 điểm) Một số tiền 58000 đồng được gửi tiết kiệm theo lãi kép. Sau 25 tháng được cả vốn lẫn lãi là 84155 đ. Tính lãi suất/tháng.

Cách giải	Kết quả	Điểm
A: số tiền có được sau n tháng, a: số tiền gửi ban đầu, r: lãi suất và n: số tháng Suy ra công thức lãi kép $A = a(1+r)^n$. Từ đây suy ra $r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}} - 1$. Bấm máy ta được kết quả	1,5%	1 1 1

Bài 5:

(3 điểm) Tính gần đúng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2 \sin x + 3 \cos x - 1}{\cos x + 2}$

Cách giải	Kết quả	Điểm
Ta biến đổi $y = \frac{2 \sin x + 3 \cos x - 1}{\cos x + 2}$ về phương trình: $2 \sin x + (3 - y) \cos x = 2y + 1$ Vậy pt có nghiệm khi $2^2 + (3 - y)^2 \geq (2y + 1)^2$. Suy ra: $\frac{-5 - \sqrt{61}}{3} \leq y \leq \frac{-5 + \sqrt{61}}{3}$	$-4,270083225 \leq y \leq 0,936749892$	1 1 1

Bài 6:

(3 điểm) Cho các hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1}$; $g(x) = \frac{2 \sin x}{1 + \cos^4 x}$.
Hãy tính giá trị của các hàm hợp $g(f(x))$ và $f(g(x))$ tại $x = \sqrt[3]{5}$.

Cách giải	Kết quả	Điểm
Đổi đơn vị đo góc về Radian Gán $\sqrt[3]{5}$ cho biến X, Tính $Y = \frac{2X^2 + 3X - 5}{X^2 + 1}$, ta được giá trị $Y \approx 1,523429229$ và lưu vào bộ nhớ Y (STO Y), Tính $g(Y) = \frac{2 \sin Y}{1 + \cos^4 Y} = g(f(x)) \approx 1,997746736$. Làm tương tự ta cũng được: $f(g(x)) \approx 1,784513102$	$g(Y) = \frac{2 \sin Y}{1 + \cos^4 Y}$ $= g(f(x)) \approx 1,997746736$ $f(g(x)) \approx 1,784513102$	1 1 1

Bài 7:

(5 điểm) Cho dãy số u_n xác định bởi:

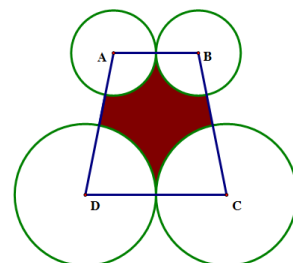
$$u_1 = 1; u_2 = 2; u_3 = 3; \dots; u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + 3u_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

- Tính giá trị của u_4, u_5, u_6, u_7
- Viết quy trình bấm phím để tính u_{n+1} ?
- Sử dụng quy trình bấm phím trên để tính $u_{10}, u_{21}, u_{25}, u_{28}$

Cách giải	Kết quả	Điểm
-----------	---------	------

a) $u_1 = 10; u_2 = 22; u_6 = 51; u_7 = 125$ b) Quy trình bấm phím Nhập biểu thức: $X = X + 1 : D = C + 2B + 3A : A = B : B = C : C = D$ Với các giá trị ban đầu: $X = 3; A = 1; B = 2; C = 3$	a) $u_1 = 10; u_2 = 22;$ $u_6 = 51; u_7 = 125$ $u_{10} = 1657; u_{21} = 22383417;$ c) $u_{25} = 711474236;$ $u_{28} = 9524317645$	1 1 1
--	---	-------------------------

Bài 8: (3 điểm) Tính tổng diện tích hình nằm giữa hình thang và ngoài hình tròn (phần màu đậm) biết chiều dài hai đáy hình thang là 3m và 5m, diện tích hình thang bằng 20m^2 .



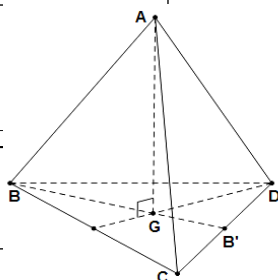
Cách giải	Kết quả	Điểm
Diện tích hình thang: 20m^2 .	7.4378cm^2	1
Diện tích một quạt lớn: $S_{\text{quạt lớn}} = 4.2919\text{m}^2$.		1
Diện tích một quạt nhỏ: $S_{\text{quạt nhỏ}} = 1.9829\text{m}^2$.		1
Diện tích phần cần tìm: $S = S_{\text{hình thang}} - 2(S_{\text{quạt lớn}} + S_{\text{quạt nhỏ}})$		1

Bài 9: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 7x - 4}{x^2 - 5x + 6}$. Tính $y^{(5)}$ tại $x = \frac{3}{5}$

Cách giải	Kết quả	Điểm
$y = 2 + \frac{3x - 16}{(x - 2)(x - 3)} = 2 + \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$.	$y^{(5)}(\frac{3}{5}) \approx -154,97683$	1
Suy ra $3x - 16 = (A + B)x - (3A + 2B) \Rightarrow A = 10, B = -7$.		1
Do đó $y = 2 + \frac{10}{x - 2} - \frac{7}{x - 3}$.		1
Suy ra $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot 7 \cdot \frac{n!}{(x - 3)^{n+1}} + (-1)^n \cdot 10 \cdot \frac{n!}{(x - 2)^{n+1}}$		1

Bài 10: (5 điểm) Cho tứ diện ABCD có các cạnh $AB = 7\sqrt{2}, BC = 6\sqrt{2}, CD = 5\sqrt{2}, BD = 4\sqrt{2}$ và chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) là trọng tâm của tam giác BCD. Tính V_{ABCD} .

Cách giải	Kết quả	Điểm
Đặt $a = AB = 7\sqrt{2}; b = CD = 5\sqrt{2};$ $c = BD = 4\sqrt{2}; d = BC = 6\sqrt{2}$ Ta có nửa chu vi tam giác BCD: $p = (b + c + d)/2$ và $S = \sqrt{p(p - b)(p - c)(p - d)}$ Trung tuyến $BB' = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2d^2 - b^2}$	$V_{ABCD} \approx 59,32491$ (đvdt)	1 1 1



$\Rightarrow BG = \frac{2}{3} BB' = \frac{1}{3} \sqrt{2c^2 + 2d^2 - b^2}$ $\Rightarrow AG = \sqrt{AB^2 - BG^2}.$ Vậy $V = \frac{1}{3} S.AG$		
---	--	--

Bài 11:

Cho phương $x + \log_6 (47 - 6^x) = m$ (1)

- a) Tìm các nghiệm gần đúng của phương trình khi $m = 0,4287$
- b) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của m để phương trình (1) có nghiệm

Cách giải	Kết quả	Điểm
a) Đặt $X = 6^x$ ($X > 0$) Quy về: $X^2 - 47X + 6^m = 0$ (2) Giải ra được: $X_1 \approx 46,9541$; $X_2 \approx 0,04591$	a) $x_1 \approx 2,4183$; $x_2 \approx -1,7196$	1
b) (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $X > 0$ Lập bảng biến thiên suy ra	b) $m = 3$	1
$6^m \leq \frac{47^2}{4} \Leftrightarrow m \leq 3,523910966$		1

Bài 12: Cho đa thức $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \dots + 15(1+x)^{15}$

Được viết dưới dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{15}x^{15}$. Tìm hệ số a_{10}

Cách giải	Kết quả	Điểm
$10(1+x)^{10} = 10(C_{10}^0 + C_{10}^1x + \dots + C_{10}^{10}x^{10})$ $11(1+x)^{11} = 11(C_{11}^0 + C_{11}^1x + \dots + C_{11}^{10}x^{10} + C_{11}^{11}x^{11})$ $12(1+x)^{12} = 12(\dots + C_{12}^{10}x^{10} + \dots)$ $13(1+x)^{13} = 13(\dots + C_{13}^{10}x^{10} + \dots)$ $14(1+x)^{14} = 14(\dots + C_{14}^{10}x^{10} + \dots)$ $15(1+x)^{15} = 15(\dots + C_{15}^{10}x^{10} + \dots)$ $a_{10} = 10C_{10}^{10} + 11C_{11}^{10} + 12C_{12}^{10} + 13C_{13}^{10} + 14C_{14}^{10} + 15C_{15}^{10} = 63700$	$a_0 = 63700$	1
		1
		1