TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN
TP ĐÀ NẴNG
ĐỀ THI ĐỀ XUẤT

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM HỌC 2023
MÔN TOÁN – KHỐI 11
Thời gian: 180 phút (*không kể thời gian giao đề*)

Bài 1 (5,0 *điểm*)
Cho $0 < a < \frac{1}{2}$ và hàm số $f(x) = ax + \ln(x+2)$.

a) Chứng minh dãy số $(x_n)_{n\geq 1}$ xác định bởi
$$x_1 > 0,\ x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \ldots$$
có giới hạn hữu hạn.

b) Tồn tại hay không các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ thỏa $\sum_{i=1}^{100} a_i = 0$ đồng thời dãy số $(y_n)_{n\geq 1}$ xác định bởi
$$y_n = \sqrt{n}\left(a_1\frac{f(n+1)}{n+2} + a_2\frac{f(n+2)}{n+3} + \ldots + a_{100}\frac{f(n+100)}{n+101}\right), n = 1, 2, \ldots$$
có giới hạn là số khác 0?

Bài 2 (4,0 *điểm*)
Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn
$$f(x) f(y+x) = xf(f(y)) + f^2(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 3 (5,0 *điểm*)
Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn (O) và có đường cao AD. Gọi E là điểm di động trên cung nhỏ AB (E khác A, B). Đường thẳng qua E và song song với BC và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F. Đường tròn đường kính AB cắt AE, AF lần lượt tại M, N. Đường tròn đường kính AC cắt AE, AF lần lượt tại N, Q. Chứng minh tiếp tuyến chung ngoài của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMQ và DNP luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4 (3,0 *điểm*)
Cho dãy số $(u_n)_{n\geq 1}$ xác định bởi
$$u_1 = 0,\ u_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+2}u_n - 3(n+1), \forall n \geq 1$$

a) Chứng minh u_n là số nguyên với mọi số nguyên dương n.

b) Chứng minh tồn tại vô hạn số nguyên tố p sao cho $u_{p-1} - p$ chia hết cho p^3.

Bài 5 (3,0 *điểm*)
Cho số nguyên tố $p > 3$, có bao nhiêu bộ (a, b, c) với $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ thỏa mãn
$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv ab + bc + ca \pmod{p} \ ?$$

--Hết--

HƯỚNG DẪN ĐÁP ÁN

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
1	a	Xét $g(x)=x-f(x)$ với $x>0$. Ta có $g'(x)=(1-a)-\frac{1}{x+2}>\frac{1}{2}-a>0$ với mọi $x>0$ Do $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\ln 2<0$ và g liên tục trên $(0;+\infty)$ nên phương trình $g(x)=0$ có nghiệm $x_0>0$ duy nhất.	1,0
		Nhận xét $x_n>0$ với mọi n và $\lvert f'(x)\rvert=a+\frac{1}{x+2}<a+\frac{1}{2}$ với mọi $x>0$ nên với mọi $n>1$, áp dụng định lí Lagrange cho hàm số f. Ta có $\lvert x_n-x_0\rvert=\lvert f(x_{n-1})-f(x_0)\rvert\le\left(a+\frac{1}{2}\right)\lvert x_{n-1}-x_0\rvert\le\ldots\le\left(a+\frac{1}{2}\right)^{n-1}\lvert x_1-x_0\rvert$ Vì $0<a+\frac{1}{2}<1$ nên $\lim\left(a+\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$, do đó $\lim x_n=x_0$.	1,0
	b	Bổ đề: Cho dãy số $(t_n)_{n\ge1}$ xác định bởi $t_n=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j}}$, $n\ge1$. Khi đó $\lim t_n=+\infty$. Chứng minh. Xét hàm số $h(x)=\sqrt{x}$ với $x>0$ Khi đó, $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ liên tục trên $(0;+\infty)$ nên với mọi số nguyên dương j, áp dụng định lý Lagrange trên các đoạn $[j;j+1]$ thì tồn tại $c\in(j;j+1)$ để $h(j+1)-h(j)=h'(c)=\frac{1}{2\sqrt{c}}<\frac{1}{2\sqrt{j}}$ Đánh giá trên đúng với mọi $j=1,2,\ldots,n$ nên $h(n+1)-h(1)=\big(h(n+1)-h(n)\big)+\big(h(n)-h(n-1)\big)+\ldots$ $+\big(h(2)-h(1)\big)<\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ hay $t_n>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$, từ đó bổ đề được chứng minh.	1,0
		Trở lại bài toán, giả sử $y_n=\sqrt{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{100}a_i\frac{f(n+i)}{n+i+1}\right)$ có giới hạn bằng $l>0$ Đặt $z_n=\sum\limits_{i=1}^{100}a_i\frac{f(n+i)}{n+i+1}, n=1,2,\ldots$ Tồn tại số nguyên dương N sao cho $y_n>\frac{l}{2},\forall n>N$ hay $z_n>\frac{l}{2\sqrt{n}},\forall n>N$. Vậy với mọi $n>N$ thì $\sum\limits_{j=N+1}^{n}z_j>\frac{l}{2}\sum\limits_{j=N+1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j}}$. Theo bổ đề, suy ra $\lim\sum\limits_{j=1}^{n}z_j=+\infty$	1,0
		Mặt khác, đặt $A=\max\limits_{i=1,100}\lvert a_i\rvert$ đồng thời chú ý rằng $\left\lvert\frac{f(x)}{x+1}\right\rvert=a\frac{x}{x+1}+\frac{\ln(x+2)}{x+1}<a+1,\forall x>0$ và $\sum\limits_{i=1}^{100}a_i=0$, Với mọi $n>N+100$ thì	1,0

		$\left\lvert \sum_{j=N+1}^{n} z_j \right\rvert = \left\lvert \sum_{j=N+1}^{n} \sum_{i=1}^{100} a_i \frac{f(j+i)}{j+i+1} \right\rvert = \left\lvert \sum_{i=1}^{100} a_i \frac{f(N+i+1)}{N+i+2} + \ldots + \sum_{i=1}^{100} a_i \frac{f(n+i)}{n+i+1} \right\rvert$ $= \left\lvert a_1 \frac{f(N+2)}{N+3} + (a_1+a_2)\frac{f(N+3)}{N+4} + \ldots + (a_1+..+a_{99})\frac{f(N+100)}{N+101} \right.$ $\left. +(a_2+\ldots+a_{100})\frac{f(n+2)}{n+3} + \ldots + a_{100}\frac{f(n+100)}{n+101} \right\rvert$ $< 2(A+2A+\ldots+99A)(a+1) = 99.100A(a+1)$ Điều này dẫn đến mâu thuẫn. Trong trường hợp $\lim y_n = l' < 0$ thì ta cũng tìm được mâu thuẫn bằng cách thay f bởi $-f$. Vậy không tồn tại các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ thỏa yêu cầu bài toán.	
2		Ký hiệu $f(x)f(y+x) = xf(f(y)) + f^2(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1) TH1. f là hàm hằng thì $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. TH2. f không phải hàm hằng Thay $x=0$ được $f(0)f(y) = f^2(0)$, vì f không phải hàm hằng nên $f(0)=0$. Giả sử tồn tại u để $f(u)=0$ thì thay $x=u$ vào (1) ta được $uf(f(y))=0$ Nếu $u \neq 0$ thì $f(f(y))=0$ với mọi y. Khi đó $f(x)f(y+x) = f^2(x)$ Cho $y=-x$ vào phương trình trên suy ra $f(x)=0, \forall x$: mâu thuẫn Vậy $u=0$ hay $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.	1,0
		+Chứng minh f đơn ánh. Giả sử tồn tại các số thực a, b sao cho $f(a)=f(b)$ Nếu $f(a)=f(b)=0$ thì $a=b=0$. Nếu $f(a)=f(b)\neq 0$ thì lần lượt thay $x=a, y=b$ và $x=b, y=a$ suy ra $af(f(b)) + f^2(a) = bf(f(a)) + f^2(b)$ Vậy $a=b$ hay f đơn ánh.	1,0
		+Chứng minh f lẻ. Thay $y=-x$ suy ra $f^2(x) = -xf(f(-x))$ hay $f^2(-x) = xf(f(x))$ Thay $y=x$ thì $f(x)f(2x) = xf(f(x)) + f^2(x) = f^2(-x) + f^2(x), \forall x$ (2) Do đó $f(x).f(2x)$ là hàm chẵn. Thay $y=-2x$ ta được $f(x)f(-x) = xf(f(-2x)) + f^2(x)$ Thay x bởi $2x$ và $y=-2x$ được $0 = 2xf(f(-2x)) + f^2(2x)$ Hay $f^2(2x) = -2xf(f(-2x)) = 2f(x)(f(x) - f(-x))$ Suy ra $f^2(2x)f^2(x) = 2f^3(x)(f(x)-f(-x))$ Vậy $f^2(2x)f^2(x) = 2f^3(-x)(f(-x)-f(x))$, suy ra f lẻ	1,0
		Từ (2), suy ra $f(f(x)) = \frac{f^2(x)}{x}, \forall x \neq 0$, nên từ (1) ta có $f(x+y) = x.\frac{f^2(y)}{yf(x)} + f(x), \forall x, y \neq 0$ Hoán đổi vai trò x, y:	1,0

$$x.\frac{f^2(y)}{yf(x)}+f(x)=y.\frac{f^2(x)}{xf(y)}+f(y)$$

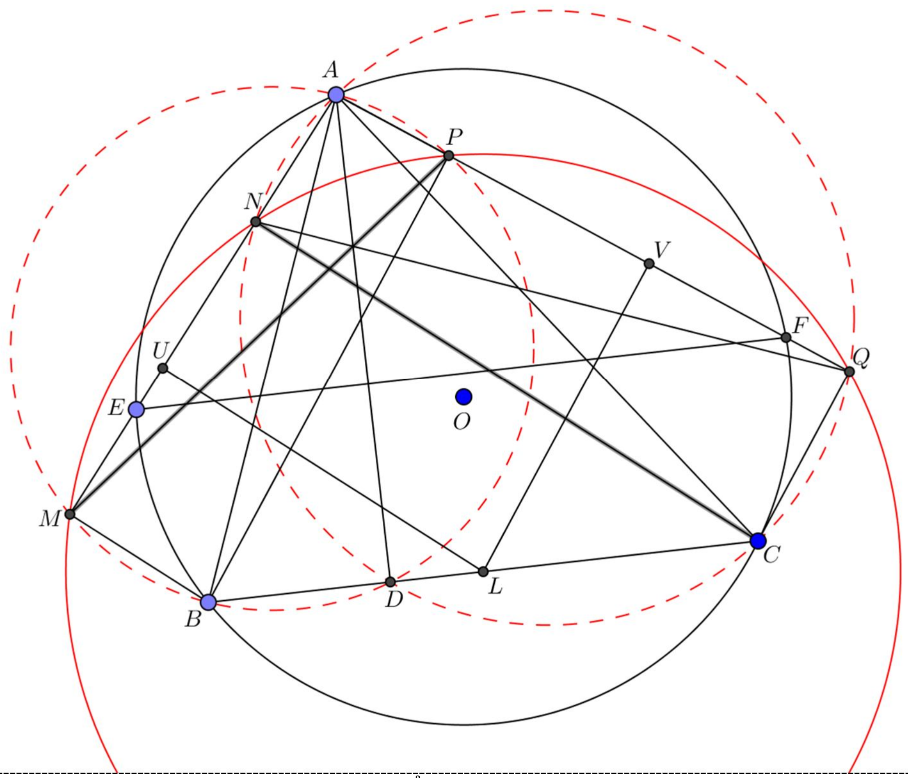
$$\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}\right)\left(\frac{f^2(y)}{y}+\frac{f^2(x)}{x}\right)=0$$

Vì vậy với $x,y>0$ thì $\frac{f^2(x)}{x}+\frac{f^2(y)}{y}>0$ nên

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(y)}{y}\Rightarrow f(x)=f(1)x,\forall x>0$$

Vì f lẻ nên $f(x)=f(1)x,\forall x$. KL $f(x)=ax,\forall x\ (a\in\mathbb{R})$.

3



Gọi L,U,V theo thứ tự là trung điểm BC,MN,PQ. 1,0

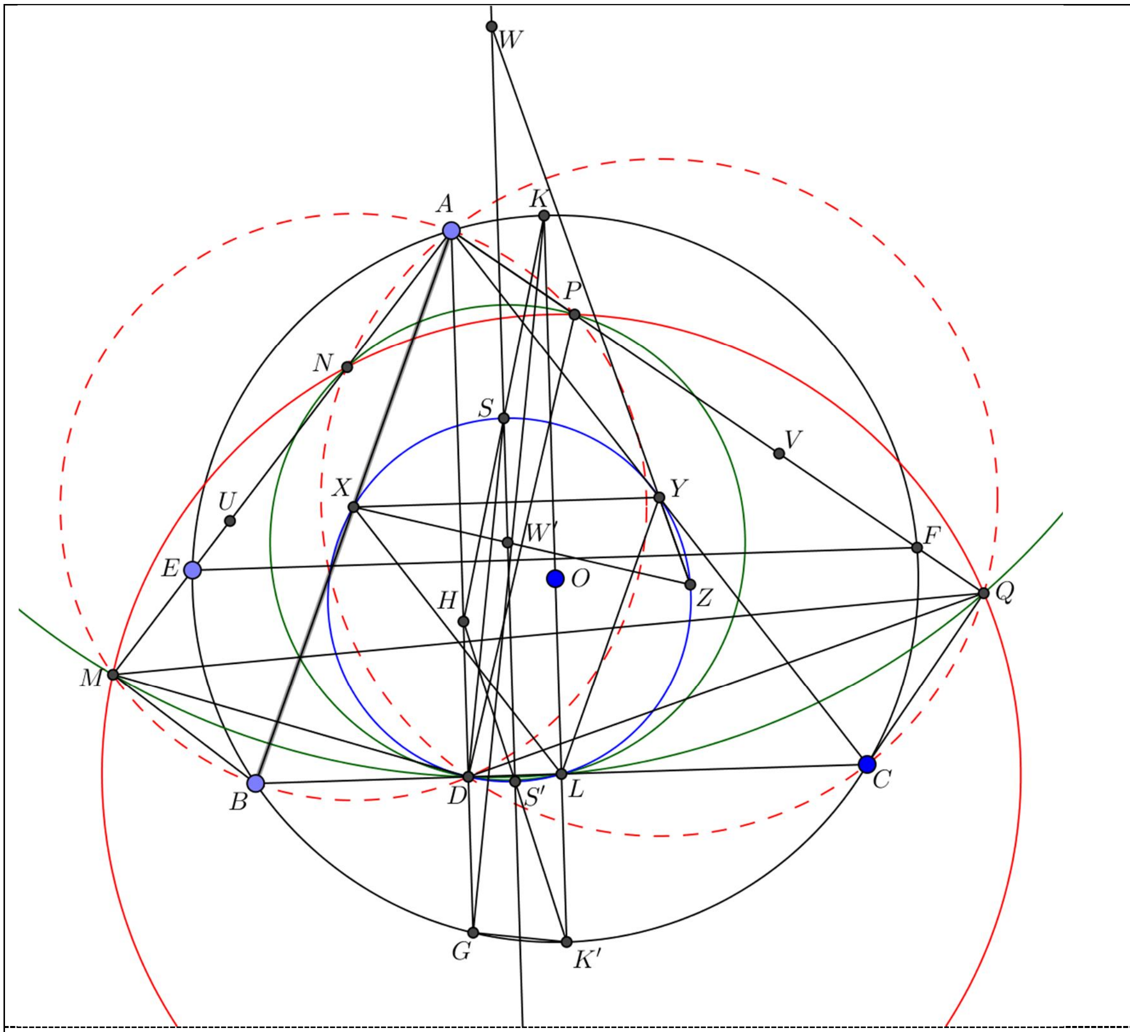
Ta có các bộ điểm (A,B,M,P), (A,C,N,Q) cùng thuộc một đường tròn và các tam giác ABM, ACQ đồng dạng ngược hướng. Do đó

$$(PM,PQ)\equiv(PM,PA)\equiv(BM,BA)\equiv(CA,CQ)$$
$$\equiv(NA,NQ)\equiv(NM,NQ)(\bmod \pi).$$

Vậy các điểm M,N,P,Q thuộc một đường tròn.

Vì $BM\,//\,CN$ và $\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}}=-1=\frac{\overline{UM}}{\overline{UN}}$ nên theo định lí Thales đảo $LU\,//\,BM\,//\,CN$. Do đó LU vuông góc MN. Vậy LU là trung trực MN.

Tương tự LV là trung trực của PQ. Vậy L là tâm đường tròn qua các điểm M,N,P,Q.



Gọi $W, W'; R, R'$ theo thứ tự là tâm và bán kính các đường tròn $(DMQ); (DNP)$; K, K' là các giao điểm OL và (O); H là trực tâm tam giác ABC; G là giao điểm của AH và $(O); S, S'$ theo thứ tự là giao điểm của HK, HK' và WW'; Z là tâm đường tròn (DPQ).

Ta có

$$(DL, DM) \equiv (DB, DM) \equiv (AB, AM) \equiv -(AC, AQ)$$
$$\equiv -(DC, DQ) (\bmod \pi)$$

nên kết hợp với $LM = LQ$, suy ra L thuộc đường tròn (DMQ). Vậy WW' là trung trực DL (1)

1,0

Do đó S, S' theo thứ tự là trung điểm HK, HK'. Kết hợp D là trung điểm HG (kết quả quen thuộc) suy ra $DS // GK; DS' // GK'$.

Kết hợp $GK \perp GK'$ suy ra $DS \perp DS'$.

Gọi X, Y theo thứ tự là trung điểm của AB, AC (2).

Từ (1) và (2) suy ra tâm đường tròn Euler của tam giác ABC nằm trên WW' và WW' là trung trực XY (3)

1,0

Ta có DP là dây cung chung của các đường tròn (X) và (Z); DQ là dây cung chung của các đường tròn (Y) và (Z) nên $DP \perp ZX$, $DQ \perp ZY$. Suy ra

$$(ZX, ZY) \equiv (DP, DQ) \equiv (DP, AP) + (AP, DQ)$$
$$\equiv (DB, AB) + (AC, DC) \equiv (AC, AB) \equiv (LX, LY) (\bmod \pi)$$

Vậy Z thuộc đường tròn $(DLXYSS')$ (đường tròn Euler của tam giác ABC) (4)

1,0

Từ (3), (4) suy ra $(SS'WW') = Z(SS'WW') = Z(SS'XY) = -1$ | 1,0

Kết hợp $DS \perp DS'$ suy ra DS, DS' là phân giác của góc tạo bởi DW, DW'

Theo tính chất đường phân giác

$$\frac{\overline{SW}}{\overline{SW'}} = -\frac{DW}{DW'} = -\frac{R}{R'}; \frac{\overline{S'W}}{\overline{S'W'}} = \frac{DW}{DW'} = \frac{R}{R'}$$

Suy ra S, S' theo thứ tự là tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của các đường tròn $(DMQ), (DNP)$ nên cố định. Nói riêng tiếp tuyến chung ngoài của các đường tròn (DMQ) và (DNP) luôn đi qua điểm cố định.

4 a

Đặt $u_n = (n+2) - v_n, \forall n \geq 1$ thì | 1,0

$$(n+3) - v_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+2}(n+2-v_n) - 3(n+1) \Rightarrow v_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+2}v_n$$

Khi đó $v_1 = 3$ và chứng minh quy nạp được $v_n = C_{2n+1}^n$ với mọi n.

Vậy $u_n = (n+2) - C_{2n+1}^n$ nên u_n là số nguyên với mọi số nguyên dương n.

b

Nhận xét. Với mọi số nguyên tố $p \geq 5$ thì $C_{2p-1}^p \equiv 1 \pmod{p^3}$ | 1,0

Chứng minh $C_{2p-1}^p = \dfrac{(p+1)(p+2)...(2p-1)}{(p-1)!}$

Ta chứng minh $(p+1)(p+2)...(2p-1) - (p-1)! \vdots p^3$

Ta có $2(p-1)!\left(\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i}\right) = (p-1)!\left(\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{p-i}\right)\right) = p(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{1}{(p-i)i}\right)$

Hệ $\{1; 2; ...; p-1\}$ thu gọn theo modunlo p nên

$$(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{1}{(p-i)i}\right) \equiv -(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i^2} \equiv -(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}i^2$$

$$\equiv -(p-1)!\frac{p(p-1)(2p-1)}{6} \pmod{p}$$

$$\Rightarrow (p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{1}{(p-i)i}\right) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (p-1)!\left(\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i}\right) \equiv 0 \pmod{p^2}$$

Ta cũng có | 1,0

$$2(p-1)!\left(\sum_{1\leq i<j\leq p-1}\frac{1}{\text{ij}}\right) = (p-1)!\left(\left(\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i^2}\right)$$

$$\equiv -(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i^2} \equiv -(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}i^2$$

$$\equiv -(p-1)!\frac{(p-1)(2p-1)p}{6} \equiv 0 \pmod{p}$$

Nên $(p-1)!\left(\sum_{1\leq i<j\leq p-1}\frac{1}{\text{ij}}\right) \equiv 0 \pmod{p}$.

Do đó,

		$(p+1)(p+2)...(2p-1)-(p-1)!$ $= Ap^3 + p^2(p-1)!\left(\sum_{1\le i<j\le p-1}\frac{1}{ij}\right) + p(p-1)!\left(\sum_{1\le i<j\le p-1}\frac{1}{i}\right)$ $\equiv 0\left(\bmod p^3\right)$ Vậy nhận xét được chứng minh Do đó với mọi số nguyên tố $p\ge 5$ thì $u_{p-1}-p=1-C_{2p-1}^{p-1}\equiv 0\left(\bmod p^3\right)$.	
5		Biến đổi $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\equiv 0(\bmod p)$ Đặt $a-b=x$ và $b-c=y$ thì $x^2+y^2+xy\equiv 0(\bmod p)$ (1), TH1. Nếu $p\equiv 2(\bmod 3)$ thì từ (1), ta có $(2x+y)^2\equiv -3y^2(\bmod p)$ Nếu $(y,p)=1$ thì $(-3)^{\frac{p-1}{2}}.y^{p-1}\equiv(2x+y)^{p-1}(\bmod p)\Rightarrow(-3)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(\bmod p)$ Vậy $\left(\frac{-3}{p}\right)=1\Rightarrow p\equiv 1(\bmod 6)$, mâu thuẫn vì $p\equiv 2(\bmod 3)$ Do vậy $y\equiv x\equiv 0(\bmod p)$. Khi đó $a\equiv b\equiv c(\bmod p)$, tức có p bộ thỏa.	1,0
		TH2. Nếu $p\equiv 1(\bmod 3)$ thì -3 là thặng dư bình phương modunlo p nên phương trình $z^2+z+1\equiv 0(\bmod p)$ có hai nghiệm z_0 và z_0^{-1} theo modunlo p. Khi đó $(x-z_0y)(x-z_0^{-1}y)\equiv 0(\bmod p)$, suy ra $x\equiv z_0y(\bmod p)$ hoặc $x\equiv z_0^{-1}y(\bmod p)$ Nếu $x\equiv z_0y(\bmod p)$ thì $a\equiv(z_0+1)b-z_0c(\bmod p)$, nên có p^2 bộ thỏa. Nếu $x\equiv z_0^{-1}y(\bmod p)$ thì $a\equiv\left(z_0^{-1}+1\right)b-z_0^{-1}c(\bmod p)$, nên có p^2 bộ thỏa	1,0
		Giả sử tồn tại bộ (a,b,c) thỏa đồng thời $a\equiv(z_0+1)b-z_0c(\bmod p)$ và $a\equiv\left(z_0^{-1}+1\right)b-z_0^{-1}c(\bmod p)$ thì $\left(z_0-z_0^{-1}\right)(b-c)\equiv 0(\bmod p)$ Do $z_0^{-1}\equiv -1-z_0(\bmod p)$ nên $z_0^{-1}-z_0\equiv -1-2z_0\not\equiv 0(\bmod p)$, do đó $b\equiv c(\bmod p)$, tức có p bộ như thế. Vậy trường hợp này có $2p^2-p$ bộ thỏa.	1,0